

1. Feladat. Mutassuk meg teljes indukcióval, hogy

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2.$$

(Az ilyen típusú feladatokat úgy kell értelmezni, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ -re!)

Megoldás.

1. Az $n = 1$ esetben $1 \cdot 4 = 1 \cdot (1 + 1)^2$ a bizonyítandó állítás, ami nyilvánvalóan teljesül. Megnézhetjük az $n = 2$ esetet is, ekkor is igaz lesz az állítás:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 &= 2 \cdot (2 + 1)^2 \\ 18 &= 18. \end{aligned}$$

2. Indukciós hipotézisként tegyük fel, hogy igaz bármely $n \in \mathbb{N}$ -re teljesül a

$$T(n) : 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$$

állítás.

3. Az indukciós hipotézis (azaz $T(n)$) felhasználásával igazoljuk, hogy teljesül $T(n + 1)$ is.

$$T(n+1) : 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n + 1) + (n + 1)(3(n + 1) + 1) = (n + 1)((n + 1) + 1)^2$$

Most felhasználjuk az indukciós hipotézist, mely szerint $T(n + 1)$ bal oldala a következőképpen alakul:

$$T(n + 1) : n(n + 1)^2 + (n + 1)(3(n + 1) + 1) = (n + 1)((n + 1) + 1)^2.$$

Felbontjuk a zárójeleket, és bízunk abban, hogy az egyenlőség itt is teljesül. Ugyanis ha igen, akkor igazoljuk a $T(n + 1)$ állítást, és így a feladat állítását is.

$$\begin{aligned} n(n + 1)^2 + (n + 1)(3(n + 1) + 1) &= (n + 1)((n + 1) + 1)^2 \\ n(n^2 + 2n + 1) + (n + 1)(3n + 4) &= (n + 1)(n^2 + 4n + 4) \\ n^3 + 2n^2 + n + 3n^2 + 4n + 3n + 4 &= n^3 + 4n^2 + 4n + n^2 + 4n + 4 \\ n^3 + 5n^2 + 8n + 4 &= n^3 + 5n^2 + 8n + 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Ezzel kész a feladat.

□

2. Feladat. Mutassuk meg teljes indukcióval, hogy ha egy pozitív egész szám 3^n egyforma számjegyből áll, akkor ez a szám osztható 3^n -nel.

Megoldás.

1. Az $n = 1$ esetben a bizonyítandó állítás az, hogy $x \cdot 111$ szám osztható 3-mal. (Az x egy nullától különböző tetszőleges tízes számrendszerbeli számjegy, ami a feladat megoldása során elhagyható lehet, nem befolyásolja a megoldás menetét.) Ez az állítás nyilván igaz, mert a szám számjegyeinek összege $3x$ ami nyilván osztható 3-mal.

Megnézhetjük az $n = 2$ esetet is, ekkor is igaz lesz az állítás. Az $x \cdot 111111111$ szám számjegyeinek összege $9x$, ami nyilván osztható 9-cel.

2. Indukciós hipotézisként tegyük fel, hogy igaz bármely $n \in \mathbb{N}$ -re teljesül a

$T(n)$: egy 3^n egyforma számjegyből álló szám osztható 3^n -nel

állítás.

3. Az indukciós hipotézis (azaz $T(n)$) felhasználásával igazoljuk, hogy teljesül $T(n+1)$ is. A $T(n+1)$ állításban vizsgált szám tulajdonképpen olyan, mintha a $T(n)$ -ben lévő számot írnánk egymás után háromszor:

$$x \cdot \boxed{} \parallel \boxed{} \parallel \boxed{}.$$

Most úgy használjuk fel az indukciós hipotézist, hogy tudjuk, hogy a fenti blokkok külön-külön oszthatóak 3^n -nel. Az osztás szabályai szerint, a fenti blokkos szám elosztását 3^n -nel (megtehetjük az indukciós hipotézis miatt) úgy kell elvégezni, hogy blokkonként osztjuk el. Tehát

$$x \cdot \boxed{} \parallel \boxed{} \parallel \boxed{} = 3^n \cdot x \cdot \boxed{A \parallel A \parallel A},$$

ahol A az a hányados, amit a $T(n)$ -beli szám és a 3^n osztása során kapunk. Egy szám pontosan akkor osztható 3^{n+1} -gyel, ha osztható 3^n -nel, és az ezen osztás végeredményeképpen kapott hányados még osztható 3-mal. Tehát az állítás igazolásához már csak azt kell belátnom, hogy $x \cdot \boxed{A \parallel A \parallel A}$ osztható hárommal. Ez pedig nyilván teljesül, mivel az $\boxed{A \parallel A \parallel A}$ szám számjegyeinek összege megegyezik az $\boxed{A}$ szám számjegyeinek összegének 3-szorosával, és ebben már benne is van, hogy osztható 3-mal. Ezzel a feladat kész.

Ez egy kicsit furcsak bizonyításnak tűnhet, de teljesen korrekt, és teljes indukción alapul, mivel a 2. lépésben felhasználtam az indukciós hipotézist. Ha elsőre nem érthető, másodjára talán tanácsos $n = 3$ esetén végigmenni a 3. lépésen, természetes azon hipotézis feltevésével, hogy $x \cdot 111111111 = 3^2 \cdot x \cdot 12345679$. Ha még így sem sikerül, következő gyakorlaton szívesen elmagyarázom. (Legalábbis megpróbálom.)

□