

2. GYAKORLAT

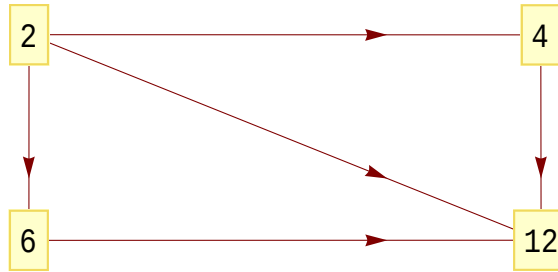
Halmazműveleti tulajdonságok, egyenlőségek;
Descartes-szorzat, relációk, relációk szorzata, inverze

1. Feladat. Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek, tetszőleges A, B és C halmazok esetén?

$$\begin{array}{lll} \overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}, & A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C), & A \times B = B \times A, \\ \overline{A \setminus B} = \overline{B} \setminus \overline{A}, & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C), & A \times \overline{A} = \emptyset, \\ \overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overline{B}, & (\overline{A} \cup B) \cap A = A \cap B, & A \triangle A = A, \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}, & A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A), & A \times \emptyset = \emptyset. \\ & \overline{(A \setminus (B \cup C))} = \overline{A} \cup B \cup C, & \end{array}$$

2. Feladat. Legyen $A = \{x, y\}$ és $B = \{y, z\}$. Adjuk meg elemeivel az $(A \times B) \cap (B \times A)$ halmazt!

3. Feladat. Adjuk meg elemeivel azt a relációt, mely az alábbi gráffal ábrázolható!



Próbáljuk meg megadni a relációt képlettel is!

Tipp. Érdekes a "híres" relációk körében keresgél.

4. Feladat. Legyen adott az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz és az alábbi két reláció: $\varrho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (4, 3)\} \subseteq A^2$ és $\sigma = \{(2, 1), (1, 3), (3, 2), (2, 4)\} \subseteq A^2$. Határozzuk meg a következő relációkat: $\varrho\sigma$, $\sigma\varrho$, $\varrho^{-1}\varrho$, $\varrho^{-1}\sigma$, $\sigma^{-1}\varrho$, $\varrho^{-1}\sigma^{-1}$.

5. Feladat. Gyakorlaton kiszámoltam az $\alpha\beta$ relációsorzatot, ahol

$$\begin{aligned} \alpha &= \{(x, y) : x = 2y\} \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ és} \\ \beta &= \{(x, y) : x = 2^y\} \subseteq \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Határozzuk meg a következő relációkat: α^{-1} , β^{-1} , $\beta\alpha$, $\beta\beta^{-1}$, $\beta^{-1}\alpha$!

6. Feladat. Melyek teljesülnek az alábbiak közül, ha

$$\begin{aligned} \alpha &= \{(1, 2), (3, 1), (4, 4), (5, 2), (3, 5), (2, 4), (1, 4), (3, 3)\} \subseteq \{1, 2, \dots, 5\}^2, \text{ és} \\ \beta &= \{(3, 1), (4, 2), (1, 5), (2, 2), (4, 2), (5, 3), (3, 3), (4, 1), (5, 1)\} \subseteq \{1, 2, \dots, 5\}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} (3, 3) \in \alpha^{-1}\beta, & (1, 3) \in \alpha\beta^{-1}, & (1, 4) \in (\alpha\beta^{-1})\alpha, \\ (4, 1) \in \alpha\beta, & (1, 4) \in \beta^{-1}\beta, & (2, 1) \in (\beta\alpha)\beta, \\ (2, 2) \in (\alpha\beta)^{-1}, & (2, 5) \in \alpha\beta^{-1}, & (2, 3) \in \beta\alpha^{-1}, \\ (5, 1) \in \beta\alpha, & (2, 3) \in \alpha\alpha^{-1}, & (4, 2) \in \alpha^{-1}\beta^{-1}. \end{array}$$

7. Feladat. Legyen adott az $A = \{-1, 0, 1\}$ halmaz és az $\alpha = \{(a, b) : |2a + 3b| \in \{0, 2, 5\}\} \subseteq A^2$ reláció. Adjuk meg az elemeivel az α relációt, annak inverzét, a kettő szorzatát $(\alpha\alpha^{-1})$ és az $\alpha^2 = \alpha\alpha$ relációt!

8. Feladat. Legyen adott az $\alpha = \{(x, y) : |x - y| \in \{0, 2\}\}$ és $\beta = \{(x, y) : x = y\}$ reláció az $A = \{0, 1, 2, 3\}$ halmazon. Melyekkel egyenlő az $\alpha\beta$ reláció az alábbiak közül?

$$A^2, \quad A^2 \setminus \alpha, \quad \emptyset, \quad \alpha, \quad \beta.$$

9. Feladat. Írja fel az alábbi $\rho = \{(X, Y) \in A^2 : X \cap \mathbb{Z} = Y \cap \mathbb{Z}\} \subseteq A^2$ reláció legalább egy darab elemét, ha $A = P(\mathbb{Q})$, ahol P a hatványhalmaz képzését, a $\mathbb{Q}$ pedig a racionális számok halmazát jelöli!