

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH

2013. október 8.

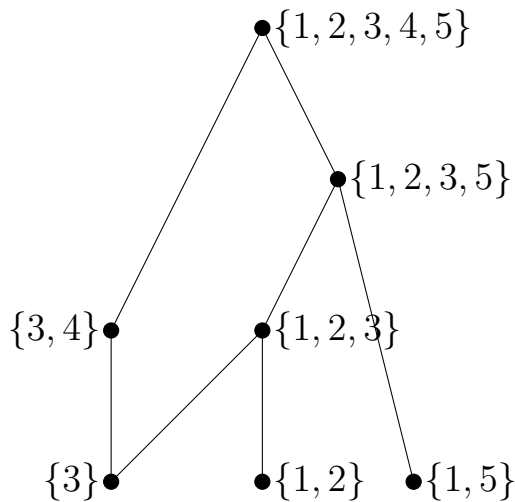
α csoport

1. Feladat (5 pont). Legyen adott az

$$A = \{\{3\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagramját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeit!

Megoldás.



Legnagyobb elem: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Legkisebb elem: nincs.

Maximális elem: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Minimális elemek: $\{3\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}$.

2. Feladat (4 pont). Igazak-e az alábbi állítások? Válaszait mindegyik esetben indokolja!

- A $\varrho = \{(a, b) : ab < 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció dichotom.
- A $\sigma = \{(x, y) : x + y = 2013\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció szimmetrikus.
- A $\tau = \{(a, b) : a + b \leq 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció antiszimmetrikus.
- A $\mu = \{(x, y) : 2 \mid x + y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció reflexív.

Megoldás.

- A ϱ reláció nem dichotom, mert könnyen adható ellenpélda: $(2, 3) \notin \varrho$ és $(3, 2) \notin \varrho$.
- A σ reláció szimmetrikus, mert az összeadás kommutatív művelet: $(x, y) \in \sigma \iff x + y = 2013 \iff y + x = 2013 \iff (y, x) \in \sigma$.
- A τ reláció nem antiszimmetrikus, mert könnyen adható ellenpélda: $(-5, 2) \in \tau$ és $(2, -5) \in \tau$, de $2 \neq -5$.
- A μ reláció reflexív, mert minden x egész szám esetén teljesül a $2 \mid x + x$, azaz $2 \mid 2x$ oszthatóság.

3. Feladat (4 pont). Igazak-e az alábbi kijelentések? Válaszait mindegyik esetben indokolja!

- Az $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\alpha = x^3$ leképezés injektív.
- A $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n\beta = n + 2$ leképezés szürjektív.
- A $\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y)\gamma = x - y$ leképezés injektív.

Megoldás.

- Az α leképezés injektív, mert $x\alpha = y\alpha \iff x^3 = y^3 \iff x = y$, mivel a páratlan kitevőjű gyökvonásnál nem kell abszolútértéket használnunk.
 - A β leképezés nem szürjektív, mert például az 1-nek nincs őse.
 - A γ leképezés nem injektív, mert léteznek olyan különböző $\mathbb{R}^2$ -beli elemek, melynek a képe megegyezik, például $(5, 2)\gamma = (6, 3)\gamma = 3$, és $(5, 2) \neq (6, 3)$.
-

4. Feladat (5 pont). Legyen adott az $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alaphalmaz, és ennek három részhalmaza:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 4, 6\} \quad \text{és} \quad C = \{1, 4, 6\}.$$

Határozza meg a $\mathcal{P}((A \triangle B) \setminus \overline{C})$ hatványhalmazt!

Adja meg az U alaphalmaz egy tetszőleges osztályozását!

Megoldás.

- $A \triangle B = \{1, 3, 6\}$
 - $\overline{C} = \{2, 3, 5\}$
 - $(A \triangle B) \setminus \overline{C} = \{1, 6\}$
 - $\mathcal{P}((A \triangle B) \setminus \overline{C}) = \{\emptyset, \{1\}, \{6\}, \{1, 6\}\}$
 - Osztályozás: $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$
-

5. Feladat (5 pont). Határozza meg a

$$\frac{z_1 - \overline{z_2}}{z_3}$$

komplex számot, ahol

$$z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = 1 + 5i \quad \text{és} \quad z_3 = -3 - 3i!$$

Továbbá határozza meg a z_3 trigonometrikus alakját!

Megoldás.

- $\overline{z_2} = 1 - 5i$
 - $z_1 - \overline{z_2} = 1 + 2i$
 - $\frac{z_1 - \overline{z_2}}{z_3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i$
 - $z_3 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{4} \right)$
-
-

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH

2013. október 8.

β csoport

1. Feladat (4 pont). Igazak-e az alábbi állítások? Válaszait mindegyik esetben indokolja!

- A $\varrho = \{(x, y) : xy > 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció dichotom.
- A $\sigma = \{(x, y) : x + y = 42\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció szimmetrikus.
- A $\tau = \{(a, b) : a + b \geq 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció antiszimmetrikus.
- A $\mu = \{(a, b) : 2 \mid a + b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció reflexív.

Megoldás.

- A ϱ reláció nem dichotom, mert könnyen adható ellenpélda: $(2, -3) \notin \varrho$ és $(-3, 2) \notin \varrho$.
- A σ reláció szimmetrikus, mert az összeadás kommutatív művelet: $(x, y) \in \sigma \iff x + y = 42 \iff y + x = 42 \iff (y, x) \in \sigma$.
- A τ reláció nem antiszimmetrikus, mert könnyen adható ellenpélda: $(5, 2) \in \tau$ és $(2, 5) \in \tau$, de $2 \neq 5$.
- A μ reláció reflexív, mert minden a egész szám esetén teljesül a $2 \mid a + a$, azaz $2 \mid 2a$ oszthatóság.

2. Feladat (5 pont). Legyen adott az $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ alaphalmaz, és ennek három részhalmaza:

$$A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{b, d, f\} \quad \text{és} \quad C = \{a, d, f\}.$$

Határozza meg az $(A \triangle B) \setminus \overline{C}$ halmaz hatványhalmazát!

Adja meg az U alaphalmaz egy tetszőleges osztályozását!

Megoldás.

- $A \triangle B = \{a, c, f\}$
- $\overline{C} = \{b, c, e\}$
- $(A \triangle B) \setminus \overline{C} = \{a, f\}$
- $\mathcal{P}((A \triangle B) \setminus \overline{C}) = \{\emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}\}$
- Osztályozás: $\mathcal{C} = \{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}\}$

3. Feladat (5 pont). Határozza meg a

$$\frac{\overline{z_1} - z_2}{z_3}$$

komplex számot, ahol

$$z_1 = 3 - 2i, \quad z_2 = 2 - 2i \quad \text{és} \quad z_3 = -1 + 3i!$$

Továbbá határozza meg a z_2 trigonometrikus alakját!

Megoldás.

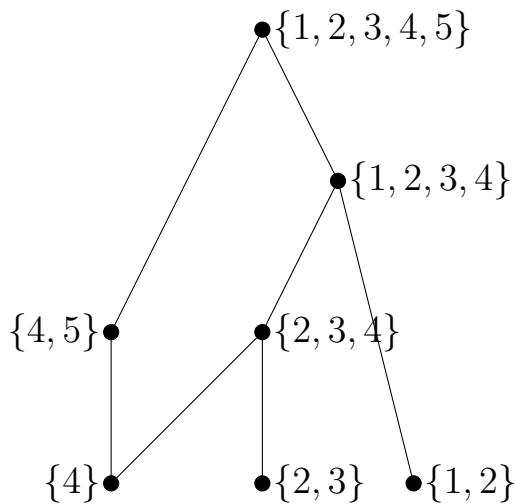
- $\overline{z_1} = 3 + 2i$
 - $\overline{z_1} - z_2 = 1 + 4i$
 - $\frac{\overline{z_1} - z_2}{z_3} = \frac{11}{10} - \frac{7}{10}i$
 - $z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4} \right)$
-

4. Feladat (5 pont). Legyen adott az

$$A = \{\{4\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagramját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeit!

Megoldás.



Legnagyobb elem: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Legkisebb elem: nincs.

Maximális elem: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Minimális elemek: $\{4\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}$.

5. Feladat (4 pont). Igazak-e az alábbi kijelentések? Válaszait mindegyik esetben indokolja!

- Az $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n\alpha = n + 3$ leképezés szürjektív.
- A $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y)\beta = x - y$ leképezés injektív.
- A $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\gamma = x^3$ leképezés injektív.

Megoldás.

- Az α leképezés nem szürjektív, mert például az 1-nek nincs őse.
 - A β leképezés nem injektív, mert léteznek olyan különböző $\mathbb{R}^2$ -beli elemek, melynek a képe megegyezik, például $(5, 2)\beta = (6, 3)\beta = 3$, és $(5, 2) \neq (6, 3)$.
 - A γ leképezés injektív, mert $x\gamma = y\gamma \iff x^3 = y^3 \iff x = y$, mivel a páratlan kitevőjű gyökvonásnál nem kell abszolútértéket használnunk.
-
-

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH

2013. október 10.

γ csoport

1. Feladat (5 pont). Határozza meg a

$$\frac{z_1 - \overline{z_2}}{z_3}$$

komplex számot, ahol

$$z_1 = 1 - 3i, \quad z_2 = 2 - i \quad \text{és} \quad z_3 = -2 + 2i!$$

Továbbá határozza meg a z_3 trigonometrikus alakját!

Megoldás.

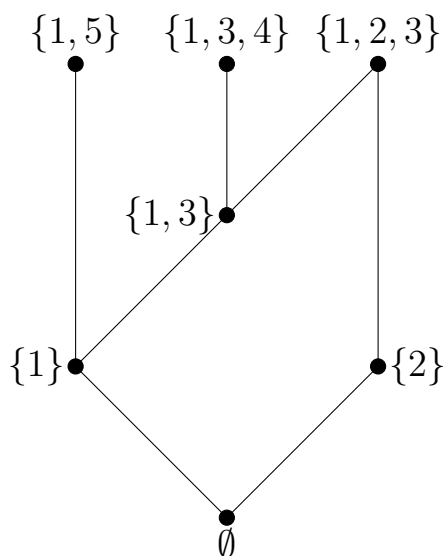
- $\overline{z_2} = 2 + i$
- $z_1 - \overline{z_2} = -1 - 4i$
- $\frac{z_1 - \overline{z_2}}{z_3} = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4}i$
- $z_3 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

2. Feladat (5 pont). Legyen adott az

$$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagramját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeit!

Megoldás.



Legnagyobb elem: nincs.

Legkisebb elem: $\emptyset$.

Maximális elemek: $\{1, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}$.

Minimális elem: $\emptyset$.

3. Feladat (4 pont). Igazak-e az alábbi kijelentések? Válaszait mindegyik esetben indokolja!

- Az $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\alpha = 2x^3$ leképezés injektív.
- A $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n\beta = n + 5$ leképezés szürjektív.
- A $\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y)\gamma = y - x$ leképezés injektív.

Megoldás.

- Az α leképezés injektív, mert $x\alpha = y\alpha \iff 2x^3 = 2y^3 \iff x^3 = y^3 \iff x = y$, mivel a páratlan kitevőjű gyökvonásnál nem kell abszolútértéket használnunk.
 - A β leképezés nem szürjektív, mert például az 1-nek nincs őse.
 - A γ leképezés nem injektív, mert léteznek olyan különböző $\mathbb{R}^2$ -beli elemek, melynek a képe megegyezik, például $(5, 2)\gamma = (6, 3)\gamma = -3$, és $(5, 2) \neq (6, 3)$.
-

4. Feladat (5 pont). Legyen adott az $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alaphalmaz, és ennek három részhalmaza:

$$A = \{1, 2, 5\}, \quad B = \{3, 4, 5\} \quad \text{és} \quad C = \{2, 3, 6\}.$$

Határozza meg a $\mathcal{P}((B \triangle C) \setminus \overline{A})$ hatványhalmazt!

Adja meg az U alaphalmaz egy tetszőleges osztályozását!

Megoldás.

- | | |
|---|---|
| • $B \triangle C = \{2, 4, 5, 6\}$ | • $\mathcal{P}((B \triangle C) \setminus \overline{A}) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$ |
| • $\overline{A} = \{3, 4, 6\}$ | • Osztályozás: $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ |
| • $(B \triangle C) \setminus \overline{A} = \{2, 5\}$ | |
-

5. Feladat (4 pont). Igazak-e az alábbi állítások? Válaszait mindegyik esetben indokolja!

- A $\varrho = \{(x, y) : xy \leq 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció antiszimmetrikus.
- A $\sigma = \{(x, y) : x^2 \leq y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció reflexív.
- A $\tau = \{(a, b) : a + b \leq 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció dichotom.
- A $\mu = \{(a, b) : 2 \mid a + b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció szimmetrikus.

Megoldás.

- A ϱ reláció nem antiszimmetrikus, mert könnyen adható ellenpélda: $(5, -2) \in \varrho$ és $(-2, 5) \in \varrho$, de $-2 \neq 5$.
 - A σ reláció reflexív, mert minden x valós szám esetén teljesül az $x^2 \leq x^2$ egyenlőtlenség.
 - A τ reláció nem dichotom, mert könnyen adható ellenpélda: $(2, 3) \notin \tau$ és $(3, 2) \notin \tau$.
 - A μ reláció szimmetrikus, mert az összeadás kommutatív művelet: $(a, b) \in \mu \iff 2 \mid a + b \iff 2 \mid b + a \iff (b, a) \in \mu$.
-
-

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH

2013. október 10.

δ csoport

1. Feladat (4 pont). Igazak-e az alábbi állítások? Válaszait mindegyik esetben indokolja!

- A $\varrho = \{(x, y) : x + y > 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció dichotom.
- A $\sigma = \{(a, b) : a + b = 21\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció szimmetrikus.
- A $\tau = \{(a, b) : a + b \leq 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ reláció antiszimmetrikus.
- A $\mu = \{(a, b) : 3 \mid a - b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció reflexív.

Megoldás.

- A ϱ reláció nem dichotom, mert könnyen adható ellenpélda: $(2, -3) \notin \varrho$ és $(-3, 2) \notin \varrho$.
- A σ reláció szimmetrikus, mert az összeadás kommutatív művelet: $(a, b) \in \sigma \iff a + b = 21 \iff b + a = 21 \iff (b, a) \in \sigma$.
- A τ reláció nem antiszimmetrikus, mert könnyen adható ellenpélda: $(-5, -2) \in \tau$ és $(-2, -5) \in \tau$, de $-2 \neq -5$.
- A μ reláció reflexív, mert minden a valós szám esetén teljesül a $3 \mid a - a$, azaz $3 \mid 0$ oszthatóság.

2. Feladat (5 pont). Határozza meg a

$$\frac{\overline{z_1} - z_2}{z_3}$$

komplex számot, ahol

$$z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = 3 - 3i \quad \text{és} \quad z_3 = 3 + 2i!$$

Továbbá határozza meg a z_2 trigonometrikus alakját!

Megoldás.

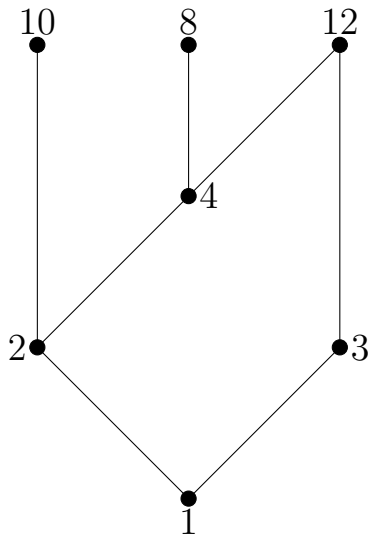
- $\overline{z_1} = 1 + 2i$
- $\overline{z_1} - z_2 = -2 + i$
- $\frac{\overline{z_1} - z_2}{z_3} = \frac{4}{13} + \frac{19}{13}i$
- $z_2 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4} \right)$

3. Feladat (5 pont). Legyen adott az

$$A = \{1, 2, 3, 4, 8, 10, 12\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \mid)$ részbenrendezett halmazt, azaz az A halmazon vett oszthatósági relációt. Adja meg ennek a Hasse-diagramját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeit!

Megoldás.



Legnagyobb elem: nincs.
Legkisebb elem: 1.
Maximális elemek: 8, 10, 12.
Minimális elem: 1.

4. Feladat (4 pont). Igazak-e az alábbi kijelentések? Válaszait mindegyik esetben indokolja!

- Az $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n\alpha = n + 4$ leképezés szürjektív.
- A $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y)\beta = x - y$ leképezés injektív.
- A $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\gamma = 4x^3$ leképezés injektív.

Megoldás.

- Az α leképezés nem szürjektív, mert például az 1-nek nincs őse.
- A β leképezés nem injektív, mert léteznek olyan különböző $\mathbb{R}^2$ -beli elemek, melynek a képe megegyezik, például $(5, 2)\beta = (6, 3)\beta = 3$, és $(5, 2) \neq (6, 3)$.
- Az γ leképezés injektív, mert $x\gamma = y\gamma \iff 4x^3 = 4y^3 \iff x^3 = y^3 \iff x = y$, mivel a páratlan kitevőjű gyökvonásnál nem kell abszolútértéket használnunk.

5. Feladat (5 pont). Legyen adott az $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alaphalmaz, és ennek három részhalmaza:

$$A = \{1, 2, 4\}, \quad B = \{2, 3, 5\} \quad \text{és} \quad C = \{2, 4, 5, 6\}.$$

Határozza meg az $(A \triangle B) \setminus \overline{C}$ halmaz hatványhalmazát!

Adja meg az U alaphalmaz egy tetszőleges osztályozását!

Megoldás.

- $A \triangle B = \{1, 3, 4, 5\}$
- $\overline{C} = \{1, 3\}$
- $(A \triangle B) \setminus \overline{C} = \{4, 5\}$
- $\mathcal{P}((A \triangle B) \setminus \overline{C}) = \{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{4, 5\}\}$
- Osztályozás: $\mathcal{C} = \{\{1, 3, 4\}, \{2, 5, 6\}\}$