

Leképezések tulajdonságai

1. Feladat. Milyen tulajdonságai vannak az alábbi leképezésnek?

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad xf = x^2$$

Megoldás:

1. Injektivitás

Tegyük fel, hogy $x_1f = x_2f$ valamilyen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ elemekre. Cél: $x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned} x_1f &= x_2f \\ x_1^2 &= x_2^2 \\ |x_1| &= |x_2| \\ x_1 = x_2 &\text{ vagy } x_1 = -x_2 \end{aligned}$$

Mivel a második esetben nem teljesül, hogy $x_1 = x_2$, így a leképezés nem injektív. Más szóval tudunk találni ellenpéldát, erre példa az, hogy $5f = (-5)f$, de $5 \neq -5$.

2. Szürjektivitás

Rögzítsünk egy tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ elemet, és keressünk hozzá egy olyan $x \in \mathbb{R}$ elemet, melyre $xf = y$ teljesül. Azaz oldjuk meg x -re az $xf = y$ egyenletet.

$$\begin{aligned} xf &= y \\ x^2 &= y \\ |x| &= \sqrt{y} \\ x = \sqrt{y} &\text{ vagy } x = -\sqrt{y} \end{aligned}$$

Mivel a gyökjel alatti kifejezés mindig értelmezve van, így bármely $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ esetén a keresett $x \in \mathbb{R}$ -nek jó lesz a $\sqrt{y}$ választás. Tehát minden elemnek találunk őst, azaz a leképezés szürjektív.

3. Bijektivitás

Nem injektív, így nem is bijektív.

2. Feladat. Milyen tulajdonságai vannak az alábbi leképezésnek?

$$f_2 : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad xf_2 = x^2$$

Megoldás:

1. Injektivitás

Tegyük fel, hogy $x_1f_2 = x_2f_2$ valamilyen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ elemekre. Cél: $x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned} x_1f_2 &= x_2f_2 \\ x_1^2 &= x_2^2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Most azért hagyhattam el az abszolútértéket, mert az x_1 és az x_2 nemnegatív számok voltak. Kijött, amit szerettünk volna, tehát a leképezés injektív.

2. Szürjektivitás

Rögzítsünk egy tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ elemet, és keressünk hozzá egy olyan $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ elemet, melyre $xf_2 = y$ teljesül. Azaz oldjuk meg x -re az $xf_2 = y$ egyenletet.

$$\begin{aligned}xf_2 &= y \\x^2 &= y \\x &= \sqrt{y}\end{aligned}$$

Mivel a gyökjel alatti kifejezés mindig értelmezve van, így bármely $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ esetén a keresett $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ -nek jó lesz a $\sqrt{y}$ választás. Tehát minden elemnek találunk őt, azaz a leképezés szürjektív.

3. Bijektivitás

A leképezés bijektív, mivel injektív és szürjektív.

3. Feladat. Milyen tulajdonságai vannak az alábbi leképezésnek?

$$f_3 : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad xf_3 = x^2$$

Megoldás:

1. Injektivitás

Tegyük fel, hogy $x_1f_3 = x_2f_3$ valamilyen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ elemekre. Cél: $x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned}x_1f_3 &= x_2f_3 \\x_1^2 &= x_2^2 \\x_1 &= x_2\end{aligned}$$

Most is azért hagyhattam el az abszolútértéket, mert az x_1 és az x_2 nemnegatív számok voltak. Kijött, amit szerettünk volna, tehát a leképezés injektív.

2. Szürjektivitás

Rögzítsünk egy tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ elemet, és keressünk hozzá egy olyan $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ elemet, melyre $xf_3 = y$ teljesül. Azaz oldjuk meg x -re az $xf_3 = y$ egyenletet.

$$\begin{aligned}xf_3 &= y \\x^2 &= y \\x &= \sqrt{y}\end{aligned}$$

Azonban most ellentmondásra jutottam, mivel én az y -t tetszőleges valós számnak választhatom, de akármilyen valós számból nem tudok négyzetgyököt vonni. Így például negatív y -ok esetén soha nem találom őt. Tehát a leképezés nem szürjektív.

3. Bijektivitás

A leképezés nem bijektív, mivel nem szürjektív.

A fenti három példával arra akartam rávilágítani, hogy fontos a leképezésnek kiindulási és az érkezési halmaza is!

4. Feladat. Milyen tulajdonságai vannak az alábbi leképezésnek?

$$g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (x, y) \mapsto xy$$

Megoldás:

1. Injektivitás:

Tegyük fel, hogy $x_1g = x_2g$ valamilyen $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^2$ elemekre. Cél: $x_1 = x_2$. Mivel a kiindulási halmaz a $\mathbb{Z}^2$, így most speciálisan $x_1 = (a, b)$ és $x_2 = (c, d)$, ahol a, b, c és d egész számok, és azt kell ellenőrizni, hogy $(a, b) = (c, d)$ teljesül-e. Nyilván könnyen találunk ellenpéldát, például $(2, 3)g = (1, 6)g$, de $(2, 3) \neq (1, 6)$. Tehát a leképezés nem injektív.

2. Szürjektivitás:

Rögzítsünk egy tetszőleges $y \in \mathbb{Z}$ elemet, és keressünk hozzá egy olyan $x = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ elemet, melyre $xg = y$ teljesül. Azaz oldjuk meg x -re az $xg = y$ egyenletet.

$$xg = y$$

$$ab = y$$

Mivel y egész szám, így az $x = (a, b) = (1, y)$ nekünk megfelelő választás, ugyanis $(1, y)g = y$ teljesül bármely $y \in \mathbb{Z}$ esetén.

3. Mivel a leképezés nem injektív, ezért nem is bijektív.

5. Feladat. Milyen tulajdonságai vannak az alábbi leképezésnek?

$$h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto n \text{ pozitív osztóinak száma}$$

Megoldás:

1. Injektivitás:

Képlettel dolgozni most nem nagyon lehet, de könnyen találunk olyan ellenpéldát, ami meglövi a leképezés injektív voltát. Például minden prímszám képe a 2-es, azaz különböző értékek mellett ugyanazt az értéket veszi fel a leképezés, ami pont azt jelenti, hogy nem injektív.

2. Szürjektivitás:

A kérdés most az, hogy bárhogya rögzítünk egy tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ természetes számot, tudok-e olyan n természetes számot megadni, melynek pontosan m darab pozitív osztója van. A válasz az, hogy igen. Ha $m = 1$, akkor $n = 1$. Ha $m > 1$, akkor $n = 2^{m-1}$ jó választás. Ez nem triviális, de azért egy kis gondolkodással rá lehet jönni.

3. Mivel a leképezés nem injektív, ezért nem is bijektív.

6. Feladat. Milyen tulajdonságai vannak az alábbi leképezésnek?

$$k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2, \quad xk = (x + 1, 1)$$

Megoldás:

1. Injektivitás:

Tegyük fel, hogy $x_1k = x_2k$ valamilyen $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ elemekre. Cél: $x_1 = x_2$.

$$x_1k = x_2k$$

$$(x_1 + 1, 1) = (x_2 + 1, 1)$$

$$x_1 + 1 = x_2 + 1 \quad \text{és} \quad 1 = 1$$

$$x_1 = x_2 \quad \text{és} \quad 1 = 1$$

Azt kaptam, hogy $x_1k = x_2k$ esetén az $x_1 = x_2$ mindig teljesül, tehát injektív a leképezés.

2. Szürjektivitás:

Azt kell belátni, hogy bármely $y = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ elemhez létezik olyan x egész szám, melyre $xk = (a, b)$ teljesül. Ha $b \neq 1$, akkor ilyen x -et biztos nem találok, mivel x -től függetlenül a $k(x)$ második komponense mindig 1. Így például az $(1, 2)$ -nek nincs őse, tehát a leképezés nem szürjektív.

3. Mivel a leképezés nem szürjektív, ezért nem is bijektív.

7. Feladat. Milyen tulajdonságai vannak az alábbi leképezésnek?

$$l : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad xl = \frac{1}{5x}$$

Megoldás:

1. Injektivitás:

Tegyük fel, hogy $x_1l = x_2l$ valamilyen $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ elemekre. Cél: $x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned} x_1l &= x_2l \\ \frac{1}{5x_1} &= \frac{1}{5x_2} \\ 5x_1 &= 5x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Azt kaptam, hogy $x_1k = x_2k$ esetén az $x_1 = x_2$ mindig teljesül, tehát injektív a leképezés.

2. Szürjektivitás:

Azt kell belátni, hogy bármely $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ elemhez létezik olyan x nemnulla valós szám, melyre $xl = y$ teljesül. Tehát az $xl = y$ egyenletben fejezzük ki x -et y függvényeként.

$$\begin{aligned} xl &= y \\ \frac{1}{5x} &= y \\ \frac{1}{y} &= 5x \\ \frac{1}{5y} &= x \end{aligned}$$

Minden NEMNULLA y esetén találok egy olyan x -et melyre $xl = y$. Tehát a leképezés szürjektív.

3. Mivel a leképezés injektív és szürjektív is, ezért bijektív.