Diszkrét matematika II. gyakorlat

Absztrakt algebra

Bogya Norbert

Bolyai Intézet

2014. április 23.

Tartalom

1. 1. Feladatsor

2. 2. Feladatsor

1.Feladat

Egy társaság négy férfiból és öt nőből áll. Hányféleképpen lehet közülük két férfit és két nőt a nyitótánchoz kiválasztani? (A sorrend nem számít.)

!	$5^4 - 4^4$	$\binom{9}{4}$	24	48	60	120	150	$5! \cdot 4!$	egyik sem	!

1.Feladat

Egy társaság négy férfiból és öt nőből áll. Hányféleképpen lehet közülük két férfit és két nőt a nyitótánchoz kiválasztani? (A sorrend nem számít.)

!	$5^4 - 4^4$	$\binom{9}{4}$	24	48	60	120	150	$5! \cdot 4!$	egyik sem	!

Megoldás.

1. Két férfit hányféleképpen választhatunk ki? $\binom{4}{2}$

1.Feladat

Egy társaság négy férfiból és öt nőből áll. Hányféleképpen lehet közülük két férfit és két nőt a nyitótánchoz kiválasztani? (A sorrend nem számít.)

!	$5^4 - 4^4$	$\binom{9}{4}$	24	48	60	120	150	$5! \cdot 4!$	egyik sem	!

Megoldás.

1. Két férfit hányféleképpen választhatunk ki? $\binom{4}{2}$
2. Két nőt hányféleképpen választhatunk ki? $\binom{5}{2}$

1.Feladat

Egy társaság négy férfiból és öt nőből áll. Hányféleképpen lehet közülük két férfit és két nőt a nyitótánchoz kiválasztani? (A sorrend nem számít.)

!	$5^4 - 4^4$	$\binom{9}{4}$	24	48	60	120	150	$5! \cdot 4!$	egyik sem	!

Megoldás.

1. Két férfit hányféleképpen választhatunk ki? $\binom{4}{2}$
2. Két nőt hányféleképpen választhatunk ki? $\binom{5}{2}$
3. Hányféleképpen táncolhatnak?

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} = 6 \cdot 10 = 60$$

2. Feladat

Mint ismeretes, a (magyar) kártyapakliban 32 lap van: négy szín (zöld, piros, tök, makk) és mindegyik színből nyolc lap. Hányféleképpen lehet a pakliból négy lapot kihúzni úgy, hogy a kihúzott lapok ne legyenek azonos színűek? (Azaz legalább két különböző szín fellépjen. A sorrend nem számít.)

!	$\binom{32}{4} - \binom{8}{4}$	$\binom{24}{4} + \binom{8}{1}$	$\binom{32}{4} - \binom{24}{4}$	$\binom{32}{4} - 4 \cdot \binom{8}{4}$

egyik sem	!

2. Feladat

Mint ismeretes, a (magyar) kártyapakliban 32 lap van: négy szín (zöld, piros, tök, makk) és mindegyik színből nyolc lap. Hányféleképpen lehet a pakliból négy lapot kihúzni úgy, hogy a kihúzott lapok ne legyenek azonos színűek? (Azaz legalább két különböző szín fellépjen. A sorrend nem számít.)

!	$\binom{32}{4} - \binom{8}{4}$	$\binom{24}{4} + \binom{8}{1}$	$\binom{32}{4} - \binom{24}{4}$	$\binom{32}{4} - 4 \cdot \binom{8}{4}$

egyik sem	!

Megoldás.

1. Hányféleképpen húzhatunk 4 lapot? $\binom{32}{4}$

2. Feladat

Mint ismeretes, a (magyar) kártyapakliban 32 lap van: négy szín (zöld, piros, tök, makk) és mindegyik színből nyolc lap. Hányféleképpen lehet a pakliból négy lapot kihúzni úgy, hogy a kihúzott lapok ne legyenek azonos színűek? (Azaz legalább két különböző szín fellépjen. A sorrend nem számít.)

!	$\binom{32}{4} - \binom{8}{4}$	$\binom{24}{4} + \binom{8}{1}$	$\binom{32}{4} - \binom{24}{4}$	$\binom{32}{4} - 4 \cdot \binom{8}{4}$

egyik sem	!

Megoldás.

1. Hányféleképpen húzhatunk 4 lapot? $\binom{32}{4}$
2. Hányféleképpen húzhatunk 4 egyforma lapot? $\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{4}$

2. Feladat

Mint ismeretes, a (magyar) kártyapakliban 32 lap van: négy szín (zöld, piros, tök, makk) és mindegyik színből nyolc lap. Hányféleképpen lehet a pakliból négy lapot kihúzni úgy, hogy a kihúzott lapok ne legyenek azonos színűek? (Azaz legalább két különböző szín fellépjen. A sorrend nem számít.)

!	$\binom{32}{4} - \binom{8}{4}$	$\binom{24}{4} + \binom{8}{1}$	$\binom{32}{4} - \binom{24}{4}$	$\binom{32}{4} - 4 \cdot \binom{8}{4}$

egyik sem	!

Megoldás.

1. Hányféleképpen húzhatunk 4 lapot? $\binom{32}{4}$
2. Hányféleképpen húzhatunk 4 egyforma lapot? $\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{4}$
3. Válasz:

$$\binom{32}{4} - 4 \cdot \binom{8}{4}$$

3. Feladat

Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$8x \equiv -1 \pmod{17}$$
$$20 < x < 38$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x-et!

!	$[21, 23]$	$[24, 26]$	$[27, 30]$	$[31, 32]$	$[33, 35]$

$[36, 37]$	egyik sem	!

3. Feladat

Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$8x \equiv -1 \pmod{17}$$
$$20 < x < 38$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x-et!

!	$[21, 23]$	$[24, 26]$	$[27, 30]$	$[31, 32]$	$[33, 35]$

$[36, 37]$	egyik sem	!

Megoldás.

- $8x \equiv -1 \pmod{17}$

3. Feladat

Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$8x \equiv -1 \pmod{17}$$
$$20 < x < 38$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x-et!

!	$[21, 23]$	$[24, 26]$	$[27, 30]$	$[31, 32]$	$[33, 35]$

$[36, 37]$	egyik sem	!

Megoldás.

- $8x \equiv -1 \pmod{17}$
- $8x - 17y = -1$

Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$8x \equiv -1 \pmod{17}$$
$$20 < x < 38$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x-et!

!	$[21, 23]$	$[24, 26]$	$[27, 30]$	$[31, 32]$	$[33, 35]$

$[36, 37]$	egyik sem	!

Megoldás.

- $8x \equiv -1 \pmod{17}$
- $8x - 17y = -1$
- $\text{lnko}(8, 17) = 1$

Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$8x \equiv -1 \pmod{17}$$
$$20 < x < 38$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x-et!

!	$[21, 23]$	$[24, 26]$	$[27, 30]$	$[31, 32]$	$[33, 35]$

$[36, 37]$	egyik sem	!

Megoldás.

- $8x \equiv -1 \pmod{17}$
- $8x - 17y = -1$
- $\text{lnko}(8, 17) = 1$
- $x_0 = 2$ és $y_0 = 1$

3. Feladat

Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$8x \equiv -1 \pmod{17}$$
$$20 < x < 38$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x-et!

!	$[21, 23]$	$[24, 26]$	$[27, 30]$	$[31, 32]$	$[33, 35]$

$[36, 37]$	egyik sem	!

Megoldás.

- $8x \equiv -1 \pmod{17}$
- $8x - 17y = -1$
- $\text{lnko}(8, 17) = 1$
- $x_0 = 2$ és $y_0 = 1$
- $x = 2 - 17 \cdot t$

3. Feladat

Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$8x \equiv -1 \pmod{17}$$
$$20 < x < 38$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x-et!

!	$[21, 23]$	$[24, 26]$	$[27, 30]$	$[31, 32]$	$[33, 35]$

$[36, 37]$	egyik sem	!

Megoldás.

- $8x \equiv -1 \pmod{17}$
- $8x - 17y = -1$
- $\mathrm{lnko}(8, 17) = 1$
- $x_0 = 2$ és $y_0 = 1$
- $x = 2 - 17 \cdot t$
- $x \equiv 2 \pmod{17}$

3. Feladat

Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$8x \equiv -1 \pmod{17}$$
$$20 < x < 38$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x-et!

!	$[21, 23]$	$[24, 26]$	$[27, 30]$	$[31, 32]$	$[33, 35]$

$[36, 37]$	egyik sem	!

Megoldás.

- $8x \equiv -1 \pmod{17}$
- $8x - 17y = -1$
- $\mathrm{lnko}(8, 17) = 1$
- $x_0 = 2$ és $y_0 = 1$
- $x = 2 - 17 \cdot t$
- $x \equiv 2 \pmod{17}$
- $x = 2, 19, 36, \ldots$

4. Feladat

Hányféleképpen lehet sorba rakni a „KUPAK” szó betűit, azaz hány ötbetűs szó nyerhető a „KUPAK” betűinek összekeverésével?

!	24	36	48	60	72	120	180	240	egyik sem	!

4. Feladat

Hányféleképpen lehet sorba rakni a „KUPAK” szó betűit, azaz hány ötbetűs szó nyerhető a „KUPAK” betűinek összekeverésével?

!	24	36	48	60	72	120	180	240	egyik sem	!

Megoldás.

- Ismétléses permutáció.

4. Feladat

Hányféleképpen lehet sorba rakni a „KUPAK'' szó betűit, azaz hány ötbetűs szó nyerhető a „KUPAK'' betűinek összekeverésével?

!	24	36	48	60	72	120	180	240	egyik sem	!

Megoldás.

- Ismétléses permutáció.
- Válasz:

$$\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

5. Feladat

A

$$2^{56}$$

számot maradékosan osztjuk 81-gyel. Mi az osztás maradéka?

!	0	1	2	3	4	9	25	27	egyik sem	!

5. Feladat

A

$$2^{56}$$

számot maradékosan osztjuk 81-gyel. Mi az osztás maradéka?

!	0	1	2	3	4	9	25	27	egyik sem	!

Megoldás.

- $2^{56} \equiv x \pmod{81}$

5. Feladat

A

$$2^{56}$$

számot maradékosan osztjuk 81-gyel. Mi az osztás maradéka?

!	0	1	2	3	4	9	25	27	egyik sem	!

Megoldás.

- $2^{56} \equiv x \pmod{81}$
- Euler-tétel: ha $\mathrm{lnko}(a, n) = 1$, akkor $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

5. Feladat

A

$$2^{56}$$

számot maradékosan osztjuk 81-gyel. Mi az osztás maradéka?

!	0	1	2	3	4	9	25	27	egyik sem	!

Megoldás.

- $2^{56} \equiv x \pmod{81}$
- Euler-tétel: ha $\mathrm{lnko}(a, n) = 1$, akkor $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.
- $\mathrm{lnko}(2, 81) = 1$

5. Feladat

A

$$2^{56}$$

számot maradékosan osztjuk 81-gyel. Mi az osztás maradéka?

!	0	1	2	3	4	9	25	27	egyik sem	!

Megoldás.

- $2^{56} \equiv x \pmod{81}$
- Euler-tétel: ha $\mathrm{lnko}(a, n) = 1$, akkor $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.
- $\mathrm{lnko}(2, 81) = 1$
- $\varphi(81) = \varphi(3^4) = 3^4 - 3^3 = 81 - 27 = 54$

A

$$2^{56}$$

számot maradékosan osztjuk 81-gyel. Mi az osztás maradéka?

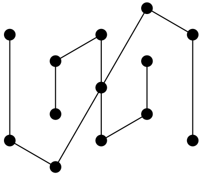
!	0	1	2	3	4	9	25	27	egyik sem	!

Megoldás.

- $2^{56} \equiv x \pmod{81}$
- Euler-tétel: ha $\mathrm{lnko}(a, n) = 1$, akkor $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.
- $\mathrm{lnko}(2, 81) = 1$
- $\varphi(81) = \varphi(3^4) = 3^4 - 3^3 = 81 - 27 = 54$
- $2^{56} = 2^{54} \cdot 2^2 \equiv 4 \pmod{81}$

6. Feladat

Mely tulajdonságok érvényesek az alábbi gráfra, ha „EV”, illetve „zárt EV” a „van Euler-vonala”, illetve „van zárt Euler-vonala” rövidítése?



?	EV	zárt EV	páros gráf	síkgráf	van Hamilton-köre

fa	egyik sem	?

7. Feladat

Legyen $A = (A; +, \cdot)$ egy tetszőleges gyűrű, és legyen $a, b, c \in A$. A gyűrűre, illetve annak elemeire vonatkozó alábbi kijelentések közül melyek **szükségképpen** igazak?

- Ha $b \neq 0$, akkor b-nek van multiplikatív inverze.
- Az összeadás egységeleme egyúttal a szorzás zéruseleme.
- $(A \setminus \{0\}; \cdot)$ Abel-csoport.
- $bc - cb = 0$.

7. Feladat

Legyen $A = (A; +, \cdot)$ egy tetszőleges gyűrű, és legyen $a, b, c \in A$. A gyűrűre, illetve annak elemeire vonatkozó alábbi kijelentések közül melyek **szükségképpen** igazak?

- Ha $b \neq 0$, akkor b-nek van multiplikatív inverze.
- Az összeadás egységeleme egyúttal a szorzás zéruseleme.
- $(A \setminus \{0\}; \cdot)$ Abel-csoport.
- $bc - cb = 0$.

Megoldás.

- Hamis: az $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ gyűrűben a $\bar{2}$-nek nincs inverze.

7. Feladat

Legyen $A = (A; +, \cdot)$ egy tetszőleges gyűrű, és legyen $a, b, c \in A$. A gyűrűre, illetve annak elemeire vonatkozó alábbi kijelentések közül melyek **szükségképpen** igazak?

- Ha $b \neq 0$, akkor b-nek van multiplikatív inverze.
- Az összeadás egységeleme egyúttal a szorzás zéruseleme.
- $(A \setminus \{0\}; \cdot)$ Abel-csoport.
- $bc - cb = 0$.

Megoldás.

- Hamis: az $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ gyűrűben a $\bar{2}$-nek nincs inverze.
- Igaz

7. Feladat

Legyen $A = (A; +, \cdot)$ egy tetszőleges gyűrű, és legyen $a, b, c \in A$. A gyűrűre, illetve annak elemeire vonatkozó alábbi kijelentések közül melyek **szükségképpen** igazak?

- Ha $b \neq 0$, akkor b-nek van multiplikatív inverze.
- Az összeadás egységeleme egyúttal a szorzás zéruseleme.
- $(A \setminus \{0\}; \cdot)$ Abel-csoport.
- $bc - cb = 0$.

Megoldás.

- Hamis: az $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ gyűrűben a $\bar{2}$-nek nincs inverze.
- Igaz
- Hamis: az $(\mathbb{R}^{n\times n}, +, \cdot)$ gyűrű nem kommutatív.

7. Feladat

Legyen $A = (A; +, \cdot)$ egy tetszőleges gyűrű, és legyen $a, b, c \in A$. A gyűrűre, illetve annak elemeire vonatkozó alábbi kijelentések közül melyek **szükségképpen** igazak?

- Ha $b \neq 0$, akkor b-nek van multiplikatív inverze.
- Az összeadás egységeleme egyúttal a szorzás zéruseleme.
- $(A \setminus \{0\}; \cdot)$ Abel-csoport.
- $bc - cb = 0$.

Megoldás.

- Hamis: az $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ gyűrűben a $\bar{2}$-nek nincs inverze.
- Igaz
- Hamis: az $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$ gyűrű nem kommutatív.
- Hamis: lásd előző.

8. Feladat

Az egész számok $(\mathbb{Z}; +)$ additív csoportjának önmagával vett direkt szorzatában, azaz $(\mathbb{Z}^2; +)$ csoportban tekintsük az

$$S = \{(5x, -2x) : x \in \mathbb{Z}\}$$

normálosztót. A téglalapban felsoroltak közül melyek vannak benne a $(2, -1)$ elem S szerinti baloldali mellékosztályában?

?	-3	$(12, 5)$	$(2, -1)$	$(2, 1)$	$(12, -5)$

$(0, 0)$	egyik sem	?

8. Feladat

Az egész számok $(\mathbb{Z};+)$ additív csoportjának önmagával vett direkt szorzatában, azaz $(\mathbb{Z}^2;+)$ csoportban tekintsük az

$$S = \{(5x, -2x) : x \in \mathbb{Z}\}$$

normálosztót. A téglalapban felsoroltak közül melyek vannak benne a $(2,-1)$ elem S szerinti baloldali mellékosztályában?

?	-3	$(12,5)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(12,-5)$

$(0,0)$	egyik sem	?

Megoldás.

$$\begin{aligned}(2,-1)+S &= \{(2,-1)+(5x,-2x) : x \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{(2+5x, -1-2x) : x \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

8. Feladat

Az egész számok $(\mathbb{Z}; +)$ additív csoportjának önmagával vett direkt szorzatában, azaz $(\mathbb{Z}^2; +)$ csoportban tekintsük az

$$S = \{(5x, -2x) : x \in \mathbb{Z}\}$$

normálosztót. A téglalapban felsoroltak közül melyek vannak benne a $(2, -1)$ elem S szerinti baloldali mellékosztályában?

?	-3	$(12, 5)$	$(2, -1)$	$(2, 1)$	$(12, -5)$

$(0, 0)$	egyik sem	?

Megoldás.

$$\begin{aligned} (2, -1) + S &= \{(2, -1) + (5x, -2x) : x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(2 + 5x, -1 - 2x) : x \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$$(2, -1) : \; x = 0, (12, -5) : \; x = 2$$

9. Feladat

Tekintsük az alábbi művelettáblázattal megadott $\mathcal{A} = (A; *)$ grupoidot. A téglalapban felsorolt állítások ezen grupoidra, illetve ezen $*$ műveletre értendők. Ikszeljük be a felsoroltak közül az igaz állításokat. (Itt $[X]$, illetve $[y]$ — a szokott módon — az X illetve $\{y\}$ részhalmaz által generált részgrupoidot jelöli.)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

?	van zéruselem	van egységelem	$c \in [b]$
$c \in [\{b, d\}]$	egyik sem	?	

10. Feladat

Tekintsük az előző feladatban műveletttáblázattal megadott $A = (A; *)$ grupoidot. Az alábbi téglalapban megadott osztályozások közül melyek azok, amelyekhez a félcsoport kongruenciarelációi tartoznak?

?	$\{\{a,d\},\{b,c\}\}$	$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$	$\{\{a,b,c,d\}\}$

$\{\{a,c,d\},\{b\}\}$	egyik sem	?

10. Feladat

Tekintsük az előző feladatban művelettáblázattal megadott $\mathcal{A} = (A; *)$ grupoidot. Az alábbi téglalapban megadott osztályozások közül melyek azok, amelyekhez a félcsoport kongruenciarelációi tartoznak?

?	$\{\{a, d\}, \{b, c\}\} \otimes$	$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\} \otimes$	$\{\{a, b, c, d\}\} \otimes$

$\{\{a, c, d\}, \{b\}\}$	egyik sem	?

Tartalom

1 1. Feladatsor

2 2. Feladatsor

1. Feladat

Hányféleképpen lehet sorba rakni a „KIFLI" szó betűit úgy, hogy ne „I" betűvel kezdődő szót kapjunk?

!	$5^4 - 4^4$	$\binom{5}{3}$	18	24	36	48	$5! \cdot 4!$

$5! - 4!$	egyik sem	!

1. Feladat

Hányféleképpen lehet sorba rakni a „KIFLI" szó betűit úgy, hogy ne „I" betűvel kezdődő szót kapjunk?

!	$5^4 - 4^4$	$\binom{5}{3}$	18	24	36	48	$5! \cdot 4!$

$5! - 4!$	egyik sem	!

Megoldás. Szétszedjük, hogy mivel kezdődhet.

1. „K": $\dfrac{4!}{2!}$

1. Feladat

Hányféleképpen lehet sorba rakni a „KIFLI" szó betűit úgy, hogy ne „I" betűvel kezdődő szót kapjunk?

!	$5^4 - 4^4$	$\binom{5}{3}$	18	24	36	48	$5! \cdot 4!$

$5! - 4!$	egyik sem	!

Megoldás. Szétszedjük, hogy mivel kezdődhet.

1. „K": $\dfrac{4!}{2!}$
2. „F": $\dfrac{4!}{2!}$

1. Feladat

Hányféleképpen lehet sorba rakni a „KIFLI” szó betűit úgy, hogy ne „I” betűvel kezdődő szót kapjunk?

!	$5^4 - 4^4$	$\binom{5}{3}$	18	24	36	48	$5! \cdot 4!$

$5! - 4!$	egyik sem	!

Megoldás. Szétszedjük, hogy mivel kezdődhet.

1. „K”: $\dfrac{4!}{2!}$
2. „F”: $\dfrac{4!}{2!}$
3. „L”: $\dfrac{4!}{2!}$

1. Feladat

Hányféleképpen lehet sorba rakni a „KIFLI” szó betűit úgy, hogy ne „I” betűvel kezdődő szót kapjunk?

!	$5^4 - 4^4$	$\binom{5}{3}$	18	24	36	48	$5! \cdot 4!$

$5! - 4!$	egyik sem	!

Megoldás. Szétszedjük, hogy mivel kezdődhet.

1. „K”: $\dfrac{4!}{2!}$
2. „F”: $\dfrac{4!}{2!}$
3. „L”: $\dfrac{4!}{2!}$
4. Összesen: 36

2. Feladat

Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$x \equiv 7 \pmod 8$$
$$x \equiv 6 \pmod 7$$
$$20 < x < 100$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x-et!

!	$[21, 40)$	$[40, 60)$	$[60, 80)$	$[80, 87)$	$[87, 94)$

$[94, 100)$	egyik sem	!

Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$x \equiv 7 \pmod 8$$
$$x \equiv 6 \pmod 7$$
$$20 < x < 100$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x-et!

!	$[21, 40)$	$[40, 60)$	$[60, 80)$	$[80, 87)$	$[87, 94)$

$[94, 100)$	egyik sem	!

Megoldás.

$$x - 8y = 7$$
$$x - 7z = 6$$

2. Feladat

Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$x \equiv 7 \pmod 8$$
$$x \equiv 6 \pmod 7$$
$$20 < x < 100$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x-et!

!	$[21, 40)$	$[40, 60)$	$[60, 80)$	$[80, 87)$	$[87, 94)$

$[94, 100)$	egyik sem	!

Megoldás.

$$\begin{aligned} x - 8y &= 7 \\ x - 7z &= 6 \end{aligned} \iff 7 + 8y - 7z = 6$$

2. Feladat

Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$x \equiv 7 \pmod 8$$
$$x \equiv 6 \pmod 7$$
$$20 < x < 100$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x-et!

!	$[21, 40)$	$[40, 60)$	$[60, 80)$	$[80, 87)$	$[87, 94)$

$[94, 100)$	egyik sem	!

Megoldás.

$$\begin{aligned} x - 8y &= 7 \\ x - 7z &= 6 \end{aligned} \iff 7 + 8y - 7z = 6 \iff 8y - 7z = -1$$

3. Feladat

Egy négytagú társaság a következő haditervet dolgozza ki arra, hogy mind a négyen feljussanak a tetőteraszra: ketten a (kétszemélyes) lifttel mennek egyszerre, ketten pedig egymás után a villámhárítón mászva jutnak fel. Hány különböző sorrendben érkezhetnek meg a tetőteraszra, ha feltesszük, hogy a liften utazó két személy egyszerre érkezik, de ezt leszámítva nincs egyidejű érkezés?

!	$\binom{6}{2}$	$\frac{5!}{3!}$	12	24	36	$\frac{5!}{3! \cdot 2!}$	60	120	egyik sem	!

3. Feladat

Egy négytagú társaság a következő haditervet dolgozza ki arra, hogy mind a négyen feljussanak a tetőteraszra: ketten a (kétszemélyes) lifttel mennek egyszerre, ketten pedig egymás után a villámhárítón mászva jutnak fel. Hány különböző sorrendben érkezhetnek meg a tetőteraszra, ha feltesszük, hogy a liften utazó két személy egyszerre érkezik, de ezt leszámítva nincs egyidejű érkezés?

!	$\binom{6}{2}$	$\frac{5!}{3!}$	12	24	36	$\frac{5!}{3!\cdot 2!}$	60	120	egyik sem	!

Megoldás.

- 3 különböző mozgó objektum van, ezek sorrendje 3! lehet

3. Feladat

Egy négytagú társaság a következő haditervet dolgozza ki arra, hogy mind a négyen feljussanak a tetőteraszra: ketten a (kétszemélyes) lifttel mennek egyszerre, ketten pedig egymás után a villámhárítón mászva jutnak fel. Hány különböző sorrendben érkezhetnek meg a tetőteraszra, ha feltesszük, hogy a liften utazó két személy egyszerre érkezik, de ezt leszámítva nincs egyidejű érkezés?

!	$\binom{6}{2}$	$\frac{5!}{3!}$	12	24	36	$\frac{5!}{3!\cdot 2!}$	60	120	egyik sem	!

Megoldás.

- 3 különböző mozgó objektum van, ezek sorrendje 3! lehet
- a liftben $\binom{4}{2}$-féleképpen lehetnek

3. Feladat

Egy négytagú társaság a következő haditervet dolgozza ki arra, hogy mind a négyen feljussanak a tetőteraszra: ketten a (kétszemélyes) lifttel mennek egyszerre, ketten pedig egymás után a villámhárítón mászva jutnak fel. Hány különböző sorrendben érkezhetnek meg a tetőteraszra, ha feltesszük, hogy a liften utazó két személy egyszerre érkezik, de ezt leszámítva nincs egyidejű érkezés?

!	$\binom{6}{2}$	$\frac{5!}{3!}$	12	24	36	$\frac{5!}{3!\cdot 2!}$	60	120	egyik sem	!

Megoldás.

- 3 különböző mozgó objektum van, ezek sorrendje 3! lehet
- a liftben $\binom{4}{2}$-féleképpen lehetnek
- Válasz: $\binom{4}{2} \cdot 3!$

4. Feladat

A kisállatkereskedőnél háromfajta díszhalat árulnak — mindegyikből van bőven. Hányféleképpen vásárolhatunk egyidejűleg négy halat az akváriumba? (Az „egyidejűség" miatt a sorrend nem számít, és nyilván egyformákat is vehetünk.)

!	3^4	4^3	$4!$	$\binom{4}{3}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{3}$	egyik sem	!

4. Feladat

A kisállatkereskedőnél háromfajta díszhalat árulnak — mindegyikből van bőven. Hányféleképpen vásárolhatunk egyidejűleg négy halat az akváriumba? (Az „egyidejűség” miatt a sorrend nem számít, és nyilván egyformákat is vehetünk.)

!	3^4	4^3	$4!$	$\binom{4}{3}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{3}$	egyik sem	!

Megoldás.
A három különböző elemből kell kiválasztani 4-et, azaz ismétléses kombináció.

4. Feladat

A kisállatkereskedőnél háromfajta díszhalat árulnak — mindegyikből van bőven. Hányféleképpen vásárolhatunk egyidejűleg négy halat az akváriumba? (Az „egyidejűség” miatt a sorrend nem számít, és nyilván egyformákat is vehetünk.)

!	3^4	4^3	$4!$	$\binom{4}{3}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{3}$	egyik sem	!

Megoldás.

A három különböző elemből kell kiválasztani 4-et, azaz ismétléses kombináció.

$$\binom{3+4-1}{4}$$

5. Feladat

A mobiltelefon memóriájában egy 2^{16} bájt méretű terület szolgál a ki- és bemenő hívások naplózására. Minden egyes üzenet naplózásához pontosan 17 bájt szükséges. Tegyük fel hogy a memóriát csakis erre a célra használjuk és sose töröljük. Amikor sok-sok hívás után további naplózás nem lehetséges, hány kihasználatlan bájt marad a memóriában? (Másként fogalmazva: mi lesz a maradék, ha a 2^{16} számot elosztjuk tizenhéttel?)

!	0	1	2	8	9	10	15	16	egyik sem	!

5. Feladat

A mobiltelefon memóriájában egy 2^{16} bájt méretű terület szolgál a ki- és bemenő hívások naplózására. Minden egyes üzenet naplózásához pontosan 17 bájt szükséges. Tegyük fel hogy a memóriát csakis erre a célra használjuk és sose töröljük. Amikor sok-sok hívás után további naplózás nem lehetséges, hány kihasználatlan bájt marad a memóriában? (Másként fogalmazva: mi lesz a maradék, ha a 2^{16} számot elosztjuk tizenhéttel?)

!	0	1	2	8	9	10	15	16	egyik sem	!

Megoldás.

- $2^{16} \equiv x \pmod{17}$

5. Feladat

A mobiltelefon memóriájában egy 2^{16} bájt méretű terület szolgál a ki- és bemenő hívások naplózására. Minden egyes üzenet naplózásához pontosan 17 bájt szükséges. Tegyük fel hogy a memóriát csakis erre a célra használjuk és sose töröljük. Amikor sok-sok hívás után további naplózás nem lehetséges, hány kihasználatlan bájt marad a memóriában? (Másként fogalmazva: mi lesz a maradék, ha a 2^{16} számot elosztjuk tizenhéttel?)

!	0	1	2	8	9	10	15	16	egyik sem	!

Megoldás.

- $2^{16} \equiv x \pmod{17}$
- Euler-tétel: ha $\text{lnko}(a, n) = 1$, akkor $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

5. Feladat

A mobiltelefon memóriájában egy 2^{16} bájt méretű terület szolgál a ki- és bemenő hívások naplózására. Minden egyes üzenet naplózásához pontosan 17 bájt szükséges. Tegyük fel hogy a memóriát csakis erre a célra használjuk és sose töröljük. Amikor sok-sok hívás után további naplózás nem lehetséges, hány kihasználatlan bájt marad a memóriában? (Másként fogalmazva: mi lesz a maradék, ha a 2^{16} számot elosztjuk tizenhéttel?)

!	0	1	2	8	9	10	15	16	egyik sem	!

Megoldás.

- $2^{16} \equiv x \pmod{17}$
- Euler-tétel: ha $\text{lnko}(a, n) = 1$, akkor $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.
- $\text{lnko}(2, 17) = 1$

5. Feladat

A mobiltelefon memóriájában egy 2^{16} bájt méretű terület szolgál a ki- és bemenő hívások naplózására. Minden egyes üzenet naplózásához pontosan 17 bájt szükséges. Tegyük fel hogy a memóriát csakis erre a célra használjuk és sose töröljük. Amikor sok-sok hívás után további naplózás nem lehetséges, hány kihasználatlan bájt marad a memóriában? (Másként fogalmazva: mi lesz a maradék, ha a 2^{16} számot elosztjuk tizenhéttel?)

!	0	1	2	8	9	10	15	16	egyik sem	!

Megoldás.

- $2^{16} \equiv x \pmod{17}$
- Euler-tétel: ha $\text{lnko}(a, n) = 1$, akkor $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.
- $\text{lnko}(2, 17) = 1$
- $\varphi(17) = 16$

5. Feladat

A mobiltelefon memóriájában egy 2^{16} bájt méretű terület szolgál a ki- és bemenő hívások naplózására. Minden egyes üzenet naplózásához pontosan 17 bájt szükséges. Tegyük fel hogy a memóriát csakis erre a célra használjuk és sose töröljük. Amikor sok-sok hívás után további naplózás nem lehetséges, hány kihasználatlan bájt marad a memóriában? (Másként fogalmazva: mi lesz a maradék, ha a 2^{16} számot elosztjuk tizenhéttel?)

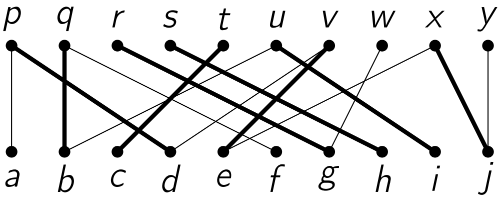
!	0	1	2	8	9	10	15	16	egyik sem	!

Megoldás.

- $2^{16} \equiv x \pmod{17}$
- Euler-tétel: ha $\text{lnko}(a, n) = 1$, akkor $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.
- $\text{lnko}(2, 17) = 1$
- $\varphi(17) = 16$
- $2^{16} \equiv 1 \pmod{17}$

6. Feladat

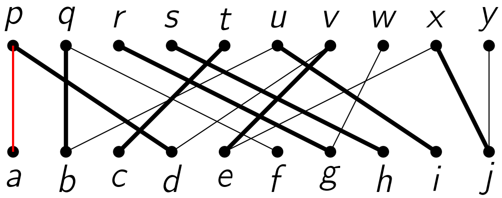
Magyar módszerrel keresünk maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. (A gráfot két példányban is lerajzoltuk, hogy legyen min dolgozni, számolni.) A $\{bq, ct, dp, ev, gr, hs, iu, jx\}$ párosításig (azaz a vastag élek halmazáig) jutottunk. A téglalapban felsorolt élek közül melyek lesznek benne szükségképpen a magyar módszer következő lépése által szolgáltatott párosításban?



?	bq	iu	dp	ex	jx	egyik sem	?

6. Feladat

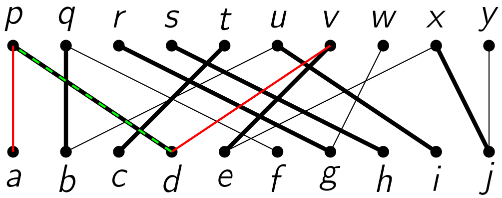
Magyar módszerrel keresünk maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. (A gráfot két példányban is lerajzoltuk, hogy legyen min dolgozni, számolni.) A $\{bq, ct, dp, ev, gr, hs, iu, jx\}$ párosításig (azaz a vastag élek halmazáig) jutottunk. A téglalapban felsorolt élek közül melyek lesznek benne szükségképpen a magyar módszer következő lépése által szolgáltatott párosításban?



?	*bq*	*iu*	*dp*	*ex*	*jx*	egyik sem	?

6. Feladat

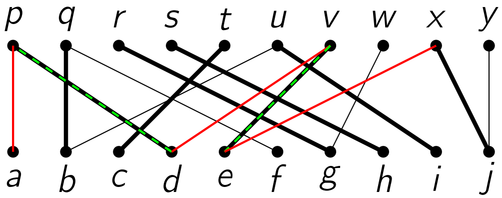
Magyar módszerrel keresünk maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. (A gráfot két példányban is lerajzoltuk, hogy legyen min dolgozni, számolni.) A $\{bq, ct, dp, ev, gr, hs, iu, jx\}$ párosításig (azaz a vastag élek halmazáig) jutottunk. A téglalapban felsorolt élek közül melyek lesznek benne szükségképpen a magyar módszer következő lépése által szolgáltatott párosításban?



?	*bq*	*iu*	*dp*	*ex*	*jx*	egyik sem	?

6. Feladat

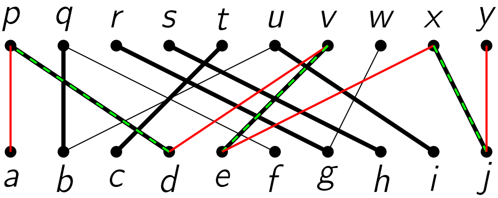
Magyar módszerrel keresünk maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. (A gráfot két példányban is lerajzoltuk, hogy legyen min dolgozni, számolni.) A $\{bq, ct, dp, ev, gr, hs, iu, jx\}$ párosításig (azaz a vastag élek halmazáig) jutottunk. A téglalapban felsorolt élek közül melyek lesznek benne szükségképpen a magyar módszer következő lépése által szolgáltatott párosításban?



?	bq	iu	dp	ex	jx	egyik sem	?

6. Feladat

Magyar módszerrel keresünk maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. (A gráfot két példányban is lerajzoltuk, hogy legyen min dolgozni, számolni.) A $\{bq, ct, dp, ev, gr, hs, iu, jx\}$ párosításig (azaz a vastag élek halmazáig) jutottunk. A téglalapban felsorolt élek közül melyek lesznek benne szükségképpen a magyar módszer következő lépése által szolgáltatott párosításban?



?	*bq*	*iu*	*dp*	*ex*	*jx*	egyik sem	?

7. Feladat

Melyek a szükségképpen igazak az alábbi kijelentések közül?
(Útmutató: a φ értékeit érdemes kiszámolni.)

- $\varphi(10^2) = 2 \times \varphi(10)$, ahol φ az Euler-féle φ függvény. hamis
- $\varphi(10^2) = \varphi(10)^2$, ahol φ az Euler-féle φ függvény. hamis
- Gyűrű additív egységeleme egyúttal multiplikatív zéruselem. igaz
- Ha egy algebra test, akkor gyűrű is. igaz

7. Feladat

Melyek a szükségképpen igazak az alábbi kijelentések közül?
(Útmutató: a φ értékeit érdemes kiszámolni.)

- $\varphi(10^2) = 2 \times \varphi(10)$, ahol φ az Euler-féle φ függvény. hamis
- $\varphi(10^2) = \varphi(10)^2$, ahol φ az Euler-féle φ függvény. hamis
- Gyűrű additív egységeleme egyúttal multiplikatív zéruselem. igaz
- Ha egy algebra test, akkor gyűrű is. igaz

Megoldás.

- Hamis: $\varphi(10) = 4$, $\varphi(100) = 40$

7. Feladat

Melyek a szükségképpen igazak az alábbi kijelentések közül? (Útmutató: a φ értékeit érdemes kiszámolni.)

- $\varphi(10^2) = 2 \times \varphi(10)$, ahol φ az Euler-féle φ függvény. hamis
- $\varphi(10^2) = \varphi(10)^2$, ahol φ az Euler-féle φ függvény. hamis
- Gyűrű additív egységeleme egyúttal multiplikatív zéruselem. igaz
- Ha egy algebra test, akkor gyűrű is. igaz

Megoldás.

- Hamis: $\varphi(10) = 4$, $\varphi(100) = 40$
- Hamis

7. Feladat

Melyek a szükségképpen igazak az alábbi kijelentések közül? (Útmutató: a φ értékeit érdemes kiszámolni.)

- $\varphi(10^2) = 2 \times \varphi(10)$, ahol φ az Euler-féle φ függvény. hamis
- $\varphi(10^2) = \varphi(10)^2$, ahol φ az Euler-féle φ függvény. hamis
- Gyűrű additív egységeleme egyúttal multiplikatív zéruselem. igaz
- Ha egy algebra test, akkor gyűrű is. igaz

Megoldás.

- Hamis: $\varphi(10) = 4$, $\varphi(100) = 40$
- Hamis
- Igaz

7. Feladat

Melyek a szükségképpen igazak az alábbi kijelentések közül? (Útmutató: a φ értékeit érdemes kiszámolni.)

- $\varphi(10^2) = 2 \times \varphi(10)$, ahol φ az Euler-féle φ függvény. hamis
- $\varphi(10^2) = \varphi(10)^2$, ahol φ az Euler-féle φ függvény. hamis
- Gyűrű additív egységeleme egyúttal multiplikatív zéruselem. igaz
- Ha egy algebra test, akkor gyűrű is. igaz

Megoldás.

- Hamis: $\varphi(10) = 4$, $\varphi(100) = 40$
- Hamis
- Igaz
- Igaz

8. Feladat

A síkvektorok $(\mathbb{R}^2; +)$ additív csoportjában tekintsük az $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ normálosztót és a $b = (3, 4)$ elemet. A téglalapban felsoroltak közül melyek vannak benne a b elem S szerinti baloldali mellékosztályában?

?	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(4, 4)$	$(3, 4)$	$(4, 5)$	egyik sem	?

8. Feladat

A síkvektorok $(\mathbb{R}^2; +)$ additív csoportjában tekintsük az $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ normálosztót és a $b = (3, 4)$ elemet. A téglalapban felsoroltak közül melyek vannak benne a b elem S szerinti baloldali mellékosztályában?

?	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(4, 4)$	$(3, 4)$	$(4, 5)$	egyik sem	?

Megoldás.

$$\begin{aligned} (3,4) + S &= \{(3,4) + (x,x) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(3+x, 4+x) : x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

8. Feladat

A síkvektorok $(\mathbb{R}^2;+)$ additív csoportjában tekintsük az $S=\{(x,x):x\in\mathbb{R}\}$ normálosztót és a $b=(3,4)$ elemet. A téglalapban felsoroltak közül melyek vannak benne a b elem S szerinti baloldali mellékosztályában?

?	$(0,0)$	$(0,1)$	$(4,4)$	$(3,4)$	$(4,5)$	egyik sem	?

Megoldás.

$$\begin{aligned}(3,4)+S &= \{(3,4)+(x,x):x\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(3+x,4+x):x\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$$(0,1):\ x=-3,\quad (3,4):\ x=0,\quad (4,5):\ x=1$$

9. Feladat

Tekintsük az alábbi művelettáblázattal megadott $\mathcal{A} = (A; *)$ grupoidot. A téglalapban felsorolt állítások ezen grupoidra, illetve ezen $*$ műveletre értendők. Ikszeljük be a felsoroltak közül az igaz állításokat. (Itt $[X]$, illetve $[y]$ — a szokott módon — az X illetve $\{y\}$ részhalmaz által generált részalgebrát jelöli.)

$\mathcal{A}$

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	a	a
c	c	a	b	a
d	d	d	d	d

?	van zéruselem	kancellatív	$c \in [b]$	$d \in [\{b, c\}]$

egyik sem	?

10. Feladat

Tekintsük az előző feladatban művelettáblázattal megadott $\mathcal{A} = (A; *)$ grupoidot. Az alábbi téglalapban megadott osztályozások közül melyek azok, amelyekhez a grupoid kongruenciarelációi tartoznak?

?	$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$	$\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$	$\{\{a, b, c, d\}\}$

$\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$	egyik sem	?

10. Feladat

Tekintsük az előző feladatban műveletttáblázattal megadott $A = (A; *)$ grupoidot. Az alábbi téglalapban megadott osztályozások közül melyek azok, amelyekhez a grupoid kongruenciarelációi tartoznak?

?	$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$	$\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$	$\{\{a, b, c, d\}\}$ $\otimes$
$\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$	egyik sem	?	