Diszkrét matematika II. gyakorlat

Absztrakt algebra

Bogya Norbert

Bolyai Intézet

2014. április 23.

Műveletek

Definíció

Legyen A nemüres halmaz, $n \in \mathbb{N}_0$. Az $A^n \to A$ leképezéseket **műveletek**nek nevezzük.

- $\mathbb{Z}$ halmazon az összeadás (művelet)
- $\mathbb{R}^{n \times n}$ halmazon az inverzképzés (nem művelet)
- $\mathbb{Z}$ halmazon az osztás (nem művelet)
- $\mathbb{C}$ halmazon az szorzás (művelet)
- $\mathbb{R}^{n \times n}$ halmazon az összeadás (művelet)
- $\mathbb{R}^n$-ben a skaláris szorzás (nemművelet)
- Egy hatványhalmazon a metszet (művelet)
- $\mathbb{N}$ halmazon a kivonás (nem művelet)

Műveletek tulajdonságai

Az A halmazon értelmezett $\otimes$ művelet

- **asszociatív**, ha bármely $a, b, c \in A$ elemekre
$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c);$$
- **kommutatív**, ha bármely $a, b \in A$ elemekre
$$a \otimes b = b \otimes a;$$
- **kancellatív**, ha bármely $a, b, x, y \in A$ elemekre
$$(a \otimes x = a \otimes y) \Longrightarrow x = y \quad \text{és} \quad (x \otimes b = y \otimes b) \Longrightarrow x = y.$$

Az A halmazon értelmezett $\oplus$ művelet **disztributív** a $\triangle$ műveletre, ha bármely $a, b, c \in A$ elemekre
$$a \oplus (b \triangle c) = (a \oplus b) \triangle (a \oplus c) \quad \text{és} \quad (a \triangle b) \oplus c = (a \oplus c) \triangle (b \oplus c).$$

Algebrai struktúrák

Algebra

Az (A, F) párt algebrának nevezzük, ha A egy nemüres halmaz, F pedig A-n értelmezett műveletek egy halmaza.

Grupoid

A grupoid olyan algebra, melyben F egyetlen kétváltozós műveletből áll.

Legyen $(A, \cdot)$ egy grupoid.

- Az $e \in A$ elemet egységelemnek nevezzük, ha bármely $a \in A$ esetén
$$e \cdot a = a \cdot e = a.$$
- A $z \in A$ elemet zéruselemnek nevezzük, ha bármely $a \in A$ esetén
$$z \cdot a = a \cdot z = z.$$

Algebrai struktúrák

Algebra

Az (A, F) párt algebrának nevezzük, ha A egy nemüres halmaz, F pedig A-n értelmezett műveletek egy halmaza.

Grupoid

Olyan algebra, melyben F egyetlen *kétváltozós művelet*ből áll.

Félcsoport

Olyan grupoid, melyben a művelet *asszociatív*.

Monoid

Egységelemes félcsoport.

Legyen $(A, \cdot)$ egységelemes grupoid, az egységelem legyen e. A $b \in A$ elemet az $a \in A$ elem **inverz**ének nevezzük, ha

$$a \cdot b = b \cdot a = e.$$

Csoport

Olyan egységelemes félcsoport, melyben minden elemnek van *inverze*.

Abel-csoport

Olyan csoport, melyben a művelet *kommutatív*.

Gyűrű

Az $(R, +, \cdot)$ algebra gyűrű, ha

(1) $(R, +)$ Abel-csoport,

(2) $(R, \cdot)$ félcsoport és

(3) $\cdot$ disztributív a $+$ műveletre.

$(R, \cdot)$ egységelemes $\Longrightarrow$ egységelemes gyűrű
$(R, \cdot)$ kommutatív $\Longrightarrow$ kommutatív gyűrű

Test

Az $(R, +, \cdot)$ gyűrű test, ha

- $|R| \geq 2$,
- kommutatív,
- egységelemes és
- minden nemnulla elemének van inverze.

Összefoglaló

- Grupoid: $(A, \circ)$, $\circ$ kétváltozós
- Félcsoport: $\circ$ asszociatív
- Monoid: egységelemes félcsoport
- Csoport: monoid és inverz
- Abel-csoport: csoport és $\circ$ kommutatív
- Gyűrű: $(R, +, \cdot)$
  - $(R, +)$ Abel-csoport
  - $(R, \cdot)$ félcsoport
  - $\cdot$ disztributív a $+$ műveletre
- Test: $(R, +, \cdot)$ gyűrű
  - $|R| \geq 2$,
  - kommutatív
  - egységelemes
  - minden nemnulla elemének van inverze