

KOMBINATORIKA

Variáció, permutáció, kombináció. Binomiális tétel, szita formula.

1. Kombinatorikai alapfeladatok

A kombinatorikai alapfeladatok lényege az, hogy bizonyos elemeket sorba rendezünk, vagy néhányat kiválasztunk belőlük, és esetleg utána rendezzük sorba. Minden ilyen feladatnál fel lehet tenni a következő kérdéseket.

- Sorba kell-e rendezni az összes elemet? (Permutáció.)
- Ki kell-e választani közülük valamennyit? (Variáció vagy kombináció.)
- Az elemek különbözőek, vagy azonosak is vannak közöttük? (Ismétlés nélküli vagy ismétléses.)
- A kiválasztás után számít a sorrend vagy nem? (Variáció vagy kombináció.)

A következőkben a fenti felsorolás zárójelben lévő fogalmait fogjuk pontosan definiálni.

1.1. Variáció

1. Definíció. Egy n elemű halmaz elemeiből képezhető k -tagú (ismétlődést megengedő) sorozatot az n elem k -adosztályú (vagy k -tagú) **ismétléses variációjának** nevezzük.

2. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak az $1, 8, 7, 1, 10$ sorozat egy 5-öd osztályú ismétléses variációja.

3. Definíció. Egy n elemű halmaz elemiből képezhető k -tagú ismétlés nélküli sorozatot az n elem k -adosztályú (vagy k -tagú) **ismétlés nélküli variációjának**, vagy csak egyszerűen variációjának nevezzük. Ilyen csak akkor létezik, ha $k \leq n$.

4. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak a $3, 10, 7, 1, 2$ sorozat egy 5-öd osztályú variációja.

5. Megjegyzés. A fenti definíciók lényege, hogy n elemből kiválasztunk k darabot és utána sorba rendezzük. Ismétléses variációnál n darab különböző elemből akkor is ki tudunk választani k darabot, ha esetleg $k > n$. Nyilván az ismétlés nélküli esetben ez nem tehető meg, mert n darab különböző elemből legfeljebb n különböző darabot választhatunk ki.

Felmerül a kérdés, hogy hány különböző variációja és ismétléses variációja van egy n elemű halmaznak. Azaz n különböző elemből kiválasztva k darabot, majd ezeket sorba rendezve hány különböző sorozatot kaphatunk. Erre ad választ a következő két tétel.

6. Tétel. Legyen $n, k \in \mathbb{N}$. Ekkor n elem k -adosztályú ismétléses variációinak száma n^k .

7. Tétel. Legyen $n, k \in \mathbb{N}$ és $k \leq n$. Ekkor n elem k -adosztályú variációinak száma $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$.

8. *Megjegyzés.* Az előző tételben szereplő képletet úgy célszerű megjegyezni, hogy egy egyével csökkenő k -tényezős szorzatot képzünk.

9. Példa. Hányféleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt? (A magyar totón 14 meccs végeredményére lehet fogadni, és mindegyik meccs kimenetele háromféle lehet: 1, 0 vagy x .) A $\{0, 1, x\}$ halmaz elemeiből kell képeznünk egy $13 + 1$ hosszú sorozatot. Nyilván két meccs eredménye lehet ugyanaz is, ezért a fenti, ismétléses variációra vonatkozó képletet kell használnunk $n = 3$ és $k = 14$ adatokkal. Így 3^{14} -féleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt.

10. Példa. Egy tanácsban 10 ember ül, és ki akarják maguk között sorsolni, hogy ki legyen az igazgató és az igazgató helyettese. Hányféleképpen végződhet a sorsolás? Ismétlés nélküli variációról van szó $n = 10$ és $k = 2$ paraméterekkel. (A sorrend valóban számít a kisorsoltak között, mert nem mindegy, ki lesz az igazgató, és ki lesz a helyettese.) Tehát a sorsolás $10 \cdot 9$, azaz 90-féleképpen végződhet?

11. Példa. Hány különböző négybetűs szó képezhető a „SAJTÓ” szó betűiből? Az 5 különböző betű közül kell kiválasztani 4-et (a feladat nem mondja, hogy nem ismétlődhetnek), és ezeket kell sorbarendezni, tehát ismétléses variációt kell alkalmazni $n = 5$ és $k = 4$ paraméterekkel. Így 5^4 szó képezhető.

12. Példa. Egy kerékpárlakaton egy 4 számjegyből álló kombináció nyitja és zárja a zárszerkezetet. Elfelejtettük ezt a kombinációt. Legrosszabb esetben hány kombinációt kell végigpróbálni? Ismétléses variáció $n = 10$ és $k = 4$ paraméterekkel, mivel a 10 különböző számjegyből kell 4-et kiválasztani, és azokból sorozatot képezni. (A lakat az ismétlődő számjegyeket nem tiltja.) Így 10^4 kombináció lehetséges.

13. Példa. Egy bajnokságon 8 csapat indult. Hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón, ha sehol sem lehet holtverseny, és minden csapat csak egy darab helyezést érhet el. Ismétlés nélküli variációt kell alkalmazni, mert a 8 csapatból kell kiválasztani 3-at, őket sorba rendezni, mert a dobogón számít a sorrend, és az ismétlést a feladat szövege tiltja. Összesen $8 \cdot 7 \cdot 6$ sorrend lehetséges.

1.2. Permutáció

14. Definíció. Adott n különböző elem esetén azoknak egy sorba rendezését az n elem egy (ismétlés nélküli) **permutációjának** nevezzük.

15. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak a 8, 1, 2, 7, 10, 3 sorozat egy permutációja.

16. *Megjegyzés.* Középiskolában általában a permutációkat elkülönítve próbálják tanítani a variációktól, pedig észre kell vennünk, hogy a permutáció egy olyan variáció, ahol egy n elemű halmazból n elemet választunk ki, és ezeket rakjuk sorba. Tehát olyan, mint az ismétlés nélküli variáció $k = n$ paraméterekkel.

A permutációknak is létezik ismétléses változata, azonban ennek definiálásához vissza kell emlékeznünk a rendszer fogalmára. A rendszer a halmazhoz hasonló fogalom, annyi a különbség, hogy a rendszerben egy elemet többször is felsorolhatunk. Például az 1, 1, 3, 4, 6, 6, 7 egy 7-elemű rendszer. A rendszerek elemeit szándékosan nem tesszük kapcsos zárójelbe, mert azt halmazok esetén használjuk, és a rendszer nem halmaz.

17. Definíció. Egy n elemű rendszer elemeinek sorozatba rakását az n elem **ismétléses permutációjának** nevezzük.

18. Példa. A 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5 rendszernek a 4, 3, 5, 4, 5, 3, 4 sorozat egy ismétléses permutációja.

19. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$. Ekkor n elem ismétlés nélküli permutációinak száma $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 2 \cdot 1 = n!$ (ejtsd: n faktoriális). Megállapítás szerint $0! = 1! = 1$.

20. Tétel. Tekintsünk egy n elemű rendszert, melyben r különböző elem van, és minden különböző elemből $k_1, k_2, \dots, k_r$ darab van a rendszerben. Tehát $n = k_1 + k_2 + \dots + k_r$. Ekkor az n elem ismétléses permutációinak száma

$$\frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!}.$$

A k_i számokat az i -edik elem multiplicitásának nevezzük, ez mutatja, hogy az i -edik elemnek hány példánya van a rendszerben.

21. Példa. Hányféleképpen tudunk 6 különböző könyvet sorba rendezni a könyvespolcon? A válasz $6! = 720$.

22. Példa. Hány különböző 5-betűs szó készíthető az „ABLAK” szó betűiből, mindegyiket felhasználva? Azaz 5 elemet kell sorba rendezni, ám az elemek között vannak egyformák. Ekkor ismétléses permutációt használunk, a válasz $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

23. Példa. Hányféleképpen lehet egy 52 lapos póker-paklit megkeverni? A válasz $52!$, ami mellékesen egy 68 jegyű szám.

24. Példa. Hányféle különböző sorrendje van a „MATEMATIKA” szó betűinek? Azaz 10 elemet kell sorba rendezni, ám az elemek között vannak egyformák. Ekkor ismétléses permutációt használunk, a válasz $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151200$.

25. Példa. Hány 10 jegyű szám készíthető 6 darab kettes, 2 darab hetes és 2 darab hatos számjegyből, ha mindegyiket fel akarjuk használni? Ismétléses permutációról van szó, ahol a rendszer 10 elemű, azaz $n = 10$. Továbbá három darab különböző elem van a rendszerben: 2, 7, 6. Az ezekhez tartozó multiplicitások: $k_2 = 6$, $k_7 = 2$ és $k_6 = 2$. Tehát a válasz a kérdésre: $\frac{10!}{6! \cdot 2! \cdot 2!}$.

1.3. Kombináció

26. Definíció. Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazait az n elem k -adosztályú ismétlés nélküli **kombináció**inak nevezzük.

27. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak a $\{2, 7, 8\}$ halmaz egy 3-ad osztályú kombinációja.

28. *Megjegyzés.* Részhalmazok felsorolásánál az elemek sorrendje nem számít, mert halmazelméleti szempontból $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$.

Vegyük észre, hogy egy n -elemű halmaz k -elemű részhalmazának megadása azt jelenti, hogy n elemből kiválasztunk k darabot, és a fenti megjegyzés alapján ezen kiválasztásnál az elemek sorrendje nem számít.

29. Definíció. Egy n elemű halmaz k elemű részrendszereit az n elem k -adosztályú **ismétléses kombináció**inak nevezzük.

30. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak a 3, 7, 3, 1, 10, 1, 3 rendszer egy 7-ed osztályú ismétléses kombinációja.

31. *Megjegyzés.* Az előző definícióban a részrendszer képzése azt jelenti, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk a halmazból. Az elemek sorrendje most sem számít, mivel a rendszerben nem számít az elemek sorrendje.

32. Tétel. Legyen $k \leq n$. Ekkor n elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}.$$

33. Definíció. Az előző tételben szereplő $\binom{n}{k}$ kifejezést **binomiális együtthatónak** nevezzük.

34. Tétel. Az n elem k -adosztályú ismétléses kombinációinak száma

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

35. Példa. Hányféleképpen tudjuk kitölteni az ötöslottót? (Magyarországon 90 számból 5-öt kell megtippelni.) Mivel a sorsolás után a megjelölt számok sorrendje teljesen irreleváns, így a 90 számból 5 darab kiválasztásánál a sorrend nem számít. Tehát $\binom{90}{5}$ -féleképpen tölthető ki egy ötöslottószelvény.

36. Példa. Hányféleképpen osztható szét 100000 forintnyi jutalom 3 dolgozó között, ha mindenki csak 10000-rel osztható összeget kaphat? (Természetesen az is megengedett, hogy valaki nem kap semmit.) Ismétléses kombinációról van szó, mert minden tízezresre ki kell választani egy embert a három közül. Tehát 3-ból választunk 10 helyre, és egy-egy embert nyilván több ezreshez is ki kell választanunk, így a megoldás $\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10}$.

37. Példa. Hány olyan dominó van, amelynek mindkét felén a pontok száma 0-tól 6-ig terjed? Így 7 elemből kell kiválasztani 2-t, de egy elemet mindkét oldalra is kiválaszthatunk, azaz ismétléses kombinációt kell használni. Így $\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = 28$ dominó van, ami a feladat feltételének eleget tesz.

2. Binomiális tétel

Emlékezzünk vissza a középiskolában is tanult

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \text{ és} \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

azonosságokra. Mint ahogy az a következő tételből látható lesz, ez a 2-es és 3-as kitevő helyett általánosítható tetszőlegesen nagy egész kitevőre.

38. Tétel (Binomiális tétel). *Ha $n \in \mathbb{N}$, továbbá a és b valós számok, vagy valós határozatlanok, akkor*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

vagy rövidebben

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Azért, hogy lássuk, a binomiális tétel hogyan kapcsolódik a kombinatorikai problémákhoz, vizsgáljunk meg a jobboldali összegeben fellépő általános $\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$ tagot. Képzeljük el, hogy az n darab $(a+b)$ tényezőt elkezdjük összeszorozni egymással egyesével. Azokat a tagokat számoljuk, ahol i darab b -t, és $n-i$ darab a -t szorzunk össze. Hányféleképpen tehattük ezt meg? Pontosan annyféleképpen, ahányféleképpen az n darab $(a+b)$ tényezőből ki tudjuk választani az i darab b -t. Ez pedig pontosan $\binom{n}{i}$.

A binomiális együtthatókból felépíthető Pascal-háromszögből azonnal látszódnak a binomiális együtthatók legfontosabb tulajdonságai. Az alábbi ábrán látható a Pascal-háromszög első néhány sora, melyben az $\binom{n}{k}$ értékek vannak feltüntetve.

$n = 0, k = 0$	$\binom{0}{0}$	1
$n = 1, k = 0, 1$	$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$	1 1
$n = 2, k = 0, 1, 2$	$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$	1 2 1
$n = 3, k = 0, 1, 2, 3$	$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$	1 3 3 1
$n = 4, k = 0, 1, 2, 3, 4$	$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
$n = 5, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$	$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$	1 5 10 10 5 1

A binomiális együttható és a Pascal-háromszög legfontosabb tulajdonságait az alábbi tétel foglalja össze.

39. Tétel. Legyen $k, n \in \mathbb{N}_0$ és $k \leq n$. Ekkor érvényesek az alábbi összefüggések.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. (A háromszög két oldalán 1-esek állnak.)
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (A háromszög tengelyesen szimmetrikus.)
3. Ha $0 < k < n$, akkor $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. (A háromszögben bármelyik elem a felette lévő két elem összege, feltéve, hogy van felette két elem.)
4. Bármely $n \in \mathbb{N}_0$ -ra $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$. (A Pascal-háromszögben az i -edik sor összege 2^{i-1} .)

Természetesen adódik a kérdés, hogy a kitevő általánosítása után, tudjuk-e tovább általánosítani a problémát, mondjuk a változók számát tekintve. A választ az alábbi tétel adja meg.

40. Tétel (Polinomiális tétel). Ha $n \in \mathbb{N}$, továbbá $a_1, \dots, a_k$ valós számok, vagy valós határozatlanok, akkor

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \frac{n!}{i_1! \cdot \dots \cdot i_k!} \cdot a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2} \cdot \dots \cdot a_k^{i_k}.$$

3. Szitaformula

Könnyen megfigyelhető a halmazokra vonatkozó alábbi állítás.

41. Állítás. Ha A, B véges halmazok, akkor $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

A fenti állítás szemléletesen könnyen igazolható, ugyanis az $A \cup B$ halmazban azok az elemek vannak, amik legalább az egyikben benne vannak. Így megszámoljuk azokat, amelyek benne vannak A -ban, illetve külön, amik benne vannak B -ben, de mivel a metszetüket kétszer számoltuk, így a metszet elemszámát egyszer le kell vonni, hogy minden elemet csak egyszer számoljunk.

Természetesen a fenti állítás kiterjeszthető több halmazra is.

42. Tétel. Legyenek $A_1, \dots, A_n$ véges halmazok. Ekkor

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\{i_1, \dots, i_r\}| = r}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}|.$$

A fenti tétel első ránézésre egyáltalán nem tűnik kényelmesnek. Segíthet, ha megértjük, mi történik a képletben. Van n darab véges halmazunk, és keressük az uniójuk elemszámát. Az $r = 1$ esetén összeadjuk a halmazok elemszámát. Így néhány elemet kétszer számoltunk ezért le kell vonnunk belőle bizonyos elemszámokat, például $r = 2$ esetén a „kettős metszetek” elemszámát. Ezután hozzáadjuk a „hármass metszetek” elemszámát, levonjuk a „négyes metszetek” elemszámát, és ezt folytatjuk, míg el nem jutunk az $r = n$ esethez, ami az összes halmaznak a metszete. A fenti tétel következménye a szitaformula.

43. Tétel (Szitaformula). *Legyenek $A_1, \dots, A_n$ halmazok a véges U univerzum részhalmazai. Ekkor*

$$\left| \overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} \right| = |U| + \sum_{r=1}^n (-1)^r \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\{i_1, \dots, i_r\}| = r}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}|.$$

A szitaformula a 42. Tétel egyenes következménye, ugyanis $\left| \overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} \right| = |U| - |A_1 \cup \dots \cup A_n|$.

44. Példa. A szegedi tudományegyetem matematika tanszékcsoportha 100 matematika, 200 biológia és 400 informatika szakos hallgatót oktat. Akik egyszerre matematika és biológia szakosak, azoknak a száma 12, a matematika és informatika szakosoké 44, illetve a biológia-informatika szakos hallgatók száma 6. Négy fő végzi egyszerre mind a három szakot. Hány hallgatót oktat a matematika tanszékcsoporth?

Jelölje I, B, M rendre az informatika, biológia és matematika szakos hallgatók halmazát. Ekkor a a 42. Tétel szerint

$$\begin{aligned} |I \cup B \cup M| &= |I| + |B| + |M| - |I \cap B| - |I \cap M| - |B \cap M| + |I \cap B \cap M| \\ &= 400 + 200 + 100 - 6 - 44 - 12 + 4 = 642. \end{aligned}$$