

1. GYAKORLAT

Eleme, részhalmaza,
hatványhalmaz, halmazműveletek

1. Feladat. Legyen adott az $U = \{0, 1, 2, \dots, 7\}$ univerzum, és ennek részhalmazai: $A = \{0, 2, 5\}$, $B = \{1, 3, 7, 5\}$, $C = U \setminus \{3, 6, 2\}$, $D = \{1, 2, 4, 6, 7\}$. Határozzuk meg az alábbi halmazokat:

1. $A \cup (B \cap C)$
2. $(A \setminus D) \triangle (C \setminus B)$
3. $\overline{B} \cap \overline{(C \setminus D)}$
4. $(((((A \setminus C) \triangle A) \cup B) \setminus C) \triangle B) \cap D$
5. $A \cup \left(\overline{((B \triangle C) \triangle (\overline{A} \setminus E))} \setminus C \right)$
6. ...

2. Feladat. Adott az $A = \{1, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ halmaz. A kérdés az hogy hány elemű a $P(P(A))$ halmaz, ahol P a hatványhalmaz képzését jelöli.

3. Feladat. Legyen az alaphalmaz az $U = \{1, 2, \dots, 10\}$ halmaz. Definiáljuk ezen univerzum A, B, C részhalmazát: A legyen a prímszámok halmaza, B a páros számok halmaza és C a négyzetszámok halmaza. Tekintsük a következő négy halmazt: $A \setminus B$, $B \cap C$, $\overline{(A \triangle C)}$ és $(A \cap C) \cup B$. Az utóbbi négy halmaz közül

melyeknek eleme a 8,
melyeknek eleme az üres halmaz,
melyeknek eleme a $\{6\}$,
melyeknek részhalmaza a $\{6\}$
és melyeknek részhalmaza a $\{6, 8\}$?

4. Feladat. Az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges A, B halmazokra?

1. $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$
2. $(A \cap B) \in \{A \cup B\}$
3. $(A \setminus B) \not\subseteq B$
4. $(A \setminus B) \in (A \triangle B)$

5. Feladat. Gyakorlaton megmutattam, hogy nem teljesül a következő állítás tetszőleges A, B halmazokra:

$$\text{Ha } A \subseteq P(B), \text{ akkor } A \in B.$$

Gyakorlásként érdemes megvizsgálni a hasonló állításokat is:

$$\begin{aligned} \text{Ha } A \in P(B), \text{ akkor } A &\subseteq B. \\ \text{Ha } A \in B, \text{ akkor } A &\subseteq P(B). \\ \text{Ha } A \subseteq B, \text{ akkor } A &\in P(B). \end{aligned}$$

6. Feladat. Döntse el, hogy az alábbiak közül melyik igaz, tetszőleges olyan A, B halmazokra, amelyekre $A \cup B \subseteq B$:

$$A \subseteq B, \quad A = B, \quad B \setminus A = \emptyset.$$

7. Feladat. Léteznek-e olyan A, B, C halmazok, amelyekre együttesen teljesül, hogy

$$A \subseteq B \in C \text{ és } A \in B \subseteq C.$$

Tipp. A megoldás az, hogy igen, érdemes az üres halmaz körül keresgélni.