

# GRÁFELMÉLET

Alapfogalmak, Euler-vonal, Hamilton-út. Fák, páros gráfok.  
Párosítás, lefogó ponthalmaz. Síkgráfok, gráfok színezése.

A gráfok az informatikában gyakran előforduló matematikai struktúrák. Az internet is felfogható egy gráfként, de akár egy adott épület villamos hálózata is. Az emberek közötti ismertségek is kezelhetők gráfként (Facebook). A GPS is gráfként kezeli a térképeket, és gráfelméleti algoritmusok használatával állítja elő az útvonalat. A kémiai molekulák is vizsgálhatók gráfként, mint az atomok és a köztük lévő kötések megjelenítése.

## 1. Alapfogalmak

**1. Definíció (Gráf).** A  $G = (V, E, I)$  hármast **gráfnak** nevezzük, ha  $V$  és  $E$  két halmaz,  $I \subseteq V \times E$  egy leképezés közöttük, továbbá minden  $e \in E$  esetén a  $V_e = \{v \in V : (v, e) \in I\}$  halmaz elemszáma 1 vagy 2. A  $V$  halmaz elemeit a gráf csúcsainak, az  $E$  halmaz elemeit a gráf éleinek nevezzük.

A fenti definíció elég absztraktnak tűnik annak, aki már látott gráfokat. A  $V$  jelöli a gráf csúcsainak halmazát, az  $E$  pedig az éleinek halmazát. Az  $I$  leképezés mondja meg, hogy mely csúcsok és élek állnak kapcsolatban. A  $V_e$  halmaz az  $e$  él végpontjainak halmaza.

A továbbiakban a gráfoknál az illeszkedési relációt nem jelöljük, mindig feltételezzük, hogy van egy illeszkedési reláció a háttérben, amit ismerünk.

**2. Definíció.** Legyen adott egy  $G = (V, E)$  gráf. Egy  $e \in E$  élt **hurokélnek** nevezzük, ha a hozzá tartozó  $V_e$  halmaz 1-elemű.

**3. Definíció.** Legyen adott egy  $G = (V, E)$  gráf. Az  $e, f \in E$  éleket **párhuzamos éleknek** nevezzük, ha a hozzájuk tartozó  $V_e$  és  $V_f$  halmazok megegyeznek, azaz ugyanazok a végpontjaik.

A különböző alkalmazásokban többször előkerül az, hogy a gráf élein keresztül szeretnénk tenni egy „sétát”. Nyilván az éleken történő „séta” közben csúcsokon és éleken haladunk át, így különböző sétákat különböztetünk meg attól függően, hogy mikén nem akarunk többször is keresztül menni.

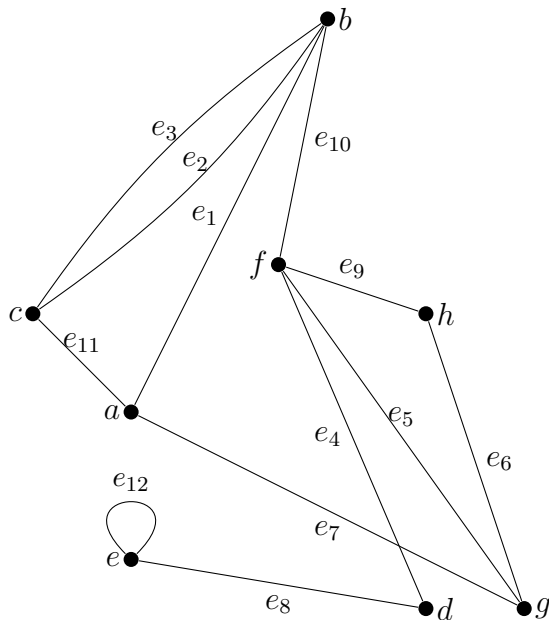
**4. Definíció (Séta).** Legyen  $G = (V, E)$  egy gráf. Egy  $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$  sorozatot **sétának** nevezzük, ha  $v_0, v_1, \dots, v_k$  sorozat  $V$ -beli csúcsok egy sorozata, és az  $e_i \in E$  élek végpontjai  $v_{i-1}$  és  $v_i$  minden  $i \in \{1, \dots, k\}$  esetén. Ha  $v_0 = v_k$ , akkor **zárt sétáról** beszélünk. A  $k$  számot a séta **hosszának** nevezzük.

**5. Definíció** (Vonal). Ha egy séta élsorozatában nincs ismétlődés, akkor a sétát **vonalnak**, illetve **zárt vonalnak** nevezzük.

**6. Definíció** (Út). Ha egy séta csúcssorozatában nincs ismétlődés, akkor a sétát **útnak**, illetve **körnek** nevezzük. (Kör esetén természetesen az első és az utolsó csúcsnak meg kell egyeznie, az ismétlődés tilalma ezekre nem vonatkozik.)

**7. Megjegyzés.** Ha nincs egy sétában csúcsismétlés, akkor garantáltan nincs élismétlés sem. Tehát egy út egyben vonal is.

**8. Példa.**



$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\},$$

$$I = \{(a, e_1), (b, e_1), (b, e_2), (c, e_2), (b, e_3), (c, e_3), (d, e_4), (f, e_4), (f, e_5), (g, e_5), (g, e_6), (h, e_6), (a, e_7), (g, e_7), (e, e_8), (d, e_8), (f, e_9), (h, e_9), (b, e_{10}), (f, e_{10}), (a, e_{11}), (c, e_{11}), (e, e_{12})\}$$

$h, e_9, f, e_4, d, e_8, e, e_{12}, e, e_{12}, e, e_8, d, e_4, f, e_{10}, b, e_3, c, e_2, b$  egy 10 hosszú séta.

$a, e_1, b, e_{10}, f, e_5, g, e_7, a$  egy 4 hosszú zárt séta.

$g, e_7, a, e_1, b, e_3, c$  egy 3 hosszú út.

$f, e_5, g, e_6, h, e_9, f$  egy 3-hosszú kör.

**9. Definíció** (Fokszám). A  $G = (V, E)$  gráf egy  $v \in V$  csúcsának **fokszámának** nevezzük a csúcsra illeszkedő nem hurokélek számának és a csúcsra illeszkedő hurokélek számának kétszeresének az összegét. A  $v$  csúcs fokszámát  $d(v)$ -vel jelöljük.

**10. Példa.** A 8. Példa gráfját tekintve:  $d(c) = 3$ ,  $d(e) = 3$  és  $d(f) = 4$ .

A fokszám definíciójából azonnal következik az alábbi tétel.

**11. Tétel.** Egy  $G = (V, E)$  gráf esetén a csúcsok fokszámainak összege megegyezik az élek számának kétszeresével, azaz

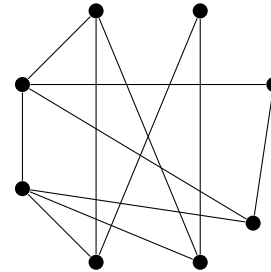
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

**12. Definíció.** A  $G$  gráf egy  $v$  csúcsát **izolált csúcsnak** nevezzük, ha  $v$  fokszáma nulla.

**13. Definíció.** Egy gráfot  $d$ -**reguláris**nak nevezünk, ha minden csúcsának fokszáma  $d$ . Egy gráfot regulárisnak nevezünk, ha valamilyen  $d$ -re reguláris.

**14. Definíció.** Egy  $n$ -csúcsú gráf összes csúcsán végigmenve  $n$  darab fokszámot kapunk. Ezeket monoton növekvő sorrendbe rakva kapjuk a gráf **fokszámsorozatát**.

**15. Példa.** A 8. Példa gráfjának fokszámsorozata 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4. Természetesen egy fokszámsorozathoz több (nem izomorf) gráf is tartozhat. Algoritmikusan megadható olyan egyszerű gráf, melynek ugyanez a fokszámsorozata. Egy ilyen látható a jobb oldali ábrán.



**16. Tétel.** Pontosan akkor adható meg egy gráf, melynek  $d_1, d_2, \dots, d_n$  a fokszámsorozata, ha  $\sum_{i=1}^n d_i$  páros.

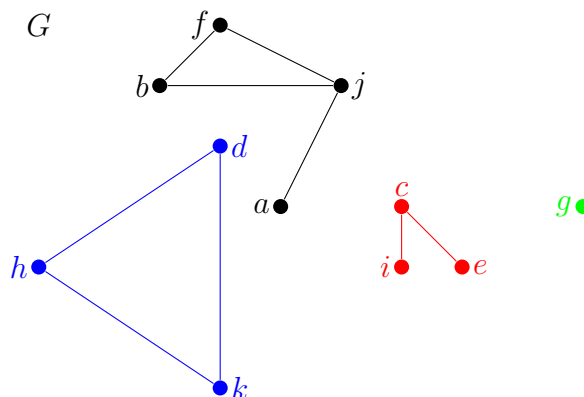
**17. Állítás.** Ha egy gráf fokszámsorozata  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , akkor a páratlan  $d_i$ -k száma páros.

**18. Definíció.** Egy gráf **összefüggő**, ha bármely két pontja között van út. (A nulla hosszú utat is megengedjük, tehát egyetlen izolált pont is összefüggő.)

**19. Tétel.** Legyen  $G = (V, E)$  egy tetszőleges gráf. Ekkor a gráf  $V$  csúcshalmazának létezik olyan  $V_1, V_2, \dots, V_n$  osztályozása, hogy a különböző  $V_i$ -k között nincs él, illetve  $G$  gráf mindegyik  $V_i$  csúcshalmazra külön-külön összefüggő.

**20. Definíció.** Az előző tételben szereplő  $V_i$ -khez tartozó gráfokat az eredeti gráf összefüggőségi **komponenseinek** nevezzük.

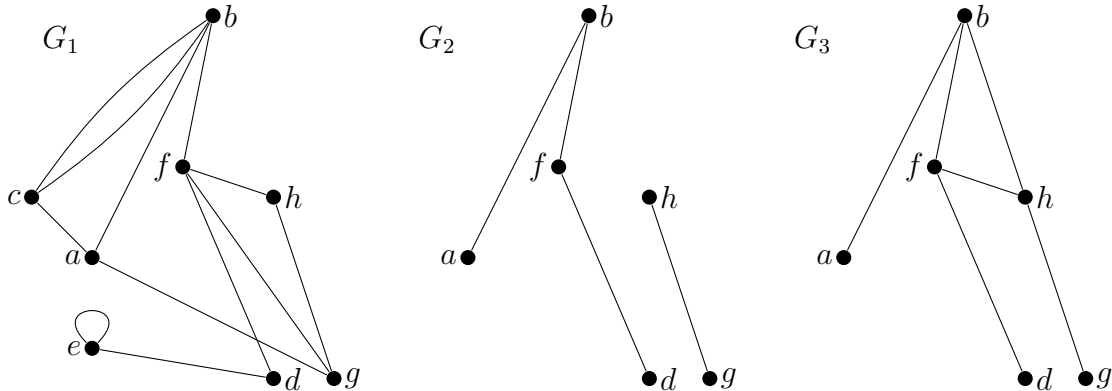
**21. Példa.**



A fenti  $G$  gráfnak 4 összefüggőségi komponense van, ezek különböző színnel vannak jelölve a gráfban.

**22. Definíció.** Egy  $G = (V, E)$  gráfnak a  $H = (V', E')$  gráf egy **részgráfja**, ha  $V' \subseteq V$  és  $E' \subseteq E$ . Azaz a  $H$  gráf minden csúcsa a  $G$  gráf csúcsai közül kerül ki, és ha  $H$ -ban két pont össze van kötve, akkor az a két pont a  $G$ -ben is össze van kötve.

**23. Példa.**



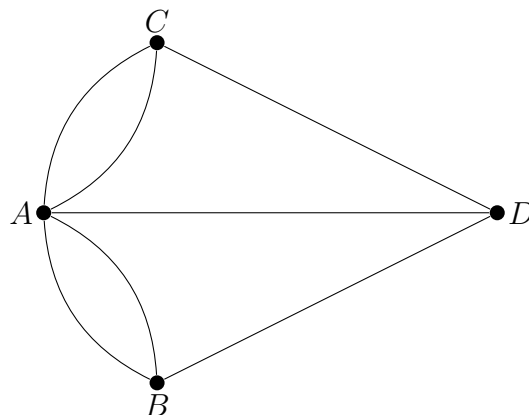
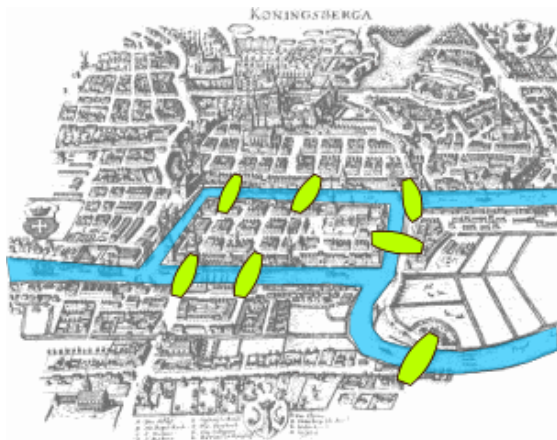
Például a fenti  $G_2$  gráf részgráfja a  $G_1$  gráfnak, viszont a  $G_3$  nem részgráfja.

A különböző alkalmazások során a hurokélek és a többszörös élek elveszthetik jelentőségüket. Például városok közötti útvonaltervezésnél nincsenek hurokélek, vagy a Facebook ismertségi grájában sincsenek se hurokélek, se párhuzamos élek. (Ez azt jelenti, hogy nem szoktuk feltüntetni, hogy Anna ismeri saját magát, illetve ha ismeri Ádámot, akkor azt csak egyféleképpen ismeri.) Ez indokolhatja, hogy olyan gráfokat vizsgáljunk, melyekben nincsenek ilyen „különleges élek”.

**24. Definíció** (Egyszerű gráf). Azokat a gráfokat, melyekben nincs hurokél és nincsenek párhuzamos élek, **egyszerű gráfoknak** nevezzük.

## 2. Speciális vonalak és utak

Nagyon régi az a probléma, hogy egy gráfot le tudunk-e rajzolni a ceruzánk felemelése nélkül. A probléma megoldása Euler nevéhez fűződik, aki a megoldotta a königsbergi hidak problémáját. A városlakók tették fel Eulernek a kérdést, hogy a városban lévő, Pregel folyón átívelő hét hídon át lehet-e úgy sétálni, hogy mindegyik hídon pontosan egyszer menjünk át, és ugyanoda érkezzünk, ahonnan elindultunk.



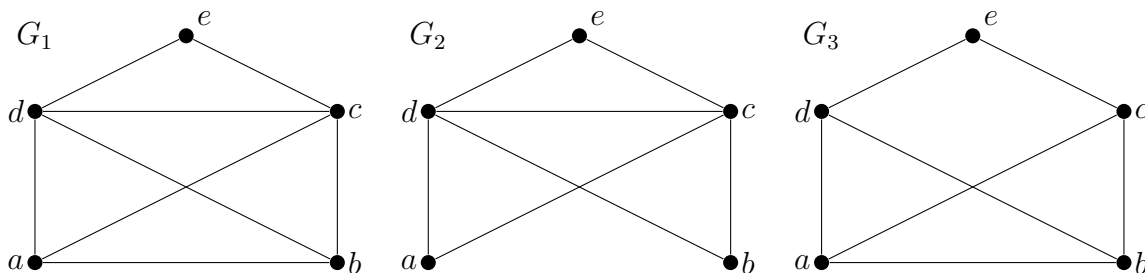
Euler 1736-ban megadta a választ, mely szerint nem lehet. A város ma Kalinyingrád néven ismert, és a világháborúban a hídjait lebombázták, így az eredeti probléma már elvesztette létjogosultságát, azonban ezt a problémát tartják a gráfelmélet első kérdésének.

**25. Definíció** (Euler-vonal). Egy olyan vonalat, mely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza, **Euler-vonálnak** nevezzük. Ha a vonal zárt, akkor **zárt Euler-vonálnak** nevezzük.

**26. Tétel.** Legyen  $G$  egy izolált pont nélküli gráf. Ekkor

- $G$ -ben pontosan akkor van zárt Euler-vonal, ha összefüggő, és minden foka páros,
- $G$ -ben pontosan akkor van Euler-vonal, ha összefüggő, és legfeljebb két darab páratlan fokú csúcsa van.

**27. Példa.**



A  $G_1$  fokszámsorozata 2, 3, 3, 4, 4, így ebben nincs zárt Euler-vonal, de Euler-vonal van, például az  $a, d, e, c, d, b, c, a, b$  vonal. A  $G_2$  fokszámsorozata 2, 2, 2, 4, 4, így ebben van zárt Euler-vonal, például az  $a, d, e, c, d, b, c, a$  vonal. A  $G_3$  fokszámsorozata 2, 3, 3, 3, 3, így ebben zárt és nyitott Euler-vonal sincs.

Természetesen adódik a kérdés, hogy az élek helyett mikor tudunk az összes ponton átmenni. Hamilton talált ki egy táblajátékot, melyben gyakorlatilag egy gráf összes csúcsán kellett úgy végigmenni, méghozzá pontosan egyszer. Az ő munkásságának tiszteletére nevezték el az ilyen utakat Hamilton-útnak.

**28. Definíció** (Hamilton-út, Hamilton-kör). Ha egy gráfban egy út minden csúcson átmegy, akkor azt **Hamilton-útnak** nevezzük. Ha egy gráfban egy kör minden csúcson átmegy, akkor **Hamilton-körnek** nevezzük.

Az Euler-vonal létezéséhez kapcsolódó tétel egy nagyon egyszerű karakterizációs tétel volt. Sőt, gyors algoritmus adható, ami Euler vonalat és kört ad meg outputként. Ezzel szemben a Hamilton-út és kör esetén nincs se karakterizációs tétel, se hatékony algoritmus. Ismeretes néhány tétel, mely bizonyos gráfok esetén működik, ezek közül mi csak egyet említünk meg.

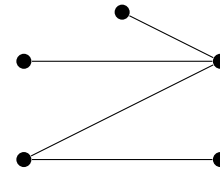
**29. Tétel** (Dirac tétele). *Ha egy egyszerű gráf minden csúcsának foka legalább akkora, mint a csúcsszám fele, akkor van benne Hamilton-út.*

*Ha egy egyszerű gráf minden csúcsának foka legalább akkora, mint a csúcsszám fele, és van legalább 3 csúcsa, akkor van benne Hamilton-kör.*

### 3. Fák

A fák egy speciális tulajdonságú gráfcsalád. Egy fa több szempontból is extrémis értéket képvisel a gráfok között, már a definíciójuk is ezzel tehető meg.

**30. Definíció.** Egy  $G$  gráfot **fának** nevezünk, ha összefüggő, és minden élére igaz, hogy elhagyása után már nem összefüggő gráfot kapunk.



**31. Definíció.** Egy gráfot **minimálisan összefüggőnek** nevezünk, ha összefüggő, de bármely élét elhagyva már nem összefüggő.

**32. Definíció.** Egy gráfot **maximális körmentesnek** nevezünk, ha nincs benne kör, de bármely új élt hozzávéve már lenne benne.

**33. Tétel** (Fák ekvivalens jellemzései). *Legyen  $G$  egy  $n$  csúcsú egyszerű gráf. Ekkor a következők ekvivalensek.*

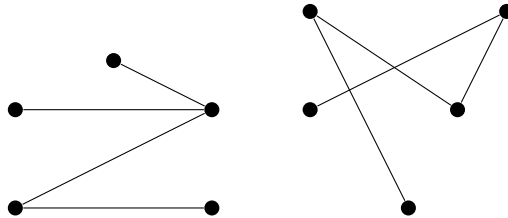
- $A$   $G$  gráf fa.
- $A$   $G$  gráf minimálisan összefüggő.
- $A$   $G$  gráf maximális körmentes.
- $A$   $G$  gráf összefüggő, és eggyel kevesebb éle van, mint csúcsa.
- $A$   $G$  gráf körmentes, és eggyel kevesebb éle van, mint csúcsa.

**34. Megjegyzés.** Egy adott  $n$  esetén az  $n$ -csúcs gráfok között egy  $n$ -csúcsú fa a legkevesebb élt tartalmazó gráf.

**35. Tétel.** *Véges, egynél több csúcsszámú fában legalább két elsőfokú csúcs van.*

**36. Definíció** (Erdő). Egy körmentes gráfot **erdőnek** nevezünk.

**37. Példa.** Az alábbi gráf egy erdő.



**38. Megjegyzés.** Az erdő úgy is felfogható, mint fák csúcdiszjunkt egyesítése.

## 4. Gráfparaméterek

**39. Definíció** (Párosítás). Legyen  $G = (V, E)$  egy gráf. Két  $E$ -beli élt **függetlennek** vagy **idegennek** nevezünk, ha a végpontjaik négy különböző csúcsot adnak. Független éleknek egy  $M$  halmazát **párosításnak** nevezzük. Ha az  $M$  párosítás a  $G$  összes csúcsát lefedi, akkor **teljes párosításnak** nevezzük. A  $G$  gráfban a maximális méretű párosítás elemszámát  $\nu(G)$ -vel jelöljük, azaz

$$\nu(G) = \max\{|M| : M \text{ párosítás } G\text{-ben}\}.$$

**40. Definíció** (Lefogó ponthalmaz). Legyen  $G = (V, E)$  egy gráf. A  $G$  gráf pontjainak egy  $S$  halmazát **lefogó ponthalmaznak** nevezzük, ha  $G$  minden élének legalább az egyik végpontja  $S$ -ben van. A  $G$  gráfban a minimális méretű lefogó ponthalmaz elemszámát  $\tau(G)$ -vel jelöljük, azaz

$$\tau(G) = \min\{|S| : S \text{ lefogó ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$$

**41. Állítás.** Tetszőleges  $G$  gráfra  $\nu(G) \leq \tau(G)$ .

**42. Definíció.** Egy egyszerű gráfot  **$k$ -színezhetőnek** nevezünk, ha a csúcsai kiszínezhetők  $k$  darab színnel úgy, hogy bármely élének a végpontjai különböző színűek. A  $G$  gráf kromatikus számának nevezzük azt a legkisebb  $k$  számot, mellyel a gráf  $k$ -színezhető. A  $G$  kromatikus számát  $\chi(G)$ -vel jelöljük.

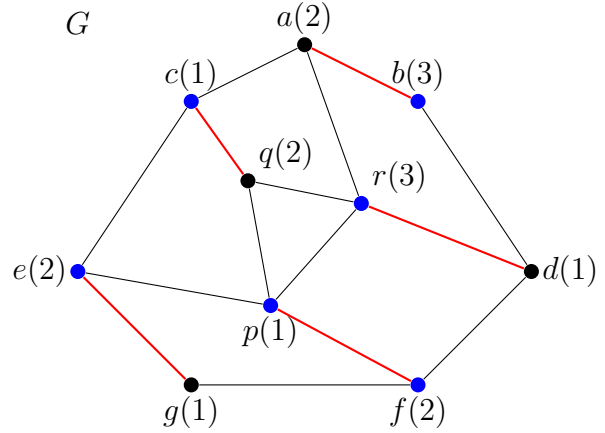
### 43. Példa.

A jobb oldali  $G$  gráfban piros élek párosítást, a kék csúcsok pedig lefogó pontthalmazt alkotnak. A csúcsok neve melletti számok a gráfok egy jó 3-színezését jelölik, a felhasznált színek: 1, 2, 3. A megadott párosítás miatt tudjuk, hogy  $5 \leq \nu(G)$ . Viszont  $\nu(G) < 6$ , mert 6 független élhez már 12 csúcsra lenne szükség, de csak 10 csúcsa van. Ebből következik, hogy  $\nu(G) = 5$ , tehát a pirossal megjelölt  $\{ab, cq, dr, pf, eg\}$  párosítás maximális.

A megadott lefogó pontthalmaz miatt,  $\tau(G) \leq 6$ . Azonban  $6 \leq \tau(G)$  is teljesül, mert van gráfban két csúcsdiszjunkt kör:

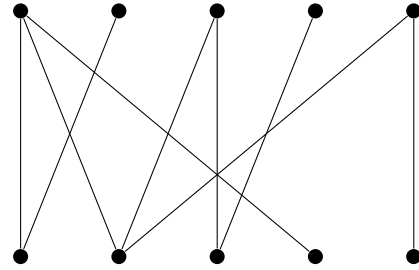
$p, q, r, p$  és  $a, b, d, f, g, e, c, a$ . A 3 hosszú kör lefogásához legalább 2 csúcs, a 7 hosszú kör lefogásához legalább 4 csúcs szükséges. Tehát  $\tau(G) = 6$ .

A megadott 3-színezés jó, tehát  $\chi(G) \leq 3$ . Viszont 2 színnel nem tudjuk jól színezni, mert a gráf tartalmaz páratlan kört, például a  $p, q, r$  háromszöget. Tehát  $\chi(G) = 3$ .



## 5. Páros gráfok

**44. Definíció** (Páros gráf). Egy  $G = (V, E)$  gráfot **páros gráfnak** nevezünk, ha a csúcsai olyan  $A$  és  $F$  diszjunkt halmazba osztályozhatók, hogy minden  $E$ -beli él egyik végpontja  $A$ -ban, a másik pedig  $F$ -ben van. Az  $A$  és  $F$  halmazokat a páros gráf két **színosztályának** nevezzük.



**45. Tétel.** A  $G$  gráf pontosan akkor páros gráf, ha nincs benne páratlan hosszú kör.

**46. Tétel.** Ha a  $G$  páros gráfban van teljes párosítás, akkor a két csúcsosztály elemszáma megegyezik.

**47. Tétel** (Kőnig-tétel). Ha  $G$  egy véges páros gráf, akkor  $\nu(G) = \tau(G)$ .

**48. Definíció.** Legyen  $M$  egy tetszőleges párosítás  $G$ -ben. A  $v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$  utat  $M$ -re vonatkozó **javító alternáló útnak** nevezzük, ha  $v_0$  és  $v_k$  nem illeszkedik egyetlen  $M$ -beli élre sem,  $k$  páratlan, továbbá  $e_2, e_4, \dots, e_{k-1} \in M$  (és így  $e_1, e_3, \dots, e_k \notin M$ ).

**49. Állítás.** Legyen  $G$  egy gráf és benne  $M$  egy párosítás. Ha létezik  $P: e_1, e_2, \dots, e_k$  javító alternáló út  $M$ -re nézve, akkor  $M$  nem maximális elemszámú párosítás. Ekkor az  $M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M)$  párosítás nagyobb elemszámú  $M$ -nél. Azaz  $M'$  abban különbözik  $M$ -től, hogy elhagyjuk  $M$ -ből azokat az éleket, amelyek benne vannak a javító útban, és hozzáadjuk a javító út azon elemeit, melyek nincsenek  $M$ -ben.

**50. Tétel** (Berge tétele). Legyen  $G$  egy gráf és  $M$  egy nem optimális párosítás  $G$ -ben. Ekkor létezik  $M$ -re vonatkozó javító alternáló út.

**51. Algoritmus** (Maximális párosítás keresése javító alternáló utak segítségével).

*Input:*  $G$  gráf.

*Kiinduló lépés:* legyen  $M$  egy tetszőleges párosítás.

*Általános lépés:* keresünk  $M$ -re vonatkozóan javító utat.

- Ha találunk, akkor a 49. Állításban leírt módon az  $M$  párosítást lecseréljük, és újra futtatjuk az általános lépést.
- Ha nem találunk javító utat, akkor  $M$  maximális elemszámú párosítás.

**52. Megjegyzés.** A fent leírt algoritmus tetszőleges gráfokra működik. Az egyetlen problémát az jelenti, hogyan keressünk a gráfokban javító alternáló utat. König Dénes és Egerváry Jenő megadtak egy algoritmust arra az esetre, amikor az input  $G$  gráf páros. Az ő tiszteletükre nevezték el az algoritmust magyar módszernek (Hungarian method).

**53. Definíció.** Egy  $X \subseteq V$  csúcshalmaz **szomszédságát**  $N(X)$ -szel jelöljük, és olyan csúcsokat sorolunk az  $N(X)$  halmazba, melyek valamelyik  $X$  halmazbeli csúccsal össze vannak kötve éllel.

**54. Tétel** (König–Hall-tétel). Legyen  $G$  egy páros gráf  $A, F$  csúcsosztályokkal. Pontosan akkor létezik  $A$ -t lefedő párosítás, ha bármely  $X \subseteq A$  csúcshalmazra  $|N(X)| \geq |X|$ .

**55. Tétel.** Legyen  $G$  egy páros gráf  $A, B$  csúcsosztályokkal. Pontosan akkor létezik teljes párosítás  $G$ -ben, ha  $|A| = |B|$  és bármely  $X \subseteq A$ -ra  $|N(X)| \geq |X|$ .

**56. Tétel.** Minden reguláris páros gráfban létezik teljes párosítás.

## 6. Síkgráfok

**57. Definíció** (Síkgráf). Egy gráfot **síkgráfnak** nevezünk, ha lerajzolható a síkra úgy, hogy az élei (amik esetleg görbe vonalak) csak csúcsoknál találkoznak, nem metszik egymást belső pontban. Egy síkgráf élei által határolt területeket a síkgráf **tartományainak** nevezzük. (A sík helyett tetszőleges felülettel lehetne dolgozni, így értelmese van például gömbre vagy tóruszra való lerajzolásról beszélni.)

**58. Tétel** (Euler-tétel). *Legyen  $G$  egy olyan síkgráf, melynek  $n$  csúcsa,  $e$  éle és  $t$  tartománya van. Ekkor  $n + t = e + 2$ .*

**59. Definíció** (Topologikus részgráf). Ha a  $T$  gráfot úgy kapjuk egy  $G$  gráfból, hogy

- $G$  néhány csúcsát (a hozzá kapcsolódó élekkel együtt) elhagyjuk,
- $G$  néhány élt elhagyjuk,
- $G$  egy 2-fokú csúcsát elhagyjuk, és a rajta lévő két élt egybe kapcsoljuk vagy
- az előzőeket véges sokszor alkalmazzuk egymás után,

akkor a  $T$  gráfot a  $G$  gráf **topologikus részgráfjának** nevezzük.

**60. Tétel** (Kuratowszki-tétel). *A  $G$  gráf pontosan akkor síkgráf, ha a  $K_5$  és  $K_{3,3}$  nem topologikus részgráfja.*

**61. Tétel** (Négyszíntétel). *Minden egyszerű  $G$  síkgráf esetén  $\chi(G) \leq 4$ .*