

Diszkrét matematika I. gyakorlat

Vizsgafeladatok megoldása

Bogya Norbert

SZTE, Bolyai Intézet

2013. december 4.

- 1 dmnv1j-02.C1-B
- 2 dmnv1-12.C1-D
- 3 dmnv1-01.C1-C
- 4 dmnv1CSP-25-A
- 5 dmnv1-14.C0-C
- 6 1. Feladatsor
- 7 2. Feladatsor
- 8 3. Feladatsor
- 9 Válogatott feladatok

- 1 Mátrix inverze
- 2 Negáció (predikátumkalkulus)
- 3 Determináns
- 4 Osztályozás
- 5 Lineáris függetlenség
- 6 Halmazműveletek
- 7 Lineáris algebra (elméleti kérdések)
- 8 Számosságok
- 9 Leképezések tulajdonságai
- 10 Ítéletkalkulus

(1) Jelölje X az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ikszelje be a kis téglalapban, hogy mennyi az X elemeinek az összege? (Azaz $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = ?$)

!	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	-1 ☐	-2 ☐	
						-3 ☐	egyik sem ☐	! ☐

(1) Jelölje X az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ikszelje be a kis téglalapban, hogy mennyi az X elemeinek az összege? (Azaz $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = ?$)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	-1 ○	-2 ○	
						-3 ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}$$

(1) Jelölje X az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ikszelje be a kis téglalapban, hogy mennyi az X elemeinek az összege? (Azaz $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = ?$)

!	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	-1 ☐	-2 ☐	
						-3 ☐	egyik sem ☐	! ☐

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Jelölje X az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ikszelje be a kis téglalapban, hogy mennyi az X elemeinek az összege? (Azaz $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = ?$)

!	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	-1 ☐	-2 ☐	
						-3 ☐	egyik sem ☐	! ☐

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Jelölje X az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ikszelje be a kis téglalapban, hogy mennyi az X elemeinek az összege? (Azaz $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = ?$)

!	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☒	-1 ☐	-2 ☐	
						-3 ☐	egyik sem ☐	! ☐

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Melyik ekvivalens a $(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$ formula negáltjával az alábbi

$$F : (\forall x)(\exists y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y))$$

$$G : (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \vee \neg B(y))$$

$$H : (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y))$$

formulák közül?

!	$F \bigcirc$	$G \bigcirc$	$H \bigcirc$	egyik sem	!
---	--------------	--------------	--------------	-----------	---

(2) Melyik ekvivalens a $(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$ formula negáltjával az alábbi

$$F : (\forall x)(\exists y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y))$$

$$G : (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \vee \neg B(y))$$

$$H : (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y))$$

formulák közül?

!	$F \bigcirc$	$G \bigcirc$	$H \bigcirc$	egyik sem	!
---	--------------	--------------	--------------	-----------	---

Megoldás:

$$\neg(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$$

(2) Melyik ekvivalens a $(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$ formula negáltjával az alábbi

$$F : (\forall x)(\exists y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y))$$

$$G : (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \vee \neg B(y))$$

$$H : (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y))$$

formulák közül?

!	$F \bigcirc$	$G \bigcirc$	$H \bigcirc$	egyik sem	!
---	--------------	--------------	--------------	-----------	---

Megoldás:

$$\neg(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) \equiv (\exists x)\neg(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$$

(2) Melyik ekvivalens a $(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$ formula negáltjával az alábbi

$$F : (\forall x)(\exists y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y))$$

$$G : (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \vee \neg B(y))$$

$$H : (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y))$$

formulák közül?

!	$F \bigcirc$	$G \bigcirc$	$H \bigcirc$	egyik sem	!
---	--------------	--------------	--------------	-----------	---

Megoldás:

$$\begin{aligned}\neg(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) &\equiv (\exists x)\neg(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) \\ &\equiv (\exists x)(\forall y)\neg(A(x) \wedge B(y))\end{aligned}$$

(2) Melyik ekvivalens a $(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$ formula negáltjával az alábbi

$$\begin{aligned} F : & (\forall x)(\exists y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y)) \\ G : & (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \\ H : & (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y)) \end{aligned}$$

formulák közül?

!	$F \bigcirc$	$G \bigcirc$	$H \bigcirc$	egyik sem	!
---	--------------	--------------	--------------	-----------	---

Megoldás:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) & \equiv (\exists x)\neg(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) \\ & \equiv (\exists x)(\forall y)\neg(A(x) \wedge B(y)) \\ & \equiv (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \end{aligned}$$

(2) Melyik ekvivalens a $(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$ formula negáltjával az alábbi

$$\begin{aligned} F : & (\forall x)(\exists y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y)) \\ G : & (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \\ H : & (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \wedge \neg B(y)) \end{aligned}$$

formulák közül?

!	$F \bigcirc$	$G \otimes$	$H \bigcirc$	egyik sem	!
---	--------------	-------------	--------------	-----------	---

Megoldás:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) & \equiv (\exists x)\neg(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) \\ & \equiv (\exists x)(\forall y)\neg(A(x) \wedge B(y)) \\ & \equiv (\exists x)(\forall y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \\ & \equiv G \end{aligned}$$

(3) Mennyi az alábbi determináns értéke a kis téglalapban felsoroltak közül?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

!	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	-2 ○	5 ○	-6 ○
					12 ○	egyik sem ○	!

(3) Mennyi az alábbi determináns értéke a kis téglalapban felsoroltak közül?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

!	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	-2 ○	5 ○	-6 ○
					12 ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

(3) Mennyi az alábbi determináns értéke a kis téglalapban felsoroltak közül?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

!	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	-2 ○	5 ○	-6 ○
					12 ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

(3) Mennyi az alábbi determináns értéke a kis téglalapban felsoroltak közül?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

!	0 ☐	1 ☐	-1 ☐	2 ☐	-2 ☐	5 ☐	-6 ☐
					12 ☐	egyik sem ☐	! ☐

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4$$

(3) Mennyi az alábbi determináns értéke a kis téglalapban felsoroltak közül?

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

!	0 ○	1 ⊗	-1 ○	2 ○	-2 ○	5 ○	-6 ○
					12 ○	egyik sem ○	!

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Minek válasszuk a téglalapban felsoroltak közül az X halmazt, hogy $\mathcal{C} = \{\{0, 1, 4\}, X, \{2\}\}$ osztályozás legyen az A halmazon?

!	$\emptyset$ ○	$\{3, 5\}$ ○	$\{4, 5\}$ ○	A ○	$\{1, 3, 5\}$ ○	egyik sem ○	!
---	---------------	--------------	--------------	-------	-----------------	-------------	---

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Minek válasszuk a téglalapban felsoroltak közül az X halmazt, hogy $\mathcal{C} = \{\{0, 1, 4\}, X, \{2\}\}$ osztályozás legyen az A halmazon?

!	$\emptyset$ ○	$\{3, 5\}$ ○	$\{4, 5\}$ ○	A ○	$\{1, 3, 5\}$ ○	egyik sem ○	!
---	---------------	--------------	--------------	-------	-----------------	-------------	---

Megoldás: Mikor lesz $\mathcal{C}$ osztályozás?

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Minek válasszuk a téglalapban felsoroltak közül az X halmazt, hogy $\mathcal{C} = \{\{0, 1, 4\}, X, \{2\}\}$ osztályozás legyen az A halmazon?

!	$\emptyset \bigcirc$	$\{3, 5\} \bigcirc$	$\{4, 5\} \bigcirc$	$A \bigcirc$	$\{1, 3, 5\} \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	----------------------	---------------------	---------------------	--------------	------------------------	----------------------	---

Megoldás: Mikor lesz $\mathcal{C}$ osztályozás?

- Az A minden eleme benne legyen egyen blokkban.
- Az A minden eleme pontosan egy blokkban legyen.
- Egyik blokk sem lehet az üres halmaz.

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Minek válasszuk a téglalapban felsoroltak közül az X halmazt, hogy $\mathcal{C} = \{\{0, 1, 4\}, X, \{2\}\}$ osztályozás legyen az A halmazon?

!	$\emptyset \bigcirc$	$\{3, 5\} \otimes$	$\{4, 5\} \bigcirc$	$A \bigcirc$	$\{1, 3, 5\} \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	----------------------	--------------------	---------------------	--------------	------------------------	----------------------	---

Megoldás: Mikor lesz $\mathcal{C}$ osztályozás?

- Az A minden eleme benne legyen egyen blokkban.
- Az A minden eleme pontosan egy blokkban legyen.
- Egyik blokk sem lehet az üres halmaz.

(5) Tekintsük az alábbi vektorrendszereket az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

$$\mathcal{E} : \quad (-5, -5, -3), (5, 5, 3), (10, 10, 6);$$

$$\mathcal{F} : \quad (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0);$$

$$\mathcal{G} : \quad (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0).$$

Melyek lineárisan függetlenek közülük?

?	$\mathcal{E}$ ☐	$\mathcal{F}$ ☐	$\mathcal{G}$ ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	---------------------------------	---

(5) Tekintsük az alábbi vektorrendszereket az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

$$\mathcal{E} : \quad (-5, -5, -3), (5, 5, 3), (10, 10, 6);$$

$$\mathcal{F} : \quad (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0);$$

$$\mathcal{G} : \quad (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0).$$

Melyek lineárisan függők közülük?

?	$\mathcal{E}$ ☐	$\mathcal{F}$ ☐	$\mathcal{G}$ ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

(5) Tekintsük az alábbi vektorrendszereket az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

$$\mathcal{E} : \quad (-5, -5, -3), (5, 5, 3), (10, 10, 6);$$

$$\mathcal{F} : \quad (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0);$$

$$\mathcal{G} : \quad (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0).$$

Melyek lineárisan függők közülük?

?	$\mathcal{E}$ ☐	$\mathcal{F}$ ☐	$\mathcal{G}$ ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

- $\mathcal{E}$ függő: $1v_1 + 1v_2 + 0v_3 = (0, 0, 0)$

(5) Tekintsük az alábbi vektorrendszereket az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

$$\mathcal{E} : \quad (-5, -5, -3), (5, 5, 3), (10, 10, 6);$$

$$\mathcal{F} : \quad (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0);$$

$$\mathcal{G} : \quad (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0).$$

Melyek lineárisan függők közülük?

?	$\mathcal{E} \circ$	$\mathcal{F} \circ$	$\mathcal{G} \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	---------------------	---------------------	---------------------	-------------------	---

Megoldás:

- $\mathcal{E}$ függő: $1v_1 + 1v_2 + 0v_3 = (0, 0, 0)$
- $\mathcal{F}$ független: valamilyen értelemben ez már lépcsős alakú

(5) Tekintsük az alábbi vektorrendszereket az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

$$\mathcal{E} : \quad (-5, -5, -3), (5, 5, 3), (10, 10, 6);$$

$$\mathcal{F} : \quad (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0);$$

$$\mathcal{G} : \quad (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0).$$

Melyek lineárisan függők közülük?

?	$\mathcal{E} \circ$	$\mathcal{F} \circ$	$\mathcal{G} \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	---------------------	---------------------	---------------------	-------------------	---

Megoldás:

- $\mathcal{E}$ függő: $1v_1 + 1v_2 + 0v_3 = (0, 0, 0)$
- $\mathcal{F}$ független: valamilyen értelemben ez már lépcsős alakú
- $\mathcal{G}$ függő: tartalmazza a nullvektort

(5) Tekintsük az alábbi vektorrendszereket az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

$$\mathcal{E} : \quad (-5, -5, -3), (5, 5, 3), (10, 10, 6);$$

$$\mathcal{F} : \quad (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0);$$

$$\mathcal{G} : \quad (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0).$$

Melyek lineárisan függetlenek közülük?

?	$\mathcal{E} \otimes$	$\mathcal{F} \circ$	$\mathcal{G} \otimes$	egyik sem $\circ$	?
---	-----------------------	---------------------	-----------------------	-------------------	---

Megoldás:

- $\mathcal{E}$ függő: $1v_1 + 1v_2 + 0v_3 = (0, 0, 0)$
- $\mathcal{F}$ független: valamilyen értelemben ez már lépcsős alakú
- $\mathcal{G}$ függő: tartalmazza a nullvektort

(6) Legyen $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ alaphalmaz (más szóval univerzum), és tekintsük az $A = \{2, 3, 4\}$ és $B = \{0, 2, 4\}$ részhalmazait. Melyek az

$$A \cap (\overline{A} \triangle B)$$

halmaz elemei? (Ezeket ikszelje be az alábbi téglalapban!)

?	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

(6) Legyen $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ alaphalmaz (más szóval univerzum), és tekintsük az $A = \{2, 3, 4\}$ és $B = \{0, 2, 4\}$ részhalmazait. Melyek az

$$A \cap (\overline{A} \triangle B)$$

halmaz elemei? (Ezeket ikszelje be az alábbi téglalapban!)

?	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

$$\overline{A} = \{0, 1\}$$

(6) Legyen $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ alaphalmaz (más szóval univerzum), és tekintsük az $A = \{2, 3, 4\}$ és $B = \{0, 2, 4\}$ részhalmazait. Melyek az

$$A \cap (\bar{A} \Delta B)$$

halmaz elemei? (Ezeket ikszelje be az alábbi téglalapban!)

?	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

$$\bar{A} = \{0, 1\}$$

$$A \cap (\bar{A} \Delta B) = A \cap ((\bar{A} \cup B) \setminus (\bar{A} \cap B))$$

(6) Legyen $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ alaphalmaz (más szóval univerzum), és tekintsük az $A = \{2, 3, 4\}$ és $B = \{0, 2, 4\}$ részhalmazait. Melyek az

$$A \cap (\bar{A} \Delta B)$$

halmaz elemei? (Ezeket ikszelje be az alábbi téglalapban!)

?	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

$$\bar{A} = \{0, 1\}$$

$$A \cap (\bar{A} \Delta B) = A \cap ((\bar{A} \cup B) \setminus (\bar{A} \cap B)) = \{2, 3, 4\} \cap (\{0, 1, 2, 4\} \setminus \{0\})$$

(6) Legyen $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ alaphalmaz (más szóval univerzum), és tekintsük az $A = \{2, 3, 4\}$ és $B = \{0, 2, 4\}$ részhalmazait. Melyek az

$$A \cap (\bar{A} \Delta B)$$

halmaz elemei? (Ezeket ikszelje be az alábbi téglalapban!)

?	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

$$\bar{A} = \{0, 1\}$$

$$\begin{aligned} A \cap (\bar{A} \Delta B) &= A \cap ((\bar{A} \cup B) \setminus (\bar{A} \cap B)) = \{2, 3, 4\} \cap (\{0, 1, 2, 4\} \setminus \{0\}) \\ &= \{2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 4\} \end{aligned}$$

(6) Legyen $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ alaphalmaz (más szóval univerzum), és tekintsük az $A = \{2, 3, 4\}$ és $B = \{0, 2, 4\}$ részhalmazait. Melyek az

$$A \cap (\bar{A} \Delta B)$$

halmaz elemei? (Ezeket ikszelje be az alábbi téglalapban!)

?	0 ○	1 ○	2 ⊗	3 ○	4 ⊗	egyik sem ○	?
---	-----	-----	-----	-----	-----	-------------	---

Megoldás:

$$\bar{A} = \{0, 1\}$$

$$A \cap (\bar{A} \Delta B) = A \cap ((\bar{A} \cup B) \setminus (\bar{A} \cap B)) = \{2, 3, 4\} \cap (\{0, 1, 2, 4\} \setminus \{0\})$$

$$= \{2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 4\} = \{2, 4\}$$

(7) Döntse el, igazak-e az alábbi kijelentések! (Természetesen az összes magától értetődő feltevést — mint pl. azt, hogy $v_1, \dots, v_n$ egy vektortér elemei — hozzágondolva, valamint a rövidítéseket értelmesnek feltételezve.)

Ha két sorát felcseréljük, akkor a determináns értéke nem változik.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

Ha $v_1 + \dots + v_n = \vec{0}$, akkor a $v_1, \dots, v_n$ vekt.rendsz. lin. függő.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

Ha A négyzetes mátrix és invertálható, akkor $\det(A) \neq 0$.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

(7) Döntse el, igazak-e az alábbi kijelentések! (Természetesen az összes magától értetődő feltevést — mint pl. azt, hogy $v_1, \dots, v_n$ egy vektortér elemei — hozzágondolva, valamint a rövidítéseket értelmesnek feltételezve.)

Ha két sorát felcseréljük, akkor a determináns értéke nem változik.

!	igen ○	nem ⊗	!
---	--------	-------	---

Ha $v_1 + \dots + v_n = \vec{0}$, akkor a $v_1, \dots, v_n$ vekt.rendsz. lin. függő.

!	igen ○	nem ○	!
---	--------	-------	---

Ha A négyzetes mátrix és invertálható, akkor $\det(A) \neq 0$.

!	igen ○	nem ○	!
---	--------	-------	---

(7) Döntse el, igazak-e az alábbi kijelentések! (Természetesen az összes magától értetődő feltevést — mint pl. azt, hogy $v_1, \dots, v_n$ egy vektortér elemei — hozzágondolva, valamint a rövidítéseket értelmesnek feltételezve.)

Ha két sorát felcseréljük, akkor a determináns értéke nem változik.

!	igen ○	nem ⊗	!
---	--------	-------	---

Ha $v_1 + \dots + v_n = \vec{0}$, akkor a $v_1, \dots, v_n$ vekt.rendsz. lin. függő.

!	igen ⊗	nem ○	!
---	--------	-------	---

Ha A négyzetes mátrix és invertálható, akkor $\det(A) \neq 0$.

!	igen ○	nem ○	!
---	--------	-------	---

(7) Döntse el, igazak-e az alábbi kijelentések! (Természetesen az összes magától értetődő feltevést — mint pl. azt, hogy $v_1, \dots, v_n$ egy vektortér elemei — hozzágondolva, valamint a rövidítéseket értelmesnek feltételezve.)

Ha két sorát felcseréljük, akkor a determináns értéke nem változik.

!	igen ○	nem ⊗	!
---	--------	-------	---

Ha $v_1 + \dots + v_n = \vec{0}$, akkor a $v_1, \dots, v_n$ vekt.rendsz. lin. függő.

!	igen ⊗	nem ○	!
---	--------	-------	---

Ha A négyzetes mátrix és invertálható, akkor $\det(A) \neq 0$.

!	igen ⊗	nem ○	!
---	--------	-------	---

(8) Melyek $\aleph_0$ számosságúak (azaz megszámlálhatóan végtelenek) az alábbi halmazok közül?

?	$\mathbb{R}$ ☐	$\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ☐	$\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ ☐	egyik sem ☐	?
---	------------------------------------	--	---	---------------------------------	---

(8) Melyek $\aleph_0$ számosságúak (azaz megszámlálhatóan végtelenek) az alábbi halmazok közül?

?	$\mathbb{R} \circ$	$\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \circ$	$\mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	--------------------	--	---------------------------------------	-------------------	---

Megoldás:

(8) Melyek $\aleph_0$ számosságúak (azaz megszámlálhatóan végtelenek) az alábbi halmazok közül?

?	$\mathbb{R} \circ$	$\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \circ$	$\mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	--------------------	--	---------------------------------------	-------------------	---

Megoldás:

- $|\mathbb{R}| = c$

(8) Melyek $\aleph_0$ számosságúak (azaz megszámlálhatóan végtelenek) az alábbi halmazok közül?

?	$\mathbb{R} \circ$	$\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \circ$	$\mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	--------------------	--	---------------------------------------	-------------------	---

Megoldás:

- $|\mathbb{R}| = c$
- $|\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = \max(\aleph_0, \max(\aleph_0, \aleph_0)) = \aleph_0$

(8) Melyek $\aleph_0$ számosságúak (azaz megszámlálhatóan végtelenek) az alábbi halmazok közül?

?	$\mathbb{R} \circ$	$\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \circ$	$\mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	--------------------	--	---------------------------------------	-------------------	---

Megoldás:

- $|\mathbb{R}| = c$
- $|\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = \max(\aleph_0, \max(\aleph_0, \aleph_0)) = \aleph_0$
- $\mathbb{N} \setminus \{1, 2\} = \aleph_0$

(8) Melyek $\aleph_0$ számosságúak (azaz megszámlálhatóan végtelenek) az alábbi halmazok közül?

?	$\mathbb{R} \circ$	$\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \otimes$	$\mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \otimes$	egyik sem $\circ$	?
---	--------------------	--	---	-------------------	---

Megoldás:

- $|\mathbb{R}| = c$
- $|\mathbb{Z} \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = \max(\aleph_0, \max(\aleph_0, \aleph_0)) = \aleph_0$
- $\mathbb{N} \setminus \{1, 2\} = \aleph_0$

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : A \rightarrow A, \quad x \mapsto |x|, \text{ továbbá}$$

$$\eta : A \rightarrow A, \quad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szür”=„szürjektív”, „bij”=„bijektív”).

?	μ inj ☐	μ szür ☐	μ bij ☐	η inj ☐	η szür ☐	η bij ☐	?
---	---------------------------------	----------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	-----------------------------------	----------------------------------	---

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : A \rightarrow A, \quad x \mapsto |x|, \text{ továbbá}$$

$$\eta : A \rightarrow A, \quad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szür”=„szürjektív”, „bij”=„bijektív”).

?	μ inj ☐	μ szür ☐	μ bij ☐	η inj ☐	η szür ☐	η bij ☐	?
---	---------------------------------	----------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	-----------------------------------	----------------------------------	---

Megoldás:

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : A \rightarrow A, \quad x \mapsto |x|, \text{ továbbá}$$

$$\eta : A \rightarrow A, \quad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szür”=„szürjektív”, „bij”=„bijektív”).

?	μ inj ☐	μ szür ☐	μ bij ☐	η inj ☐	η szür ☐	η bij ☐	?
---	---------------------------------	----------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	-----------------------------------	----------------------------------	---

Megoldás:

μ :

Nem injektív: $-3 \mapsto 3, 3 \mapsto 3$.

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : A \rightarrow A, \quad x \mapsto |x|, \text{ továbbá}$$

$$\eta : A \rightarrow A, \quad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szür”=„szürjektív”, „bij”=„bijektív”).

?	μ inj ☐	μ szür ☐	μ bij ☐	η inj ☐	η szür ☐	η bij ☐	?
---	---------------------------------	----------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	-----------------------------------	----------------------------------	---

Megoldás:

μ :

Nem injektív: $-3 \mapsto 3, 3 \mapsto 3$.

Nem szürjektív: a -2 -nek nincs őse.

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : A \rightarrow A, \quad x \mapsto |x|, \text{ továbbá}$$

$$\eta : A \rightarrow A, \quad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szür”=„szürjektív”, „bij”=„bijektív”).

?	μ inj ☐	μ szür ☐	μ bij ☐	η inj ☐	η szür ☐	η bij ☐	?
---	---------------------------------	----------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	-----------------------------------	----------------------------------	---

Megoldás:

μ :

Nem injektív: $-3 \mapsto 3, 3 \mapsto 3$.

Nem szürjektív: a -2 -nek nincs őse.

η :

Injektív: ha $-x = -y$, akkor $x = y$.

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : A \rightarrow A, \quad x \mapsto |x|, \text{ továbbá}$$

$$\eta : A \rightarrow A, \quad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szür”=„szürjektív”, „bij”=„bijektív”).

?	μ inj ☐	μ szür ☐	μ bij ☐	η inj ☐	η szür ☐	η bij ☐	?
---	---------------------------------	----------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	-----------------------------------	----------------------------------	---

Megoldás:

μ :

Nem injektív: $-3 \mapsto 3, 3 \mapsto 3$.

Nem szürjektív: a -2 -nek nincs őse.

η :

Injektív: ha $-x = -y$, akkor $x = y$.

Szürjektív: minden $y \in A$ -hoz van olyan x , hogy $x\eta = y$. ($x = -y$)

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : A \rightarrow A, \quad x \mapsto |x|, \text{ továbbá}$$

$$\eta : A \rightarrow A, \quad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szür”=„szürjektív”, „bij”=„bijektív”).

?	μ inj ☐	μ szür ☐	μ bij ☐	η inj ☐	η szür ☐	η bij ☐	?
---	---------------------------------	----------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	-----------------------------------	----------------------------------	---

Megoldás:

μ :

Nem injektív: $-3 \mapsto 3, 3 \mapsto 3$.

Nem szürjektív: a -2 -nek nincs őse.

η :

Injektív: ha $-x = -y$, akkor $x = y$.

Szürjektív: minden $y \in A$ -hoz van olyan x , hogy $x\eta = y$. ($x = -y$)

Bijektív: injektív és szürjektív.

(9) Legyen $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$$\mu : A \rightarrow A, \quad x \mapsto |x|, \text{ továbbá}$$

$$\eta : A \rightarrow A, \quad x \mapsto -x.$$

Jelölje be az igaz kijelentéseket az alábbiak közül (a használt rövidítések: „inj”=„injektív”, „szür”=„szürjektív”, „bij”=„bijektív”).

?	μ inj $\bigcirc$	μ szür $\bigcirc$	μ bij $\bigcirc$	η inj $\otimes$	η szür $\otimes$	η bij $\otimes$	?
---	----------------------	-----------------------	----------------------	----------------------	-----------------------	----------------------	---

Megoldás:

μ :

Nem injektív: $-3 \mapsto 3, 3 \mapsto 3$.

Nem szürjektív: a -2 -nek nincs őse.

η :

Injektív: ha $-x = -y$, akkor $x = y$.

Szürjektív: minden $y \in A$ -hoz van olyan x , hogy $x\eta = y$. ($x = -y$)

Bijektív: injektív és szürjektív.

(10) A téglalapban felsoroltak közül melyek lépnek fel részkifejezésként az

$$(\neg A) \rightarrow B$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Természetesen pl. „ $(\neg A)$ ” helyett „ $\neg A$ ” is írható, ez a feladat lényegét nem érinti.)

?	$A \wedge B \bigcirc$	$A \wedge (\neg B) \bigcirc$	$(\neg A) \wedge B \bigcirc$	$(\neg A) \wedge (\neg B) \bigcirc$	
				egyik sem $\bigcirc$	?

(10) A téglalapban felsoroltak közül melyek lépnek fel részkifejezésként az

$$(\neg A) \rightarrow B$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Természetesen pl. „ $(\neg A)$ ” helyett „ $\neg A$ ” is írható, ez a feladat lényegét nem érinti.)

?	$A \wedge B \bigcirc$	$A \wedge (\neg B) \bigcirc$	$(\neg A) \wedge B \bigcirc$	$(\neg A) \wedge (\neg B) \bigcirc$	
				egyik sem $\bigcirc$	?

Megoldás:

(10) A téglalapban felsoroltak közül melyek lépnek fel részkifejezésként az

$$(\neg A) \rightarrow B$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Természetesen pl. „ $(\neg A)$ ” helyett „ $\neg A$ ” is írható, ez a feladat lényegét nem érinti.)

?	$A \wedge B \bigcirc$	$A \wedge (\neg B) \bigcirc$	$(\neg A) \wedge B \bigcirc$	$(\neg A) \wedge (\neg B) \bigcirc$
				egyik sem $\bigcirc$
				?

Megoldás:

$(\neg$	$A)$	$\rightarrow$	B
h	i	i	i
h	i	i	h
i	h	i	i
i	h	h	h

(10) A téglalapban felsoroltak közül melyek lépnek fel részkifejezésként az

$$(\neg A) \rightarrow B$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Természetesen pl. „ $(\neg A)$ ” helyett „ $\neg A$ ” is írható, ez a feladat lényegét nem érinti.)

?	$A \wedge B \bigcirc$	$A \wedge (\neg B) \bigcirc$	$(\neg A) \wedge B \bigcirc$	$(\neg A) \wedge (\neg B) \bigcirc$
				egyik sem $\bigcirc$
				?

Megoldás:

$(\neg A)$		$\rightarrow B$	
<i>h</i>	i	<i>i</i>	i
<i>h</i>	i	<i>i</i>	h
<i>i</i>	h	<i>i</i>	i
<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>

$$(\neg A) \rightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$$

(10) A téglalapban felsoroltak közül melyek lépnek fel részkifejezésként az

$$(\neg A) \rightarrow B$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Természetesen pl. „ $(\neg A)$ ” helyett „ $\neg A$ ” is írható, ez a feladat lényegét nem érinti.)

?	$A \wedge B \otimes$	$A \wedge (\neg B) \otimes$	$(\neg A) \wedge B \otimes$	$(\neg A) \wedge (\neg B) \bigcirc$
				egyik sem $\bigcirc$
				?

Megoldás:

$(\neg A)$		$\rightarrow B$	
<i>h</i>	i	<i>i</i>	i
<i>h</i>	i	<i>i</i>	h
<i>i</i>	h	<i>i</i>	i
<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>

$$(\neg A) \rightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$$

- 1 dmnv1j-02.C1-B
- 2 dmnv1-12.C1-D
- 3 dmnv1-01.C1-C
- 4 dmnv1CSP-25-A
- 5 dmnv1-14.C0-C
- 6 1. Feladatsor
- 7 2. Feladatsor
- 8 3. Feladatsor
- 9 Válogatott feladatok

- 1 Relációszorzás
- 2 Leképezések szorzása, tulajdonságai
- 3 Reláció tulajdonságai
- 4 Vektoriális szorzat
- 5 Mátrix inverze
- 6 Mátrixok szorzása
- 7 Lineáris függetlenség (elméleti kérdések)
- 8 Teljes diszjunktív normálforma
- 9 Mátrix inverze és szorzás
- 10 Negáció (predikátumkalkulus)

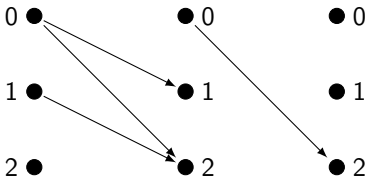
(1) Legyen $A = \{0, 1, 2\}$, $\alpha = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(0, 2)\} \subseteq A^2$.
Melyik az $\alpha\beta$ reláció az alábbiak közül?

!	$A^2 \circ$	$A^2 \setminus \alpha \circ$	$\emptyset \circ$	$\alpha \circ$	$\beta \circ$	egyik sem $\circ$	!
---	-------------	------------------------------	-------------------	----------------	---------------	-------------------	---

(1) Legyen $A = \{0, 1, 2\}$, $\alpha = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(0, 2)\} \subseteq A^2$.
Melyik az $\alpha\beta$ reláció az alábbiak közül?

!	$A^2 \circ$	$A^2 \setminus \alpha \circ$	$\emptyset \circ$	$\alpha \circ$	$\beta \circ$	egyik sem $\circ$	!
---	-------------	------------------------------	-------------------	----------------	---------------	-------------------	---

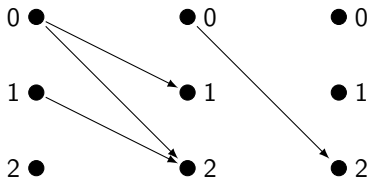
Megoldás



(1) Legyen $A = \{0, 1, 2\}$, $\alpha = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(0, 2)\} \subseteq A^2$.
Melyik az $\alpha\beta$ reláció az alábbiak közül?

!	$A^2 \circ$	$A^2 \setminus \alpha \circ$	$\emptyset \circ$	$\alpha \circ$	$\beta \circ$	egyik sem $\circ$	!
---	-------------	------------------------------	-------------------	----------------	---------------	-------------------	---

Megoldás

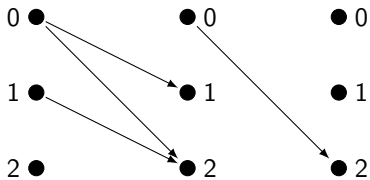


$$\alpha\beta = \emptyset$$

(1) Legyen $A = \{0, 1, 2\}$, $\alpha = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \subseteq A^2$ és $\beta = \{(0, 2)\} \subseteq A^2$.
Melyik az $\alpha\beta$ reláció az alábbiak közül?

!	$A^2 \circ$	$A^2 \setminus \alpha \circ$	$\emptyset \otimes$	$\alpha \circ$	$\beta \circ$	egyik sem $\circ$	!
---	-------------	------------------------------	---------------------	----------------	---------------	-------------------	---

Megoldás



$$\alpha\beta = \emptyset$$

(2) Legyen

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$f : A \rightarrow B, x \mapsto x + 2, \quad g : B \rightarrow A, x \mapsto |\{y : y \in B \text{ és } y^2 \leq x\}|.$$

Melyek igazak az alábbi kijelentések közül?

?	f injektív ☐	fg injektív ☐	g injektív ☐
		g szürjektív ☐	egyik sem ☐
			?

(2) Legyen

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$f : A \rightarrow B, x \mapsto x + 2, \quad g : B \rightarrow A, x \mapsto |\{y : y \in B \text{ és } y^2 \leq x\}|.$$

Melyek igazak az alábbi kijelentések közül?

?	f injektív ☐	fg injektív ☐	g injektív ☐
		g szürjektív ☐	egyik sem ☐
			?

Megoldás

- f injektív, mert különböző elemek képe különböző

(2) Legyen

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$f : A \rightarrow B, x \mapsto x + 2, \quad g : B \rightarrow A, x \mapsto |\{y : y \in B \text{ és } y^2 \leq x\}|.$$

Melyek igazak az alábbi kijelentések közül?

?	f injektív ☐	fg injektív ☐	g injektív ☐
g szürjektív ☐		egyik sem ☐	?

Megoldás

- f injektív, mert különböző elemek képe különböző
- g nem injektív, mert $1g = 1 = 2g$

(2) Legyen

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$f : A \rightarrow B, x \mapsto x + 2, \quad g : B \rightarrow A, x \mapsto |\{y : y \in B \text{ és } y^2 \leq x\}|.$$

Melyek igazak az alábbi kijelentések közül?

?	f injektív ☐	fg injektív ☐	g injektív ☐
g szürjektív ☐		egyik sem ☐	?

Megoldás

- f injektív, mert különböző elemek képe különböző
- g nem injektív, mert $1g = 1 = 2g$
- g szürjektív, mert $1g = 1$ és $4g = 2$, azaz minden A -beli elemnek van őse

(2) Legyen

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$f : A \rightarrow B, x \mapsto x + 2, \quad g : B \rightarrow A, x \mapsto |\{y : y \in B \text{ és } y^2 \leq x\}|.$$

Melyek igazak az alábbi kijelentések közül?

?	f injektív ☐	fg injektív ☐	g injektív ☐
g szürjektív ☐		egyik sem ☐	?

Megoldás

- f injektív, mert különböző elemek képe különböző
- g nem injektív, mert $1g = 1 = 2g$
- g szürjektív, mert $1g = 1$ és $4g = 2$, azaz minden A -beli elemnek van őse
- $fg : 1 \mapsto 1; 2 \mapsto 2$, így az fg injektív

(2) Legyen

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$f : A \rightarrow B, x \mapsto x + 2, \quad g : B \rightarrow A, x \mapsto |\{y : y \in B \text{ és } y^2 \leq x\}|.$$

Melyek igazak az alábbi kijelentések közül?

?	f injektív $\otimes$	fg injektív $\otimes$	g injektív $\circ$
g szürjektív $\otimes$		egyik sem $\circ$	?

Megoldás

- f injektív, mert különböző elemek képe különböző
- g nem injektív, mert $1g = 1 = 2g$
- g szürjektív, mert $1g = 1$ és $4g = 2$, azaz minden A -beli elemnek van őse
- $fg : 1 \mapsto 1; 2 \mapsto 2$, így az fg injektív

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $\alpha = \{(x, y) : |x - y| \text{ páratlan szám}\} \subseteq A^2$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon értelmezett α reláció?

?	reflexív ☐	antiszimmetrikus ☐	transzitiv ☐
---	--------------------------------	--	----------------------------------

szimmetrikus ☐	egyik sem ☐	?
------------------------------------	---------------------------------	---

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $\alpha = \{(x, y) : |x - y| \text{ páratlan szám}\} \subseteq A^2$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon értelmezett α reláció?

?	reflexív ☐	antiszimmetrikus ☐	transzitiv ☐
szimmetrikus ☐		egyik sem ☐	?

Megoldás

- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \alpha$.

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $\alpha = \{(x, y) : |x - y| \text{ páratlan szám}\} \subseteq A^2$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon értelmezett α reláció?

?	reflexív ☐	antiszimmetrikus ☐	transzitiv ☐
szimmetrikus ☐		egyik sem ☐	?

Megoldás

- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \alpha$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 1) \in \alpha$, de $(1, 2) \neq (2, 1)$.

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $\alpha = \{(x, y) : |x - y| \text{ páratlan szám}\} \subseteq A^2$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon értelmezett α reláció?

?	reflexív ☐	antiszimmetrikus ☐	transzitiv ☐
szimmetrikus ☐		egyik sem ☐	?

Megoldás

- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \alpha$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 1) \in \alpha$, de $(1, 2) \neq (2, 1)$.
- Nem transzitiv, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 3) \in \alpha$, de $(1, 3) \notin \alpha$.

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $\alpha = \{(x, y) : |x - y| \text{ páratlan szám}\} \subseteq A^2$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon értelmezett α reláció?

?	reflexív ☐	antiszimmetrikus ☐	transzitiv ☐
---	--------------------------------	--	----------------------------------

szimmetrikus ☐	egyik sem ☐	?
------------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás

- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \alpha$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 1) \in \alpha$, de $(1, 2) \neq (2, 1)$.
- Nem transzitiv, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 3) \in \alpha$, de $(1, 3) \notin \alpha$.
- Szimmetrikus, mert bármely $x, y \in A$ elemekre
 $(x, y) \in \alpha \iff |x - y| \text{ páratlan} \iff |y - x| \text{ páratlan} \iff (y, x) \in \alpha$.

(3) Legyen $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $\alpha = \{(x, y) : |x - y| \text{ páratlan szám}\} \subseteq A^2$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon értelmezett α reláció?

?	reflexív ☐	antiszimmetrikus ☐	transzitiv ☐
---	--------------------------------	--	----------------------------------

szimmetrikus ☒	egyik sem ☐	?
---	---------------------------------	---

Megoldás

- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \alpha$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 1) \in \alpha$, de $(1, 2) \neq (2, 1)$.
- Nem transzitiv, mert $(1, 2) \in \alpha$ és $(2, 3) \in \alpha$, de $(1, 3) \notin \alpha$.
- Szimmetrikus, mert bármely $x, y \in A$ elemekre
 $(x, y) \in \alpha \iff |x - y| \text{ páratlan} \iff |y - x| \text{ páratlan} \iff (y, x) \in \alpha$.

(4) Melyik az $(1, 3, 3) \times (-2, 3, 1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6, -5, 9) \bigcirc$	$(6, 9, -7) \bigcirc$	$(-6, -7, 9) \bigcirc$
---	------------------------	-----------------------	------------------------

$(3, 5, 9) \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
----------------------	----------------------	---

(4) Melyik az $(1, 3, 3) \times (-2, 3, 1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6, -5, 9) \circ$	$(6, 9, -7) \circ$	$(-6, -7, 9) \circ$
---	---------------------	--------------------	---------------------

$(3, 5, 9) \circ$	egyik sem $\circ$	!
-------------------	-------------------	---

Megoldás

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(4) Melyik az $(1, 3, 3) \times (-2, 3, 1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6, -5, 9) \bigcirc$	$(6, 9, -7) \bigcirc$	$(-6, -7, 9) \bigcirc$
---	------------------------	-----------------------	------------------------

$(3, 5, 9) \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
----------------------	----------------------	---

Megoldás

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

(4) Melyik az $(1, 3, 3) \times (-2, 3, 1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6, -5, 9) \bigcirc$	$(6, 9, -7) \bigcirc$	$(-6, -7, 9) \bigcirc$
---	------------------------	-----------------------	------------------------

$(3, 5, 9) \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
----------------------	----------------------	---

Megoldás

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= i \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= i \cdot (-6) - j \cdot 7 + k \cdot 9
 \end{aligned}$$

(4) Melyik az $(1, 3, 3) \times (-2, 3, 1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6, -5, 9) \bigcirc$	$(6, 9, -7) \bigcirc$	$(-6, -7, 9) \bigcirc$
---	------------------------	-----------------------	------------------------

$(3, 5, 9) \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
----------------------	----------------------	---

Megoldás

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= i \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= i \cdot (-6) - j \cdot 7 + k \cdot 9 = -6i - 7j + 9k \end{aligned}$$

(4) Melyik az $(1, 3, 3) \times (-2, 3, 1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6, -5, 9) \bigcirc$	$(6, 9, -7) \bigcirc$	$(-6, -7, 9) \bigcirc$
---	------------------------	-----------------------	------------------------

$(3, 5, 9) \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
----------------------	----------------------	---

Megoldás

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= i \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= i \cdot (-6) - j \cdot 7 + k \cdot 9 = -6i - 7j + 9k = (-6, -7, 9)
 \end{aligned}$$

(4) Melyik az $(1, 3, 3) \times (-2, 3, 1)$ vektoriális szorzat értéke az alábbiak közül?

!	$(-6, -5, 9) \bigcirc$	$(6, 9, -7) \bigcirc$	$(-6, -7, 9) \otimes$
---	------------------------	-----------------------	-----------------------

$(3, 5, 9) \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
----------------------	----------------------	---

Megoldás

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= i \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= i \cdot (-6) - j \cdot 7 + k \cdot 9 = -6i - 7j + 9k = (-6, -7, 9)
 \end{aligned}$$

(5) Melyik az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverze az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	☐	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	☐
---	---	-----------------------	--	-----------------------	---	-----------------------

egyik sem ☐

!

(5) Melyik az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverze az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bigcirc$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bigcirc$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes$
---	--	---	---

egyik sem $\bigcirc$	!
----------------------	---

1	-2	-1	1	0	0
1	-1	-1	0	1	0
0	0	-1	0	0	1

$$\begin{array}{|ccc|ccc|}
 \hline
 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \xrightarrow{(1)}
 \begin{array}{|ccc|ccc|}
 \hline
 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 \end{array}$$

(1) : A 2. sort kivonom az 1. sorból.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

(1) : A 2. sort kivonom az 1. sorból.

(2) : A 3. sort megszorozom (-1) -gyel.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

(1) : A 2. sort kivonom az 1. sorból.

(2) : A 3. sort megszorozom (-1) -gyel.

(3) : A 2. sor 2-szeresét hozzáadom az 1. sorhoz.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{(4)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

(1) : A 2. sort kivonom az 1. sorból.

(2) : A 3. sort megszorozom (-1) -gyel.

(3) : A 2. sor 2-szeresét hozzáadom az 1. sorhoz.

(4) : A 3. sort hozzáadom az 1. sorhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) : A 2. sort kivonom az 1. sorból.

(2) : A 3. sort megszorozom (-1) -gyel.

(3) : A 2. sor 2-szeresét hozzáadom az 1. sorhoz.

(4) : A 3. sort hozzáadom az 1. sorhoz.

(6) Melyik az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bigcirc$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bigcirc$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bigcirc$
---	--	--	--

egyik sem $\bigcirc$	!
----------------------	---

(6) Melyik az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bigcirc$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bigcirc$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bigcirc$
---	--	--	--

egyik sem ☐ !

Megoldás:

			1	-2	-1
			1	-1	-1
			0	0	-1
1	-2	-1	-1	0	2
1	-1	-1	0	-1	1
0	0	-1	0	0	1

(6) Melyik az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes$
---	---	---	---

egyik sem $\circ$!

Megoldás:

			1	-2	-1
			1	-1	-1
			0	0	-1
1	-2	-1	-1	0	2
1	-1	-1	0	-1	1
0	0	-1	0	0	1

(7) Legyen $n \geq 2$, és legyen $v_1, \dots, v_n$ egy vektorrendszer. Az alábbi jelöléseket használva

- $\oplus$: valamelyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
- $\uplus$: mindegyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
- $\bullet$: a zérusvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő

igazak-e a tekintett vektorrendszerre vonatkozó alábbi kijelentések?

Ha a vektorrendszer lineárisan függő, akkor $\oplus$.

Ha $\bullet$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.

Ha $\uplus$, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!

(7) Legyen $n \geq 2$, és legyen $v_1, \dots, v_n$ egy vektorrendszer. Az alábbi jelöléseket használva

- $\oplus$: valamelyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
- $\uplus$: mindegyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
- $\bullet$: a zérusvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő

igazak-e a tekintett vektorrendszerre vonatkozó alábbi kijelentések?

Ha a vektorrendszer lineárisan függő, akkor $\oplus$.

Ha $\bullet$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.

Ha $\uplus$, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

(7) Legyen $n \geq 2$, és legyen $v_1, \dots, v_n$ egy vektorrendszer. Az alábbi jelöléseket használva

- $\oplus$: valamelyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
- $\uplus$: mindegyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
- $\bullet$: a zérusvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő

igazak-e a tekintett vektorrendszerre vonatkozó alábbi kijelentések?

Ha a vektorrendszer lineárisan függő, akkor $\oplus$.

Ha $\bullet$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.

Ha $\uplus$, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

(7) Legyen $n \geq 2$, és legyen $v_1, \dots, v_n$ egy vektorrendszer. Az alábbi jelöléseket használva

- $\oplus$: valamelyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
- $\uplus$: mindegyik vektor az előzőek lineáris kombinációja
- $\bullet$: a zérusvektort csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő

igazak-e a tekintett vektorrendszerre vonatkozó alábbi kijelentések?

Ha a vektorrendszer lineárisan függő, akkor $\oplus$.

Ha $\bullet$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.

Ha $\uplus$, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.

!	igen $\otimes$	nem $\circ$	!
!	igen $\otimes$	nem $\circ$	!
!	igen $\otimes$	nem $\circ$	!

(8) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) van a

$$\neg \left(\left(\neg (A \rightarrow B) \right) \rightarrow C \right)$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkciós tagok száma!)

!	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	5 ☐	6 ☐	7 ☐	egyik sem ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

(8) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) van a

$$\neg \left(\left(\neg (A \rightarrow B) \right) \rightarrow C \right)$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkciós tagok száma!)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyik sem ○	!
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-------------	---

$$\neg \left(\left(\neg (A \rightarrow B) \right) \rightarrow C \right)$$

<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>

(8) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) van a

$$\neg \left(\left(\neg (A \rightarrow B) \right) \rightarrow C \right)$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkciós tagok száma!)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyik sem ○	!
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-------------	---

$$\neg \left(\left(\neg (A \rightarrow B) \right) \rightarrow C \right)$$

<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>



Csak 1 darab igaz sor van

(8) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) van a

$$\neg \left(\left(\neg (A \rightarrow B) \right) \rightarrow C \right)$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkciós tagok száma!)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyik sem ○	!
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-------------	---

$$\neg \left(\left(\neg (A \rightarrow B) \right) \rightarrow C \right)$$

<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>



Csak 1 darab igaz sor van,
azaz 1 klóz van a TDNF-ban

(8) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) van a

$$\neg \left(\left(\neg (A \rightarrow B) \right) \rightarrow C \right)$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkciós tagok száma!)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	egyik sem ○	!
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-------------	---

$$\neg \left(\left(\neg (A \rightarrow B) \right) \rightarrow C \right)$$

<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>

$\Rightarrow$

Csak 1 darab igaz sor van,
azaz 1 klóz van a TDNF-ban,
tehát nincs $\vee$ -jel.

(8) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) van a

$$\neg \left(\left(\neg (A \rightarrow B) \right) \rightarrow C \right)$$

formula teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkciós tagok száma!)

!	0 $\otimes$	1 $\bigcirc$	2 $\bigcirc$	3 $\bigcirc$	4 $\bigcirc$	5 $\bigcirc$	6 $\bigcirc$	7 $\bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	-------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	----------------------	---

$$\neg \left(\left(\neg (A \rightarrow B) \right) \rightarrow C \right)$$

<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>h</i>

$\Rightarrow$

Csak 1 darab igaz sor van,
azaz 1 klóz van a TDNF-ban,
tehát nincs $\vee$ -jel.

(9) Az X mátrixról tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \circ$
---	--	--	--

$\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \circ$	egyik sem $\circ$	!
--	--	-------------------	---

(9) Az X mátrixról tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \circ$
---	--	--	--

$\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \circ$	egyik sem $\circ$	!
--	--	-------------------	---

Megoldás:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(9) Az X mátrixról tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \circ$
---	--	--	--

$\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \circ$	egyik sem $\circ$	!
--	--	-------------------	---

Megoldás:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(9) Az X mátrixról tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \circ$
---	--	--	--

$\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \circ$	egyik sem $\circ$	!
--	--	-------------------	---

Megoldás:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(9) Az X mátrixról tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \circ$
---	--	--	--

$\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \circ$	egyik sem $\circ$	!
--	--	-------------------	---

Megoldás:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(9) Az X mátrixról tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik X az alábbi mátrixok közül?

!	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \circ$
---	--	--	--

$\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \otimes$	egyik sem $\circ$	!
--	--	-------------------	---

Megoldás:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(10) Tekintsük az alábbi formulákat:

$$\begin{aligned} F : & \quad (\exists x)(\exists y)(D(x, y) \rightarrow x = y) \\ G : & \quad (\exists x)\neg\left((\exists y)(D(x, y) \rightarrow x = y)\right) \\ H : & \quad (\forall x)(\forall y)(D(x, y) \wedge \neg(x = y)) \\ K : & \quad (\exists x)(\exists y)(\neg D(x, y) \rightarrow \neg(x = y)). \end{aligned}$$

A téglalapban felsoroltak közül melyik ekvivalens $\neg F$ -fel, azaz az F formula negáltjával?

!	$G \bigcirc$	$H \bigcirc$	$K \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	--------------	--------------	--------------	----------------------	---

(10) Tekintsük az alábbi formulákat:

$$\begin{aligned} F : & (\exists x)(\exists y)(D(x, y) \rightarrow x = y) \\ G : & (\exists x)\neg\left((\exists y)(D(x, y) \rightarrow x = y)\right) \\ H : & (\forall x)(\forall y)(D(x, y) \wedge \neg(x = y)) \\ K : & (\exists x)(\exists y)(\neg D(x, y) \rightarrow \neg(x = y)). \end{aligned}$$

A téglalapban felsoroltak közül melyik ekvivalens $\neg F$ -fel, azaz az F formula negáltjával?

!	$G \bigcirc$	$H \otimes$	$K \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	--------------	-------------	--------------	----------------------	---

- 1 dmnv1j-02.C1-B
- 2 dmnv1-12.C1-D
- 3 dmnv1-01.C1-C**
- 4 dmnv1CSP-25-A
- 5 dmnv1-14.C0-C
- 6 1. Feladatsor
- 7 2. Feladatsor
- 8 3. Feladatsor
- 9 Válogatott feladatok

- 1 Mátrixszorzás
- 2 Mátrix inverze
- 3 Lineáris függetlenség
- 4 Relációk tulajdonságai
- 5 Determináns
- 6 Tautológia (ítéletkalkulus)
- 7 Determináns és mátrixszorzás (elméleti kérdések)
- 8 Tautológia (predikátumkalkulus)
- 9 Leképezések tulajdonságai
- 10 Számosságok

(1) Melyik az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \circ$
---	--	--	--	--

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \circ$	egyik sem $\circ$	!
--	-------------------	---

(1) Melyik az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \circ$
---	--	--	--	--

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \circ$	egyik sem $\circ$	!
--	-------------------	---

Megoldás:

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & -1 & -2 \\
 & & -1 & -1 \\
 \hline
 -1 & -2 & 3 & 4 \\
 -1 & -1 & 2 & 3
 \end{array}$$

(1) Melyik az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzete az alábbiak közül?

!	$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \circ$
---	--	--	--	--

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \otimes$	egyik sem $\circ$	!
--	-------------------	---

Megoldás:

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & -1 & -2 \\
 & & -1 & -1 \\
 \hline
 -1 & -2 & 3 & 4 \\
 -1 & -1 & 2 & 3
 \end{array}$$

(2) Jelölje B az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ inverzét. Mennyi B elemeinek az összege (azaz mennyi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$)?

!	0 ○	1 ○	$\frac{1}{4}$ ○	$-\frac{1}{2}$ ○	-1 ○	9 ○
---	-----	-----	-----------------	------------------	------	-----

-4 ○	$\frac{3}{2}$ ○	egyik sem ○	!
------	-----------------	-------------	---

(2) Jelölje B az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ inverzét. Mennyi B elemeinek az összege (azaz mennyi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$)?

!	0 ○	1 ○	$\frac{1}{4}$ ○	$-\frac{1}{2}$ ○	-1 ○	9 ○
---	-----	-----	-----------------	------------------	------	-----

-4 ○	$\frac{3}{2}$ ○	egyik sem ○	!
------	-----------------	-------------	---

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(2) Jelölje B az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ inverzét. Mennyi B elemeinek az összege (azaz mennyi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$)?

!	0 ○	1 ○	$\frac{1}{4}$ ○	$-\frac{1}{2}$ ○	-1 ○	9 ○
---	-----	-----	-----------------	------------------	------	-----

-4 ○	$\frac{3}{2}$ ○	egyik sem ○	!
------	-----------------	-------------	---

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Jelölje B az $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ inverzét. Mennyi B elemeinek az összege (azaz mennyi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}$)?

!	0 ○	1 ○	$\frac{1}{4}$ ○	$-\frac{1}{2}$ ○	$-1 \otimes$	9 ○
---	-----	-----	-----------------	------------------	--------------	-----

-4 ○	$\frac{3}{2}$ ○	egyik sem ○	!
--------	-----------------	-------------	---

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbb{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbb{R}^4$ -beli

$$(-1, 2, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (-1, x, -1, -2)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

?	0 ☐	1 ☐	2 ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

(3) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbb{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbb{R}^4$ -beli

$$(-1, 2, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (-1, x, -1, -2)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

?	0 ☐	1 ☐	2 ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(3) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbb{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbb{R}^4$ -beli

$$(-1, 2, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (-1, x, -1, -2)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

?	0 ☐	1 ☐	2 ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ha $x = 2$, akkor

$$\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbb{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbb{R}^4$ -beli

$$(-1, 2, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (-1, x, -1, -2)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

?	0 ☐	1 ☐	2 ☐	egyik sem ☐	?
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ha $x = 2$, akkor

$$\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha $x \neq 2$, akkor

$$\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & c \neq 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & c \neq 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) A téglalapban felsorolt $x \in \mathbb{R}$ értékek közül mikor lesz az $\mathbb{R}^4$ -beli

$$(-1, 2, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (-1, x, -1, -2)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

?	0 $\bigcirc$	1 $\bigcirc$	2 $\otimes$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	--------------	--------------	-------------	----------------------	---

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ha $x = 2$, akkor

$$\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha $x \neq 2$, akkor

$$\xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & c \neq 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & c \neq 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Az $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\}$ reláció mely tulajdonságokkal rendelkezik a téglalapban felsoroltak közül?

?	transzítív ☐	antiszimmetrikus ☐	dichotom ☐	egyik sem ☐	?
---	----------------------------------	--	--------------------------------	---------------------------------	---

(4) Az $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\}$ reláció mely tulajdonságokkal rendelkezik a téglalapban felsoroltak közül?

?	transzítív ☐	antiszimmetrikus ☐	dichotom ☐	egyik sem ☐	?
---	----------------------------------	--	--------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

- Transzítív, mert $x^2 \leq y^2$ -ből és $y^2 \leq z^2$ -ből következik, hogy $x^2 \leq z^2$, mert $x^2 \leq y^2 \leq z^2$.

(4) Az $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\}$ reláció mely tulajdonságokkal rendelkezik a téglalapban felsoroltak közül?

?	transzítív ☐	antiszimmetrikus ☐	dichotom ☐	egyik sem ☐	?
---	----------------------------------	--	--------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

- Transzítív, mert $x^2 \leq y^2$ -ből és $y^2 \leq z^2$ -ből következik, hogy $x^2 \leq z^2$, mert $x^2 \leq y^2 \leq z^2$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(-1, 1) \in \alpha$ és $(1, -1) \in \alpha$, de $1 \neq -1$.

(4) Az $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\}$ reláció mely tulajdonságokkal rendelkezik a téglalapban felsoroltak közül?

?	transzítív ○	antiszimmetrikus ○	dichotom ○	egyik sem ○	?
---	--------------	--------------------	------------	-------------	---

Megoldás:

- Transzítív, mert $x^2 \leq y^2$ -ből és $y^2 \leq z^2$ -ből következik, hogy $x^2 \leq z^2$, mert $x^2 \leq y^2 \leq z^2$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(-1, 1) \in \alpha$ és $(1, -1) \in \alpha$, de $1 \neq -1$.
- Dichotom, mert bármely két szám négyzete vagy egyenlő, vagy egyik nagyobb mint a másik.

(4) Az $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\}$ reláció mely tulajdonságokkal rendelkezik a téglalapban felsoroltak közül?

?	transzítív $\otimes$	antiszimmetrikus $\circ$	dichotom $\otimes$	egyik sem $\circ$	?
---	----------------------	--------------------------	--------------------	-------------------	---

Megoldás:

- Transzítív, mert $x^2 \leq y^2$ -ből és $y^2 \leq z^2$ -ből következik, hogy $x^2 \leq z^2$, mert $x^2 \leq y^2 \leq z^2$.
- Nem antiszimmetrikus, mert $(-1, 1) \in \alpha$ és $(1, -1) \in \alpha$, de $1 \neq -1$.
- Dichotom, mert bármely két szám négyzete vagy egyenlő, vagy egyik nagyobb mint a másik.

(5) Mi az alábbi determináns

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix}$$

értékének utolsó számjegye a tízes számrendszerben? (Pl. a -2006 utolsó számjegye 6, a 2007 utolsó számjegye 7, a 130 utolsó számjegye pedig 0.)
(Útmutatás: az ötletes vizsgázó ki sem számolja a determinánst!)

?	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	8 ☐	9 ☐
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

d nem egész szám ☐	az előzőek egyike sem ☐	?
--	---	---

(5) Mi az alábbi determináns

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix}$$

értékének utolsó számjegye a tízes számrendszerben? (Pl. a -2006 utolsó számjegye 6, a 2007 utolsó számjegye 7, a 130 utolsó számjegye pedig 0.)
(Útmutatás: az ötletes vizsgázó ki sem számolja a determinánst!)

?	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	8 ☐	9 ☐
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

d nem egész szám ☐	az előzőek egyike sem ☐	?
--	---	---

Megoldás: Vandermonde-determináns:

(5) Mi az alábbi determináns

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix}$$

értékének utolsó számjegye a tízes számrendszerben? (Pl. a -2006 utolsó számjegye 6, a 2007 utolsó számjegye 7, a 130 utolsó számjegye pedig 0.)
(Útmutatás: az ötletes vizsgázó ki sem számolja a determinánst!)

?	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	8 ☐	9 ☐
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

d nem egész szám ☐	az előzőek egyike sem ☐	?
--	---	---

Megoldás: Vandermonde-determináns:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix} = (3-1)(6-1)(6-3).$$

(5) Mi az alábbi determináns

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix}$$

értékének utolsó számjegye a tízes számrendszerben? (Pl. a -2006 utolsó számjegye 6, a 2007 utolsó számjegye 7, a 130 utolsó számjegye pedig 0.)
(Útmutatás: az ötletes vizsgázó ki sem számolja a determinánst!)

?	0 ☒	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	8 ☐	9 ☐
---	------------------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

d nem egész szám ☐	az előzőek egyike sem ☐	?
--	---	---

Megoldás: Vandermonde-determináns:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix} = (3-1)(6-1)(6-3).$$

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg(A \rightarrow A))$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$$

!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg(A \rightarrow A))$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$$

!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg(A \rightarrow A))$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$$

!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$(A \wedge \neg A) \leftrightarrow (\neg(A \rightarrow A))$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$$

!	igen ⊗	nem ○	!
!	igen ⊗	nem ○	!
!	igen ○	nem ⊗	!

(7) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

továbbá $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ és $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ valós számokból álló négyzetes mátrixot jelöl?

Ha $\det(AB) = 2007$, akkor B invertálható.

$$BEA = AEB$$

Ha $\det(AB) = 1$, akkor A invertálható.

!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!

(7) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

továbbá $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ és $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ valós számokból álló négyzetes mátrixot jelöl?

Ha $\det(AB) = 2007$, akkor B invertálható.

$$BEA = AEB$$

Ha $\det(AB) = 1$, akkor A invertálható.

!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

Megoldás:

- $\det(AB) = \det(A) \det(B) \implies 2007 = \det(AB) = \det(A) \det(B) \implies \det(B) \neq 0 \implies B$ invertálható.

(7) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

továbbá $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ és $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ valós számokból álló négyzetes mátrixot jelöl?

Ha $\det(AB) = 2007$, akkor B invertálható.

$$BEA = AEB$$

Ha $\det(AB) = 1$, akkor A invertálható.

!	igen $\otimes$	nem $\circ$	!
!	igen $\circ$	nem $\otimes$	!
!	igen $\circ$	nem $\circ$	!

Megoldás:

- $\det(AB) = \det(A) \det(B) \implies 2007 = \det(AB) = \det(A) \det(B) \implies \det(B) \neq 0 \implies B$ invertálható.
- $BEA = BA$, $AEB = AB$, és mivel a mátrixszorzás nem kommutatív, így $AB \neq BA$ minden A, B esetén

(7) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

továbbá $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ és $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ valós számokból álló négyzetes mátrixot jelöl?

Ha $\det(AB) = 2007$, akkor B invertálható.

$$BEA = AEB$$

Ha $\det(AB) = 1$, akkor A invertálható.

!	igen $\otimes$	nem $\circ$	!
!	igen $\circ$	nem $\otimes$	!
!	igen $\otimes$	nem $\circ$	!

Megoldás:

- $\det(AB) = \det(A) \det(B) \implies 2007 = \det(AB) = \det(A) \det(B) \implies \det(B) \neq 0 \implies B$ invertálható.
- $BEA = BA$, $AEB = AB$, és mivel a mátrixszorzás nem kommutatív, így $AB \neq BA$ minden A, B esetén
- $\det(AB) = \det(A) \det(B) \implies 1 = \det(AB) = \det(A) \det(B) \implies \det(A) \neq 0 \implies A$ invertálható.

(8) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left((\exists x)B(x) \wedge (\exists y)C(y) \right) \rightarrow (\exists x)(B(x) \wedge C(x))$$

$$\neg(\forall x)(\exists y)B(x, y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(y, x))$$

$$(\exists x)(\forall y)B(x, y) \leftrightarrow (\exists y)(\forall x)B(y, x)$$

!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!

(8) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left((\exists x)B(x) \wedge (\exists y)C(y) \right) \rightarrow (\exists x)(B(x) \wedge C(x))$$

$$\neg(\forall x)(\exists y)B(x, y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(y, x))$$

$$(\exists x)(\forall y)B(x, y) \leftrightarrow (\exists y)(\forall x)B(y, x)$$

!	igen ○	nem ⊗	!
!	igen ○	nem ○	!
!	igen ○	nem ○	!

(8) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left((\exists x)B(x) \wedge (\exists y)C(y) \right) \rightarrow (\exists x)(B(x) \wedge C(x))$$

$$\neg(\forall x)(\exists y)B(x, y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(y, x))$$

$$(\exists x)(\forall y)B(x, y) \leftrightarrow (\exists y)(\forall x)B(y, x)$$

!	igen ○	nem ⊗	!
!	igen ⊗	nem ○	!
!	igen ○	nem ○	!

(8) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left((\exists x)B(x) \wedge (\exists y)C(y) \right) \rightarrow (\exists x)(B(x) \wedge C(x))$$

$$\neg(\forall x)(\exists y)B(x, y) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg B(y, x))$$

$$(\exists x)(\forall y)B(x, y) \leftrightarrow (\exists y)(\forall x)B(y, x)$$

!	igen ○	nem ⊗	!
!	igen ⊗	nem ○	!
!	igen ⊗	nem ○	!

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \rightarrow A, (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \rightarrow A^2, (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív ☐	g szürjektív ☐	g injektív ☐	egyik sem ☐	?
---	------------------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---------------------------------	---

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \rightarrow A, (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \rightarrow A^2, (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív ☐	g szürjektív ☐	g injektív ☐	egyik sem ☐	?
---	------------------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

$$\alpha = \{(-1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$$

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \rightarrow A, (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \rightarrow A^2, (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív ☐	g szürjektív ☐	g injektív ☐	egyik sem ☐	?
---	------------------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

$$\alpha = \{(-1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$$

$$\beta = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$$

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \rightarrow A, (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \rightarrow A^2, (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív ☐	g szürjektív ☐	g injektív ☐	egyik sem ☐	?
---	------------------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

$$\alpha = \{(-1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$$

$$\beta = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$$

$$\begin{array}{l} f \\ (-1, 1) \mapsto 1 \\ (1, -1) \mapsto -1 \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{array}$$

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \rightarrow A, (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \rightarrow A^2, (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív ☐	g szürjektív ☐	g injektív ☐	egyik sem ☐	?
---	------------------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

$$\alpha = \{(-1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$$

$$\beta = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$$

$$\begin{array}{l} f \\ (-1, 1) \mapsto 1 \\ (1, -1) \mapsto -1 \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g \\ (-1, -1) \mapsto (-1, 1) \\ (-1, 0) \mapsto (0, -1) \\ (-1, 1) \mapsto (1, -1) \\ (0, 0) \mapsto (0, 0) \\ (0, 1) \mapsto (1, 0) \\ (1, 1) \mapsto (1, 1) \end{array}$$

(9) Legyen $A = \{-1, 0, 1\}$, tekintsük az $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : x + y = 0\}$ és $\beta = \{(x, y) \in A^2 : x \leq y\}$ relációkat, valamint az

$$f : \alpha \rightarrow A, (x, y) \mapsto y, \quad \text{illetve} \quad g : \beta \rightarrow A^2, (x, y) \mapsto (y, x)$$

leképezéseket. Ikszelje be az alábbiak közül az igaz állításokat:

?	f injektív $\otimes$	g szürjektív $\bigcirc$	g injektív $\otimes$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	------------------------	---------------------------	------------------------	----------------------	---

Megoldás:

$$\alpha = \{(-1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$$

$$\beta = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$$

$$\begin{array}{l} f \\ (-1, 1) \mapsto 1 \\ (1, -1) \mapsto -1 \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g \\ (-1, -1) \mapsto (-1, 1) \\ (-1, 0) \mapsto (0, -1) \\ (-1, 1) \mapsto (1, -1) \\ (0, 0) \mapsto (0, 0) \\ (0, 1) \mapsto (1, 0) \\ (1, 1) \mapsto (1, 1) \end{array}$$

(10) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	A ☐	$\mathbb{R}$ ☐	$A \times \mathbb{Z}$ ☐	$\mathbb{N}$ ☐	egyik sem ☐	?
---	---------------------------	------------------------------------	---	------------------------------------	---------------------------------	---

(10) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	A ☐	$\mathbb{R}$ ☐	$A \times \mathbb{Z}$ ☐	$\mathbb{N}$ ☐	egyik sem ☐	?
---	---------------------------	------------------------------------	---	------------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

- Mivel az A halmaznak végtelen sok eleme van, ezért $|A| \geq \aleph_0$. De $|\mathbb{Q}^2| = \aleph_0$, ezért $|A| = \aleph_0$.

(10) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	A ☐	$\mathbb{R}$ ☐	$A \times \mathbb{Z}$ ☐	$\mathbb{N}$ ☐	egyik sem ☐	?
---	---------------------------	------------------------------------	---	------------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás:

- Mivel az A halmaznak végtelen sok eleme van, ezért $|A| \geq \aleph_0$. De $|\mathbb{Q}^2| = \aleph_0$, ezért $|A| = \aleph_0$.
- $|\mathbb{R}| = c$

(10) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	$A \circ$	$\mathbb{R} \circ$	$A \times \mathbb{Z} \circ$	$\mathbb{N} \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	-----------	--------------------	-----------------------------	--------------------	-------------------	---

Megoldás:

- Mivel az A halmaznak végtelen sok eleme van, ezért $|A| \geq \aleph_0$. De $|\mathbb{Q}^2| = \aleph_0$, ezért $|A| = \aleph_0$.
- $|\mathbb{R}| = c$
- $|A \times \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$

(10) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	$A \circ$	$\mathbb{R} \circ$	$A \times \mathbb{Z} \circ$	$\mathbb{N} \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	-----------	--------------------	-----------------------------	--------------------	-------------------	---

Megoldás:

- Mivel az A halmaznak végtelen sok eleme van, ezért $|A| \geq \aleph_0$. De $|\mathbb{Q}^2| = \aleph_0$, ezért $|A| = \aleph_0$.
- $|\mathbb{R}| = c$
- $|A \times \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

(10) Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x^2 + 1 < y^2\}$. Mely(ek) megszámlálhatóan végtelen(ek) az alábbi halmazok közül?

?	$A \otimes$	$\mathbb{R} \circ$	$A \times \mathbb{Z} \otimes$	$\mathbb{N} \otimes$	egyik sem $\circ$	?
---	-------------	--------------------	-------------------------------	----------------------	-------------------	---

Megoldás:

- Mivel az A halmaznak végtelen sok eleme van, ezért $|A| \geq \aleph_0$. De $|\mathbb{Q}^2| = \aleph_0$, ezért $|A| = \aleph_0$.
- $|\mathbb{R}| = c$
- $|A \times \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

- 1 dmnv1j-02.C1-B
- 2 dmnv1-12.C1-D
- 3 dmnv1-01.C1-C
- 4 dmnv1CSP-25-A**
- 5 dmnv1-14.C0-C
- 6 1. Feladatsor
- 7 2. Feladatsor
- 8 3. Feladatsor
- 9 Válogatott feladatok

- 1 Polinomosztás
- 2 Relációtulajdonságok
- 3 Leképezéstulajdonságok
- 4 Osztályozás
- 5 Tautológia
- 6 Sajátérték
- 7 Mátrixműveletek, determináns
- 8 Altér
- 9 Lineáris függetlenség
- 10 Mátrix inverze

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-5 ○	-3 ○	0 ○	2 ○	1 ○	4 ○
---	--------	--------	-------	-------	-------	-------

!	$x - 2$ ○	$x^2 - 4x + 4$ ○	egyik sem ○	!
---	-----------	------------------	-------------	---

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-5 ○	-3 ○	0 ○	2 ○	1 ○	4 ○
---	--------	--------	-------	-------	-------	-------

!	$x - 2$ ○	$x^2 - 4x + 4$ ○	egyik sem ○	!
---	-----------	------------------	-------------	---

Megoldás:

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-5 ○	-3 ○	0 ○	2 ○	1 ○	4 ○
---	--------	--------	-------	-------	-------	-------

!	$x - 2$ ○	$x^2 - 4x + 4$ ○	egyik sem ○	!
---	-----------	------------------	-------------	---

Megoldás:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 5 : (x - 1) =$$

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	$-5 \bigcirc$	$-3 \bigcirc$	$0 \bigcirc$	$2 \bigcirc$	$1 \bigcirc$	$4 \bigcirc$
---	---------------	---------------	--------------	--------------	--------------	--------------

!	$x - 2 \bigcirc$	$x^2 - 4x + 4 \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	------------------	-------------------------	----------------------	---

Megoldás:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 + 5x - 5 : (x - 1) = x^2 \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 -2x^2 + 5x - 5
 \end{array}$$

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	$-5 \bigcirc$	$-3 \bigcirc$	$0 \bigcirc$	$2 \bigcirc$	$1 \bigcirc$	$4 \bigcirc$
---	---------------	---------------	--------------	--------------	--------------	--------------

!	$x - 2 \bigcirc$	$x^2 - 4x + 4 \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	------------------	-------------------------	----------------------	---

Megoldás:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 + 5x - 5 : (x - 1) = x^2 - 2x \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 -2x^2 + 5x - 5 \\
 \underline{-2x^2 + 2x} \\
 3x - 5
 \end{array}$$

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	$-5 \bigcirc$	$-3 \bigcirc$	$0 \bigcirc$	$2 \bigcirc$	$1 \bigcirc$	$4 \bigcirc$
---	---------------	---------------	--------------	--------------	--------------	--------------

!	$x - 2 \bigcirc$	$x^2 - 4x + 4 \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	------------------	-------------------------	----------------------	---

Megoldás:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 + 5x - 5 : (x - 1) = x^2 - 2x + 3 \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 -2x^2 + 5x - 5 \\
 \underline{-2x^2 + 2x} \\
 3x - 5 \\
 \underline{3x - 3} \\
 -2
 \end{array}$$

(1) Az $x^3 - 3x^2 + 5x - 5$ polinomot maradékosan osztjuk az $x - 1$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	$-5 \bigcirc$	$-3 \bigcirc$	$0 \bigcirc$	$2 \bigcirc$	$1 \bigcirc$	$4 \bigcirc$
---	---------------	---------------	--------------	--------------	--------------	--------------

!	$x - 2 \bigcirc$	$x^2 - 4x + 4 \bigcirc$	egyik sem $\otimes$	!
---	------------------	-------------------------	---------------------	---

Megoldás:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 + 5x - 5 : (x - 1) = x^2 - 2x + 3 \\
 \underline{x^3 - x^2} \\
 -2x^2 + 5x - 5 \\
 \underline{-2x^2 + 2x} \\
 3x - 5 \\
 \underline{3x - 3} \\
 -2
 \end{array}$$

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ☐	reflexív ☐	részbenrendezés ☐
---	--	--------------------------------	---------------------------------------

transzitív ☐	egyik sem ☐	?
----------------------------------	---------------------------------	---

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ☐	reflexív ☐	részbenrendezés ☐
---	--	--------------------------------	---------------------------------------

transzitiv ☐	egyik sem ☐	?
----------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás

- Antiszimmetrikus, mert nincs két olyan különböző x, y egész szám, melyekre $(x, y) \in \rho$ és $(y, x) \in \rho$ is teljesül.

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ☐	reflexív ☐	részbenrendezés ☐
---	--	--------------------------------	---------------------------------------

transzitív ☐	egyik sem ☐	?
----------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás

- Antiszimmetrikus, mert nincs két olyan különböző x, y egész szám, melyekre $(x, y) \in \rho$ és $(y, x) \in \rho$ is teljesül.
- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \rho$.

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ☐	reflexív ☐	részbenrendezés ☐
---	--	--------------------------------	---------------------------------------

transzítív ☐	egyik sem ☐	?
----------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás

- Antiszimmetrikus, mert nincs két olyan különböző x, y egész szám, melyekre $(x, y) \in \rho$ és $(y, x) \in \rho$ is teljesül.
- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \rho$.
- Nem részbenrendezés, mert nem reflexív.

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ☐	reflexív ☐	részbenrendezés ☐
---	--	--------------------------------	---------------------------------------

transzitiv ☐	egyik sem ☐	?
----------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás

- Antiszimmetrikus, mert nincs két olyan különböző x, y egész szám, melyekre $(x, y) \in \rho$ és $(y, x) \in \rho$ is teljesül.
- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \rho$.
- Nem részbenrendezés, mert nem reflexív.
- Nem tranzitív, mert $(1, 2010) \in \rho$ és $(2010, 4019) \in \rho$, de $(1, 4019) \notin \rho$.

(2) Legyen $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y - x = 2009\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ☒	reflexív ☐	részbenrendezés ☐
---	---	--------------------------------	---------------------------------------

transzitiv ☐	egyik sem ☐	?
----------------------------------	---------------------------------	---

Megoldás

- Antiszimmetrikus, mert nincs két olyan különböző x, y egész szám, melyekre $(x, y) \in \rho$ és $(y, x) \in \rho$ is teljesül.
- Nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \rho$.
- Nem részbenrendezés, mert nem reflexív.
- Nem tranzitív, mert $(1, 2010) \in \rho$ és $(2010, 4019) \in \rho$, de $(1, 4019) \notin \rho$.

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$.
Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ☐	g szürjektív ☐	g injektív ☐	?
---	------------------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$.
Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ☐	g szürjektív ☐	g injektív ☐	?
---	------------------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2, 2)f = (1, 3)f = 4$

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$.
Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ☐	g szürjektív ☐	g injektív ☐	?
---	------------------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2, 2)f = (1, 3)f = 4$
- g nem szürjektív, mert $(5, 7)$ -nek nincs őse

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$.
Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ☐	g szürjektív ☐	g injektív ☐	?
---	------------------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2, 2)f = (1, 3)f = 4$
- g nem szürjektív, mert $(5, 7)$ -nek nincs őse
- g injektív, mert

$$xg = yg$$

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$.
Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ☐	g szürjektív ☐	g injektív ☐	?
---	------------------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2, 2)f = (1, 3)f = 4$
- g nem szürjektív, mert $(5, 7)$ -nek nincs őse
- g injektív, mert

$$\begin{aligned} xg &= yg \\ (x - 1, x + 1) &= (y - 1, y + 1) \end{aligned}$$

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$.
Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ☐	g szürjektív ☐	g injektív ☐	?
---	------------------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2, 2)f = (1, 3)f = 4$
- g nem szürjektív, mert $(5, 7)$ -nek nincs őse
- g injektív, mert

$$\begin{aligned}
 xg &= yg \\
 (x - 1, x + 1) &= (y - 1, y + 1) \\
 x - 1 = y - 1 &\text{ és } x + 1 = y + 1
 \end{aligned}$$

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$.
Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ☐	g szürjektív ☐	g injektív ☐	?
---	------------------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2, 2)f = (1, 3)f = 4$
- g nem szürjektív, mert $(5, 7)$ -nek nincs őse
- g injektív, mert

$$\begin{aligned}
 xg &= yg \\
 (x - 1, x + 1) &= (y - 1, y + 1) \\
 x - 1 = y - 1 &\text{ és } x + 1 = y + 1 \\
 x = y &\text{ és } x = y
 \end{aligned}$$

(3) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$.
Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ○	g szürjektív ○	g injektív ⊗	?
---	----------------	------------------	----------------	---

Megoldás

- f nem injektív, mert $(2, 2)f = (1, 3)f = 4$
- g nem szürjektív, mert $(5, 7)$ -nek nincs őse
- g injektív, mert

$$\begin{aligned}
 xg &= yg \\
 (x - 1, x + 1) &= (y - 1, y + 1) \\
 x - 1 = y - 1 &\text{ és } x + 1 = y + 1 \\
 x = y &\text{ és } x = y
 \end{aligned}$$

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$,
 $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban
 felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C} \circ$	$\mathcal{D} \circ$	$\mathcal{E} \circ$	?
---	---------------------	---------------------	---------------------	---

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$,
 $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban
 felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C} \circ$	$\mathcal{D} \circ$	$\mathcal{E} \circ$	?
---	---------------------	---------------------	---------------------	---

Megoldás

- $\mathcal{C}$ osztályozás

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$,
 $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban
 felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C} \bigcirc$	$\mathcal{D} \bigcirc$	$\mathcal{E} \bigcirc$	?
---	------------------------	------------------------	------------------------	---

Megoldás

- $\mathcal{C}$ osztályozás
- $\mathcal{D}$ nem osztályozás, mert a 2-es két blokkban is szerepel

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$,
 $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban
 felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C} \bigcirc$	$\mathcal{D} \bigcirc$	$\mathcal{E} \bigcirc$	?
---	------------------------	------------------------	------------------------	---

Megoldás

- $\mathcal{C}$ osztályozás
- $\mathcal{D}$ nem osztályozás, mert a 2-es két blokkban is szerepel
- $\mathcal{E}$ nem osztályozás, mert egyik blokkban sincs benne a 2-es

(4) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$,
 $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{P(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban
 felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C} \otimes$	$\mathcal{D} \circ$	$\mathcal{E} \circ$	?
---	-----------------------	---------------------	---------------------	---

Megoldás

- $\mathcal{C}$ osztályozás
- $\mathcal{D}$ nem osztályozás, mert a 2-es két blokkban is szerepel
- $\mathcal{E}$ nem osztályozás, mert egyik blokkban sincs benne a 2-es

(5) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \right) \leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)) \right)$$

$$((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$$

!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!

(5) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \right) \leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)) \right)$$

$$((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$$

!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\bigcirc$	nem $\bigcirc$	!

(5) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \right) \leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)) \right)$$

$$((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$$

!	igen $\otimes$	nem $\bigcirc$	!
!	igen $\bigcirc$	nem $\otimes$	!

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

☐ ?	☐ $-\sqrt{17}$	☐ -2	☐ 0	☐ 1	☐ -1	☐ 2	☐ 7	☐ $\sqrt{17}$
-------------------------	------------------------------------	----------------------------	---------------------------	---------------------------	----------------------------	---------------------------	---------------------------	-----------------------------------

☐ egyik sem	☐ ?
---------------------------------	-------------------------

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17} \bigcirc$	$-2 \bigcirc$	$0 \bigcirc$	$1 \bigcirc$	$-1 \bigcirc$	$2 \bigcirc$	$7 \bigcirc$	$\sqrt{17} \bigcirc$
---	-----------------------	---------------	--------------	--------------	---------------	--------------	--------------	----------------------

egyik sem $\bigcirc$	?
----------------------	---

Megoldás

$$\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix}$$

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ○	-2 ○	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	7 ○	$\sqrt{17}$ ○
---	----------------	--------	-------	-------	--------	-------	-------	---------------

egyik sem ○	?
-------------	---

Megoldás

$$\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} = (1-x)(6-x) - 2 \cdot 3$$

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ○	-2 ○	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	7 ○	$\sqrt{17}$ ○
---	----------------	--------	-------	-------	--------	-------	-------	---------------

egyik sem ○	?
-------------	---

Megoldás

$$\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} = (1-x)(6-x) - 2 \cdot 3 = x^2 - 7x$$

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ○	-2 ○	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	7 ○	$\sqrt{17}$ ○
---	----------------	--------	-------	-------	--------	-------	-------	---------------

egyik sem ○	?
-------------	---

Megoldás

$$\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} = (1-x)(6-x) - 2 \cdot 3 = x^2 - 7x = x(x-7)$$

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ○	-2 ○	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	7 ○	$\sqrt{17}$ ○
---	----------------	--------	-------	-------	--------	-------	-------	---------------

egyik sem ○	?
-------------	---

Megoldás

$$\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} = (1-x)(6-x) - 2 \cdot 3 = x^2 - 7x = x(x-7)$$
$$x(x-7) = 0$$

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17}$ ○	-2 ○	0 ○	1 ○	-1 ○	2 ○	7 ○	$\sqrt{17}$ ○
---	----------------	--------	-------	-------	--------	-------	-------	---------------

egyik sem ○	?
-------------	---

Megoldás

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} &= (1-x)(6-x) - 2 \cdot 3 = x^2 - 7x = x(x-7) \\ x(x-7) &= 0 \\ x=0 &\quad x=7 \end{aligned}$$

(6) Melyik lesz a valós $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke az alábbiak közül?

?	$-\sqrt{17} \bigcirc$	$-2 \bigcirc$	$0 \otimes$	$1 \bigcirc$	$-1 \bigcirc$	$2 \bigcirc$	$7 \otimes$	$\sqrt{17} \bigcirc$
---	-----------------------	---------------	-------------	--------------	---------------	--------------	-------------	----------------------

egyik sem $\bigcirc$	?
----------------------	---

Megoldás

$$\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} = (1-x)(6-x) - 2 \cdot 3 = x^2 - 7x = x(x-7)$$

$$x(x-7) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 7$$

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T -tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2 ○	5 ○	7 ○	1 ○	4 ○	0 ○	-5 ○	más számérték ○
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	-----------------

egyik sem ○	!
-------------	---

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T -tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2 ○	5 ○	7 ○	1 ○	4 ○	0 ○	-5 ○	más számérték ○
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	-----------------

egyik sem ○	!
-------------	---

Megoldás

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 0 & 1 & 2 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 2 \\
 2 & 0 & 2 & 4
 \end{array}$$

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T -tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2 ○	5 ○	7 ○	1 ○	4 ○	0 ○	-5 ○	más számérték ○
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	-----------------

egyik sem ○	!
-------------	---

Megoldás

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 0 & 2 & 4
\end{array} \Rightarrow A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T -tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2 ○	5 ○	7 ○	1 ○	4 ○	0 ○	-5 ○	más számérték ○
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	-----------------

egyik sem ○	!
-------------	---

Megoldás

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 0 & 2 & 4
\end{array} \implies A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \implies \det(A \cdot A^T) = 0$$

(7) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T -tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2 ○	5 ○	7 ○	1 ○	4 ○	0 ⊗	-5 ○	más számérték ○
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	-----------------

egyik sem ○	!
-------------	---

Megoldás

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 0 & 2 & 4
\end{array} \Rightarrow A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A \cdot A^T) = 0$$

(8) Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$$

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$$

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$$

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

(8) Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$$

!	igen ☒	nem ☐	!
---	---------------------------------------	---------------------------	---

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$$

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$$

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

(8) Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$$

!	igen $\otimes$	nem $\circ$	!
---	----------------	-------------	---

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$$

!	igen $\circ$	nem $\otimes$	!
---	--------------	---------------	---

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$$

!	igen $\circ$	nem $\circ$	!
---	--------------	-------------	---

(8) Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$$

!	igen $\otimes$	nem $\circ$	!
---	----------------	-------------	---

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$$

!	igen $\circ$	nem $\otimes$	!
---	--------------	---------------	---

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$$

!	igen $\circ$	nem $\otimes$	!
---	--------------	---------------	---

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függők az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \bigcirc$	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \bigcirc$	$\vec{a}, \vec{b} \bigcirc$	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d} \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	--------------------------------------	--------------------------------------	-----------------------------	--------------------------------------	----------------------	---

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függők az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \bigcirc$	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \bigcirc$	$\vec{a}, \vec{b} \bigcirc$	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d} \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	--------------------------------------	--------------------------------------	-----------------------------	--------------------------------------	----------------------	---

Megoldás

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ függő, mert $\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függők az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \bigcirc$	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \bigcirc$	$\vec{a}, \vec{b} \bigcirc$	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d} \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	--------------------------------------	--------------------------------------	-----------------------------	--------------------------------------	----------------------	---

Megoldás

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ függő, mert $\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$
- $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ független

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függők az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \bigcirc$	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \bigcirc$	$\vec{a}, \vec{b} \bigcirc$	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d} \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	--------------------------------------	--------------------------------------	-----------------------------	--------------------------------------	----------------------	---

Megoldás

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ függő, mert $\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$
- $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ független
- $\vec{a}, \vec{b}$ független

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függők az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \bigcirc$	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \bigcirc$	$\vec{a}, \vec{b} \bigcirc$	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d} \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	--------------------------------------	--------------------------------------	-----------------------------	--------------------------------------	----------------------	---

Megoldás

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ függő, mert $\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$
- $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ független
- $\vec{a}, \vec{b}$ független
- $\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ függő, mert benne van a nullvektor

(9) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függők az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \otimes$	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \circ$	$\vec{a}, \vec{b} \circ$	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d} \otimes$	egyik sem $\circ$	?
---	-------------------------------------	-----------------------------------	--------------------------	-------------------------------------	-------------------	---

Megoldás

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ függő, mert $\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$
- $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ független
- $\vec{a}, \vec{b}$ független
- $\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ függő, mert benne van a nullvektor

(10) Számolja ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix **inverzét**, majd jelölje be, hogy a felsorolt elemek közül melyek szerepelnek (egyszer vagy többször) a kiszámolt A^{-1} mátrixban.

?	-11 ☐	-8 ☐	-7 ☐	0 ☐	3 ☐	5 ☐	8 ☐
---	---------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

10 ☐	egyik sem ☐	?
--------------------------	---------------------------------	---

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

 $\xrightarrow{(1)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

 $\xrightarrow{(2)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

 $\xrightarrow{(3)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

 $\xrightarrow{(4)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 6 \end{array} \right]$$

 $\xrightarrow{(5)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

 $\xrightarrow{(6)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -9 & -11 \end{array} \right]$$

 $\xrightarrow{(7)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 9 & -20 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -9 & -11 \end{array} \right]$$

 $\xrightarrow{(8)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -9 & -11 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 6 \\ 4 & -9 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \clubsuit$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \clubsuit$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \clubsuit$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \clubsuit$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$\clubsuit = \frac{1}{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \clubsuit$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$\clubsuit = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 9 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}^T$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \clubsuit$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$\clubsuit = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 9 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 6 \\ 4 & -9 & -11 \end{pmatrix}$$

(10) Számolja ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix **inverzét**, majd jelölje be, hogy a felsorolt elemek közül melyek szerepelnek (egyszer vagy többször) a kiszámolt A^{-1} mátrixban.

?	$-11 \otimes$	$-8 \bigcirc$	$-7 \bigcirc$	$0 \bigcirc$	$3 \bigcirc$	$5 \otimes$	$8 \bigcirc$
---	---------------	---------------	---------------	--------------	--------------	-------------	--------------

$10 \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---------------	----------------------	---

- 1 dmnv1j-02.C1-B
- 2 dmnv1-12.C1-D
- 3 dmnv1-01.C1-C
- 4 dmnv1CSP-25-A
- 5 dmnv1-14.C0-C**
- 6 1. Feladatsor
- 7 2. Feladatsor
- 8 3. Feladatsor
- 9 Válogatott feladatok

- 1 Halmazműveleti tulajdonságok (elmélet)
- 2 Leképezések tulajdonságai
- 3 Osztályozás
- 4 Relációk tulajdonságai
- 5 Számosságok
- 6 Teljes diszjunktív normálforma
- 7 Negáció (predikátumkalkulus)
- 8 Lineáris függetlenség (gyakorlat)
- 9 Lineáris függetlenség (elmélet)
- 10 Mátrix inverze

(1) Legyen U egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek A, B, C az U tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

$$A \times \overline{A} = \emptyset$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$A \triangle A = A$$

!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!

(1) Legyen U egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek A, B, C az U tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

$$A \times \bar{A} = \emptyset$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$A \triangle A = A$$

Megoldás:

- Hamis: $U = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}, A \times \bar{A} = \{1, 2\} \times \{3\} = \{(1, 3), (2, 3)\} \neq \emptyset$.

!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!

(1) Legyen U egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek A, B, C az U tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

$$A \times \bar{A} = \emptyset$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$A \triangle A = A$$

!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!

Megoldás:

- Hamis: $U = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}, A \times \bar{A} = \{1, 2\} \times \{3\} = \{(1, 3), (2, 3)\} \neq \emptyset$.
- Igaz, a $\cap$ disztributív az $\cup$ -ra nézve.

(1) Legyen U egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek A, B, C az U tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

$$A \times \bar{A} = \emptyset$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$A \Delta A = A$$

!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!

Megoldás:

- Hamis: $U = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}, A \times \bar{A} = \{1, 2\} \times \{3\} = \{(1, 3), (2, 3)\} \neq \emptyset$.
- Igaz, a $\cap$ disztributív az $\cup$ -ra nézve.
- Hamis: $A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$.

(1) Legyen U egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek A, B, C az U tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

$$A \times \bar{A} = \emptyset$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$A \Delta A = A$$

!	igen ○	nem ⊗	!
!	igen ⊗	nem ○	!
!	igen ○	nem ⊗	!

Megoldás:

- Hamis: $U = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}, A \times \bar{A} = \{1, 2\} \times \{3\} = \{(1, 3), (2, 3)\} \neq \emptyset$.
- Igaz, a $\cap$ disztributív az $\cup$ -ra nézve.
- Hamis: $A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$.

(2) Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (y, x),$$

$$\beta : A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (x^3, -y),$$

$$\gamma : A \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y,$$

$$\delta : \mathbb{Z} \rightarrow A, x \mapsto (x, -x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

?	α ☐	β ☐	γ ☐	δ ☐	egyik sem ☐	?
---	--------------------------------	-------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	---------------------------------	---

(2) Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (y, x),$$

$$\beta : A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (x^3, -y),$$

$$\gamma : A \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y,$$

$$\delta : \mathbb{Z} \rightarrow A, x \mapsto (x, -x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

?	$\alpha \bigcirc$	$\beta \bigcirc$	$\gamma \bigcirc$	$\delta \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	-------------------	------------------	-------------------	-------------------	----------------------	---

Megoldás:

$$(x, y)\alpha = (u, v)\alpha$$

$$(y, x) = (v, u)$$

$$y = v \quad \text{és} \quad x = u$$

$$(x, y) = (u, v)$$

(2) Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (y, x),$$

$$\beta : A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (x^3, -y),$$

$$\gamma : A \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y,$$

$$\delta : \mathbb{Z} \rightarrow A, x \mapsto (x, -x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

?	$\alpha \circ$	$\beta \circ$	$\gamma \circ$	$\delta \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	----------------	---------------	----------------	----------------	-------------------	---

Megoldás:

$$\begin{array}{ll} (x, y)\alpha = (u, v)\alpha & (x, y)\beta = (u, v)\beta \\ (y, x) = (v, u) & (x^3, -y) = (u^3, -v) \\ y = v \text{ és } x = u & x^3 = u^3 = -y = -v \\ (x, y) = (u, v) & x = u \text{ és } y = v \\ & (x, y) = (u, v) \end{array}$$

(2) Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (y, x),$$

$$\beta : A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (x^3, -y),$$

$$\gamma : A \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y,$$

$$\delta : \mathbb{Z} \rightarrow A, x \mapsto (x, -x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

?	$\alpha \circ$	$\beta \circ$	$\gamma \circ$	$\delta \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	----------------	---------------	----------------	----------------	-------------------	---

Megoldás:

$$\begin{array}{llll}
 (x, y)\alpha = (u, v)\alpha & (x, y)\beta = (u, v)\beta & x\delta = y\delta & \\
 (y, x) = (v, u) & (x^3, -y) = (u^3, -v) & (x, -x) = (y, -y) & \\
 y = v \text{ és } x = u & x^3 = u^3 = -y = -v & x = y \text{ és } -x = -y & \\
 (x, y) = (u, v) & x = u \text{ és } y = v & x = y & \\
 & (x, y) = (u, v) & &
 \end{array}$$

(2) Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (y, x),$$

$$\beta : A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (x^3, -y),$$

$$\gamma : A \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y,$$

$$\delta : \mathbb{Z} \rightarrow A, x \mapsto (x, -x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

?	$\alpha \circ$	$\beta \circ$	$\gamma \circ$	$\delta \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	----------------	---------------	----------------	----------------	-------------------	---

Megoldás:

$$\begin{array}{llll}
 (x, y)\alpha & = & (u, v)\alpha & (x, y)\beta = (u, v)\beta & x\delta & = & y\delta \\
 (y, x) & = & (v, u) & (x^3, -y) & = & (u^3, -v) & (x, -x) & = & (y, -y) \\
 y = v & \text{és} & x = u & x^3 = u^3 & = & -y = -v & x = y & \text{és} & -x = -y \\
 (x, y) & = & (u, v) & x = u & \text{és} & y = v & x & = & y \\
 & & & (x, y) & = & (u, v) & & &
 \end{array}$$

A γ reláció nem injektív, mert $(1, 3)\gamma = (2, 2)\gamma = 4$.

(2) Legyen $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\alpha : A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (y, x),$$

$$\beta : A \rightarrow A, (x, y) \mapsto (x^3, -y),$$

$$\gamma : A \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y,$$

$$\delta : \mathbb{Z} \rightarrow A, x \mapsto (x, -x).$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

?	$\alpha \otimes$	$\beta \otimes$	$\gamma \circ$	$\delta \otimes$	egyik sem $\circ$	?
---	------------------	-----------------	----------------	------------------	-------------------	---

Megoldás:

$$\begin{array}{llll}
 (x, y)\alpha = (u, v)\alpha & (x, y)\beta = (u, v)\beta & x\delta = y\delta & \\
 (y, x) = (v, u) & (x^3, -y) = (u^3, -v) & (x, -x) = (y, -y) & \\
 y = v \text{ és } x = u & x^3 = u^3 = -y = -v & x = y \text{ és } -x = -y & \\
 (x, y) = (u, v) & x = u \text{ és } y = v & x = y & \\
 & (x, y) = (u, v) & &
 \end{array}$$

A γ reláció nem injektív, mert $(1, 3)\gamma = (2, 2)\gamma = 4$.

(3) Legyen $\mathcal{C} = \{\{1, 5, 6\}, \{0, 4\}, X\}$. Minek kell választanunk az X halmazt az alábbi téglalapban felsoroltak közül, hogy $\mathcal{C}$ osztályozás legyen a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon?

!	$\emptyset$ ○	$\{2\}$ ○	$\{\emptyset, 3\}$ ○	$\{2, 3\}$ ○	$\{3, 4, 5\}$ ○	egyik sem ○	!
---	---------------	-----------	----------------------	--------------	-----------------	-------------	---

(3) Legyen $\mathcal{C} = \{\{1, 5, 6\}, \{0, 4\}, X\}$. Minek kell választanunk az X halmazt az alábbi téglalapban felsoroltak közül, hogy $\mathcal{C}$ osztályozás legyen a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon?

!	$\emptyset$ ○	$\{2\}$ ○	$\{\emptyset, 3\}$ ○	$\{2, 3\}$ ○	$\{3, 4, 5\}$ ○	egyik sem ○	!
---	---------------	-----------	----------------------	--------------	-----------------	-------------	---

Megoldás: Mitől lesz $\mathcal{C}$ osztályozás?

- ① $\mathcal{C}$ olyan halmaz, mely $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ részhalmazait tartalmazza,
- ② $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ összes elemének szerepelnie kell $\mathcal{C}$ valamelyik elemében,
- ③ az előbbi pontnál minden elem, csak egyszer szerepelhet,
- ④ és $\mathcal{C}$ nem tartalmazza az üres halmazt.

(3) Legyen $\mathcal{C} = \{\{1, 5, 6\}, \{0, 4\}, X\}$. Minek kell választanunk az X halmazt az alábbi téglalapban felsoroltak közül, hogy $\mathcal{C}$ osztályozás legyen a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon?

!	$\emptyset \bigcirc$	$\{2\} \bigcirc$	$\{\emptyset, 3\} \bigcirc$	$\{2, 3\} \otimes$	$\{3, 4, 5\} \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	----------------------	------------------	-----------------------------	--------------------	------------------------	----------------------	---

Megoldás: Mitől lesz $\mathcal{C}$ osztályozás?

- 1 $\mathcal{C}$ olyan halmaz, mely $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ részhalmazait tartalmazza,
- 2 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ összes elemének szerepelnie kell $\mathcal{C}$ valamelyik elemében,
- 3 az előbbi pontnál minden elem, csak egyszer szerepelhet,
- 4 és $\mathcal{C}$ nem tartalmazza az üres halmazt.

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

Megoldás. Cél: reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus.

- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $((1, 3), (2, 2))$ és $((2, 2), (1, 3))$ is eleme a relációnak, de $(1, 3) \neq (2, 2)$.

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

Megoldás. Cél: reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus.

- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $((1, 3), (2, 2))$ és $((2, 2), (1, 3))$ is eleme a relációnak, de $(1, 3) \neq (2, 2)$.
- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $(1, -1)$ és $(-1, 1)$ is eleme a relációnak, de $1 \neq -1$.

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

Megoldás. Cél: reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus.

- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $((1, 3), (2, 2))$ és $((2, 2), (1, 3))$ is eleme a relációnak, de $(1, 3) \neq (2, 2)$.
- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $(1, -1)$ és $(-1, 1)$ is eleme a relációnak, de $1 \neq -1$.
- Igaz.

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

Megoldás. Cél: reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus.

- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $((1, 3), (2, 2))$ és $((2, 2), (1, 3))$ is eleme a relációnak, de $(1, 3) \neq (2, 2)$.
- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $(1, -1)$ és $(-1, 1)$ is eleme a relációnak, de $1 \neq -1$.
- Igaz.
 - Reflexív: $\forall x \in \mathbb{Z}$ -re $x^3 = x^3$.
 - Tranzitív: ha $x^3 = y^3$ és $y^3 = z^3$, akkor $x^3 = z^3$.
 - Antiszimmetrikus: nincs két különböző x, y , melyekre $x^3 = y^3$.

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$ a $\mathbb{Z}^2$ halmazon

!	igen ○	nem ⊗	!
---	--------	-------	---

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ○	nem ⊗	!
---	--------	-------	---

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

!	igen ⊗	nem ○	!
---	--------	-------	---

Megoldás. Cél: reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus.

- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $((1, 3), (2, 2))$ és $((2, 2), (1, 3))$ is eleme a relációnak, de $(1, 3) \neq (2, 2)$.
- Hamis: nem antiszimmetrikus. Például $(1, -1)$ és $(-1, 1)$ is eleme a relációnak, de $1 \neq -1$.
- Igaz.
 - Reflexív: $\forall x \in \mathbb{Z}$ -re $x^3 = x^3$.
 - Tranzitív: ha $x^3 = y^3$ és $y^3 = z^3$, akkor $x^3 = z^3$.
 - Antiszimmetrikus: nincs két különböző x, y , melyekre $x^3 = y^3$.

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	S ☐	$S \times \mathbb{N}$ ☐	$S \cup \mathbb{Z}$ ☐	$\mathbb{R}$ ☐	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ☐	egyik sem ☐	?
---	---------------------------	---	---	------------------------------------	---	---------------------------------	---

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	S ☐	$S \times \mathbb{N}$ ☐	$S \cup \mathbb{Z}$ ☐	$\mathbb{R}$ ☐	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ☐	egyik sem ☐	?
---	---------------------------	---	---	------------------------------------	---	---------------------------------	---

Megoldás:

1 $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$ -nál nagyobb végtelen nem lehet)

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül íkszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	$S \circ$	$S \times \mathbb{N} \circ$	$S \cup \mathbb{Z} \circ$	$\mathbb{R} \circ$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	-----------	-----------------------------	---------------------------	--------------------	---	-------------------	---

Megoldás:

- 1 $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$ -nál nagyobb végtelen nem lehet)
- 2 $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül íkszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	$S \circ$	$S \times \mathbb{N} \circ$	$S \cup \mathbb{Z} \circ$	$\mathbb{R} \circ$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	-----------	-----------------------------	---------------------------	--------------------	---	-------------------	---

Megoldás:

- 1 $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$ -nál nagyobb végtelen nem lehet)
- 2 $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- 3 $|S \cup \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	S ☐	$S \times \mathbb{N}$ ☐	$S \cup \mathbb{Z}$ ☐	$\mathbb{R}$ ☐	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ☐	egyik sem ☐	?
---	---------------------------	---	---	------------------------------------	---	---------------------------------	---

Megoldás:

- 1 $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$ -nál nagyobb végtelen nem lehet)
- 2 $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- 3 $|S \cup \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- 4 $|\mathbb{R}| = c$

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	$S \circ$	$S \times \mathbb{N} \circ$	$S \cup \mathbb{Z} \circ$	$\mathbb{R} \circ$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	-----------	-----------------------------	---------------------------	--------------------	---	-------------------	---

Megoldás:

- 1 $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$ -nál nagyobb végtelen nem lehet)
- 2 $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- 3 $|S \cup \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- 4 $|\mathbb{R}| = c$
- 5 $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \mathbb{N}$

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	$S \circ$	$S \times \mathbb{N} \circ$	$S \cup \mathbb{Z} \circ$	$\mathbb{R} \circ$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	-----------	-----------------------------	---------------------------	--------------------	---	-------------------	---

Megoldás:

- 1 $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$ -nál nagyobb végtelen nem lehet)
- 2 $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- 3 $|S \cup \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- 4 $|\mathbb{R}| = c$
- 5 $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \mathbb{N}$
 $c = \max(|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}|, \aleph_0)$

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	$S \circ$	$S \times \mathbb{N} \circ$	$S \cup \mathbb{Z} \circ$	$\mathbb{R} \circ$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \circ$	egyik sem $\circ$	?
---	-----------	-----------------------------	---------------------------	--------------------	---	-------------------	---

Megoldás:

- 1 $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$ -nál nagyobb végtelen nem lehet)
- 2 $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- 3 $|S \cup \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- 4 $|\mathbb{R}| = c$
- 5 $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \mathbb{N}$
 $c = \max(|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}|, \aleph_0)$
 $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}| = c$

(5) Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$. Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

?	$S \otimes$	$S \times \mathbb{N} \otimes$	$S \cup \mathbb{Z} \otimes$	$\mathbb{R} \bigcirc$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	?
---	-------------	-------------------------------	-----------------------------	-----------------------	--	----------------------	---

Megoldás:

- 1 $|S| = \aleph_0$ (végtelen sok eleme van, de $\aleph_0$ -nál nagyobb végtelen nem lehet)
- 2 $|S \times \mathbb{N}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- 3 $|S \cup \mathbb{Z}| = \max(\aleph_0, \aleph_0) = \aleph_0$
- 4 $|\mathbb{R}| = c$
- 5 $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \mathbb{N}$
 $c = \max(|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}|, \aleph_0)$
 $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}| = c$

(6) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) kell az

$$A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma.)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	8 ○	!
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---

(6) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) kell az

$$A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma.)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	8 ○	!
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---

Megoldás:

A	$\rightarrow$	$(B$	$\leftrightarrow$	$C)$
i	i	i	i	i
i	h	i	h	h
i	h	h	h	i
i	i	h	i	h
h	i	i	i	i
h	i	i	h	h
h	i	h	h	i
h	i	h	i	h

(6) Hány $\vee$ (diszjunktíójel) kell az

$$A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunktció tagjainak a száma.)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	8 ○	!
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---

Megoldás:

A	$\rightarrow$	$(B$	$\leftrightarrow$	$C)$
i	i	i	i	i
i	h	i	h	h
i	h	h	h	i
i	i	h	i	h
h	i	i	i	i
h	i	i	h	h
h	i	h	h	i
h	i	h	i	h

$\Rightarrow$ 6 igaz kiértékelés

(6) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) kell az

$$A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma.)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ○	6 ○	7 ○	8 ○	!
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---

Megoldás:

A	$\rightarrow$	$(B$	$\leftrightarrow$	$C)$
i	i	i	i	i
i	h	i	h	h
i	h	h	h	i
i	i	h	i	h
h	i	i	i	i
h	i	i	h	h
h	i	h	h	i
h	i	h	i	h

$\Rightarrow$ 6 igaz kiértékelés $\Rightarrow$ 6 klóz

(6) Hány $\vee$ (diszjunkciójel) kell az

$$A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma.)

!	0 ○	1 ○	2 ○	3 ○	4 ○	5 ⊗	6 ○	7 ○	8 ○	!
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---

Megoldás:

A	$\rightarrow$	$(B$	$\leftrightarrow$	$C)$
i	i	i	i	i
i	h	i	h	h
i	h	h	h	i
i	i	h	i	h
h	i	i	i	i
h	i	i	h	h
h	i	h	h	i
h	i	h	i	h

$\Rightarrow$ 6 igaz kiértékelés $\Rightarrow$ 6 klóz $\Rightarrow$ 5 $\vee$ -jel

(7) Melyik a $(\forall x)((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall z)A(x, z))$ formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$F : (\forall x)((\forall z)A(x, z) \rightarrow (\forall y)B(y))$$

$$G : (\exists x)((\forall y)(\neg B(y)) \rightarrow (\exists z)(\neg A(x, z)))$$

$$H : (\exists x)((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)(\neg A(x, z)))$$

!	$F \bigcirc$	$G \bigcirc$	$H \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	--------------	--------------	--------------	----------------------	---

(7) Melyik a $(\forall x)((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall z)A(x, z))$ formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$F : (\forall x)((\forall z)A(x, z) \rightarrow (\forall y)B(y))$$

$$G : (\exists x)((\forall y)(\neg B(y)) \rightarrow (\exists z)(\neg A(x, z)))$$

$$H : (\exists x)((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)(\neg A(x, z)))$$

!	$F \bigcirc$	$G \bigcirc$	$H \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	--------------	--------------	--------------	----------------------	---

Megoldás:

$$\neg(\forall x)((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall z)A(x, z))$$

(7) Melyik a $(\forall x)((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall z)A(x, z))$ formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$F : (\forall x)((\forall z)A(x, z) \rightarrow (\forall y)B(y))$$

$$G : (\exists x)((\forall y)(\neg B(y)) \rightarrow (\exists z)(\neg A(x, z)))$$

$$H : (\exists x)((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)(\neg A(x, z)))$$

!	$F \bigcirc$	$G \bigcirc$	$H \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	--------------	--------------	--------------	----------------------	---

Megoldás:

$$\neg(\forall x)((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall z)A(x, z)) \equiv (\exists x)\neg((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall z)A(x, z))$$

(7) Melyik a $(\forall x)((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall z)A(x, z))$ formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$F : (\forall x)((\forall z)A(x, z) \rightarrow (\forall y)B(y))$$

$$G : (\exists x)((\forall y)(\neg B(y)) \rightarrow (\exists z)(\neg A(x, z)))$$

$$H : (\exists x)((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)(\neg A(x, z)))$$

!	$F \bigcirc$	$G \bigcirc$	$H \bigcirc$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	--------------	--------------	--------------	----------------------	---

Megoldás:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x)((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall z)A(x, z)) &\equiv (\exists x)\neg((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall z)A(x, z)) \\ &\equiv (\exists x)((\exists y)B(y) \wedge \neg(\forall z)A(x, z)) \end{aligned}$$

(7) Melyik a $(\forall x)((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall z)A(x, z))$ formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$F : (\forall x)((\forall z)A(x, z) \rightarrow (\forall y)B(y))$$

$$G : (\exists x)((\forall y)(\neg B(y)) \rightarrow (\exists z)(\neg A(x, z)))$$

$$H : (\exists x)((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)(\neg A(x, z)))$$

!	$F \bigcirc$	$G \bigcirc$	$H \otimes$	egyik sem $\bigcirc$	!
---	--------------	--------------	-------------	----------------------	---

Megoldás:

$$\begin{aligned}
 \neg(\forall x)((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall z)A(x, z)) &\equiv (\exists x)\neg((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall z)A(x, z)) \\
 &\equiv (\exists x)((\exists y)B(y) \wedge \neg(\forall z)A(x, z)) \\
 &\equiv (\exists x)((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)\neg A(x, z))
 \end{aligned}$$

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$ -beli

$$(1, 1, 2), (2, 1, t), (1, 2, 1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ☐	1 ☐	3 ☐	5 ☐	7 ☐	-1 ☐	-3 ☐	-5 ☐	egyéb ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------------------------	---

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$ -beli

$$(1, 1, 2), (2, 1, t), (1, 2, 1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ☐	1 ☐	3 ☐	5 ☐	7 ☐	-1 ☐	-3 ☐	-5 ☐	egyéb ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------------------------	---

Megoldás: rangszámítás ugyanúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$ -beli

$$(1, 1, 2), (2, 1, t), (1, 2, 1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ☐	1 ☐	3 ☐	5 ☐	7 ☐	-1 ☐	-3 ☐	-5 ☐	egyéb ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------------------------	---

Megoldás: rangszámítás ugyanúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$ -beli

$$(1, 1, 2), (2, 1, t), (1, 2, 1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ☐	1 ☐	3 ☐	5 ☐	7 ☐	-1 ☐	-3 ☐	-5 ☐	egyéb ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------------------------	---

Megoldás: rangszámítás ugyanúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$ -beli

$$(1, 1, 2), (2, 1, t), (1, 2, 1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ☐	1 ☐	3 ☐	5 ☐	7 ☐	-1 ☐	-3 ☐	-5 ☐	egyéb ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------------------------	---

Megoldás: rangszámítás ugyanúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & t-4 \end{pmatrix}$$

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$ -beli

$$(1, 1, 2), (2, 1, t), (1, 2, 1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ○	1 ○	3 ○	5 ○	7 ○	-1 ○	-3 ○	-5 ○	egyéb ○	!
---	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	---------	---

Megoldás: rangszámítás ugyanúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & t-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t-5 \end{pmatrix}$$

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$ -beli

$$(1, 1, 2), (2, 1, t), (1, 2, 1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ☐	1 ☐	3 ☐	5 ☐	7 ☐	-1 ☐	-3 ☐	-5 ☐	egyéb ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------------------------	---

Megoldás: rangszámítás ugyanúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & t-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t-5 \end{pmatrix}$$

Akkor lesz lin. függő a vektorrendszer, ha lesz legalább egy csupa 0-sor.

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$ -beli

$$(1, 1, 2), (2, 1, t), (1, 2, 1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ☐	1 ☐	3 ☐	5 ☐	7 ☐	-1 ☐	-3 ☐	-5 ☐	egyéb ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------------------------	---

Megoldás: rangszámítás ugyanúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & t-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t-5 \end{pmatrix}$$

Akkor lesz lin. függő a vektorrendszer, ha lesz legalább egy csupa 0-sor.
Azaz, akkor lesz lin. függő, ha $t = 5$.

(8) Mennyi a t paraméter értéke, ha az $\mathbb{R}^3$ -beli

$$(1, 1, 2), (2, 1, t), (1, 2, 1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

!	0 ☐	1 ☐	3 ☐	5 ☒	7 ☐	-1 ☐	-3 ☐	-5 ☐	egyéb ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	------------------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------------------------	---

Megoldás: rangszámítás ugyanúgy, mintha csak számok lennének a vektorokban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & t-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t-5 \end{pmatrix}$$

Akkor lesz lin. függő a vektorrendszer, ha lesz legalább egy csupa 0-sor.
Azaz, akkor lesz lin. függő, ha $t = 5$.

(9) Legyen v_1, v_2, v_3 egy vektorrendszer az $\mathbb{R}^5$ vektortérben. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi állítások (a "lin." a "lineárisan" rövidítése)?

Ha v_1, v_2, v_3 lin. független, akkor $v_1 + v_2 + v_3 \neq 0$.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor van olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, hogy $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor v_3, v_2, v_1 is lin. függő.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

(9) Legyen v_1, v_2, v_3 egy vektorrendszer az $\mathbb{R}^5$ vektortérben. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi állítások (a "lin." a "lineárisan" rövidítése)?

Ha v_1, v_2, v_3 lin. független, akkor $v_1 + v_2 + v_3 \neq 0$.

!	igen $\otimes$	nem $\circ$	!
---	----------------	-------------	---

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor van olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, hogy $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$.

!	igen $\circ$	nem $\circ$	!
---	--------------	-------------	---

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor v_3, v_2, v_1 is lin. függő.

!	igen $\circ$	nem $\circ$	!
---	--------------	-------------	---

Megoldás:

- Igaz: a lin. függetlenség definíciójából jön.

(9) Legyen v_1, v_2, v_3 egy vektorrendszer az $\mathbb{R}^5$ vektortérben. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi állítások (a "lin." a "lineárisan" rövidítése)?

Ha v_1, v_2, v_3 lin. független, akkor $v_1 + v_2 + v_3 \neq 0$.

!	igen $\otimes$	nem $\circ$	!
---	----------------	-------------	---

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor van olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, hogy $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$.

!	igen $\circ$	nem $\otimes$	!
---	--------------	---------------	---

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor v_3, v_2, v_1 is lin. függő.

!	igen $\circ$	nem $\circ$	!
---	--------------	-------------	---

Megoldás:

- Igaz: a lin. függetlenség definíciójából jön.
- Hamis: például a $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ vektorrendszer függő, de a v_3 -at nem tudjuk a v_1 és v_2 lineáris kombinációjaként felírni.

(9) Legyen v_1, v_2, v_3 egy vektorrendszer az $\mathbb{R}^5$ vektortérben. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi állítások (a "lin." a "lineárisan" rövidítése)?

Ha v_1, v_2, v_3 lin. független, akkor $v_1 + v_2 + v_3 \neq 0$.

!	igen $\otimes$	nem $\circ$	!
---	----------------	-------------	---

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor van olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, hogy $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$.

!	igen $\circ$	nem $\otimes$	!
---	--------------	---------------	---

Ha v_1, v_2, v_3 lin. függő, akkor v_3, v_2, v_1 is lin. függő.

!	igen $\otimes$	nem $\circ$	!
---	----------------	-------------	---

Megoldás:

- Igaz: a lin. függetlenség definíciójából jön.
- Hamis: például a $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ vektorrendszer függő, de a v_3 -at nem tudjuk a v_1 és v_2 lineáris kombinációjaként felírni.
- Igaz: vektorrendszerben a vektorok sorrendje nem számít.

(10) Legyen $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Melyik a C^{-1} mátrix legnagyobb abszolútértékű eleme.

!	$-2 \bigcirc$	$1 \bigcirc$	$2 \bigcirc$	$3 \bigcirc$	$-12 \bigcirc$	$-7 \bigcirc$	$-4 \bigcirc$
---	---------------	--------------	--------------	--------------	----------------	---------------	---------------

$-\frac{17}{2} \bigcirc$	egyéb $\bigcirc$	!
--------------------------	------------------	---

Megoldás:

2	1	4	1	0	0
1	1	2	0	1	0
1	2	1	0	0	1

Megoldás:

$$\begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{(2)}$$
$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(2)} \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(3)} \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ \hline \end{array}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{(2)} \\ \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{(3)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \xrightarrow{(4)} \\ \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \end{array}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{(2)} \\ \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{(3)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \xrightarrow{(4)} \\ \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \xrightarrow{(5)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \end{array}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{(2)} \\ \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{(3)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \xrightarrow{(4)} \\ \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \xrightarrow{(5)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \xrightarrow{(6)} \\ \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \end{array}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(1)} & \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(2)} & \\ \\ \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(3)} & \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(4)} & \\ \\ \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(5)} & \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(6)} & \\ \\ \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(7)} & \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ \hline \end{array} & & \end{array}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{(2)} \\ \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{(3)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \xrightarrow{(4)} \\ \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \xrightarrow{(5)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \xrightarrow{(6)} \\ \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \xrightarrow{(7)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \xrightarrow{(8)} \\ \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \end{array}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{(2)} \\
 \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{(3)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \xrightarrow{(4)} \\
 \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \xrightarrow{(5)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \xrightarrow{(6)} \\
 \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \xrightarrow{(7)} \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \xrightarrow{(8)} \\
 \begin{array}{|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

(10) Legyen $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Melyik a C^{-1} mátrix legnagyobb abszolútértékű eleme.

!	-2 ○	1 ○	2 ○	3 ○	-12 ○	-7 ⊗	-4 ○
---	--------	-------	-------	-------	---------	--------	--------

$-\frac{17}{2}$ ○	egyéb ○	!
-------------------	---------	---

- 1 dmnv1j-02.C1-B
- 2 dmnv1-12.C1-D
- 3 dmnv1-01.C1-C
- 4 dmnv1CSP-25-A
- 5 dmnv1-14.C0-C
- 6 1. Feladatsor**
- 7 2. Feladatsor
- 8 3. Feladatsor
- 9 Válogatott feladatok

1. kérdés

(1) Mennyi a z komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha $(4 - 2i)z = 2 + 14i$?
 (Emlékeztető: a képzetes rész az i együtthatója a kanonikus alakban.)

!	-3 ☐	-2 ☐	-1 ☐	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	egyik sem ☐	!
---	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

1. feladat

Mennyi a z komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha
 $(4 - 2i)z = 2 + 14i$?
 (Emlékeztető: a képzetes rész az i együtthatója a kanonikus alakban.)

1. kérdés

1. feladat

Mennyi a z komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha

$$(4 - 2i)z = 2 + 14i?$$

(Emlékeztető: a képzetes rész az i együtthatója a kanonikus alakban.)

Hint

Meg kell oldani a

$$(4 - 2i)z = 2 + 14i$$

egyenletet a komplex számok körében, ahol z az ismeretlen!

Megoldás:

$$z = \frac{2 + 14i}{4 - 2i} \cdot \frac{4 + 2i}{4 + 2i} = \frac{-20 + 60i}{20} = -1 + 3i$$

2. kérdés

(2) Igazak-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B, C halmazokra?

Ha $A \subseteq B$, akkor $A \times A \subseteq B \times B$.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$A \cup (B \cap A) = A$.

!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!

2. feladat

Igazak-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B, C halmazokra?

- Ha $A \subseteq B$, akkor $A \times A \subseteq B \times B$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cup (B \cap A) = A$.

2. kérdés

2. feladat

Igazak-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B, C halmazokra?

- Ha $A \subseteq B$, akkor $A \times A \subseteq B \times B$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cup (B \cap A) = A$.

Hint

Mivel a vizsga tesztos, rajzolgatni is lehet.

Megoldás:

- Igaz. (Kijön a definícióból.)
- Igaz. (Az unió disztributív a metszetre nézve.)
- Igaz. (Elnyelési tulajdonság.)

3. kérdés

(3) Legyen $A = P(\mathbb{N})$ az $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ hatványhalmaza, és legyen $\rho = \{(X, Y) \in A^2 : X \cap Y \text{ véges}\}$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	szimmetrikus ☐	antiszimmetrikus ☐	reflexív ☐	egyik sem ☐	?
---	------------------------------------	--	--------------------------------	---------------------------------	---

3. feladat

Legyen $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ az $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ hatványhalmaza, és legyen $\rho = \{(X, Y \in A^2 : X \cap Y \text{ véges})\}$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	szimmetrikus	antiszimmetrikus	reflexív	egyik sem	?
---	--------------	------------------	----------	-----------	---

3. kérdés

3. feladat

Legyen $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ az $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ hatványhalmaza, és legyen $\rho = \{(X, Y \in A^2 : X \cap Y \text{ véges})\}$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	szimmetrikus	antiszimmetrikus	reflexív	egyik sem	?
---	--------------	------------------	----------	-----------	---

Hint

Ne essünk azonnal teljesen kétségbe.

Megoldás:

- Szimmetrikus. Triviális. (Metszetben nem számít a sorrend.)
- Nem antiszimmetrikus. (Az előző miatt már ez is triviális.)
- Nem reflexív. Ez már nem feltétlen triviális. Ellenpélda:
 $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ viszont $(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \notin \rho$, mert $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}$ nem véges.

4. kérdés

(4) Az $x^3 + x^2 - 2x + 10$ polinomot maradékosan osztjuk az $x + 3$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

!	-3 ○	-2 ○	0 ○	2 ○	1 ○	3 ○	$x - 3$ ○	$x^2 + 1$ ○	egyik sem ○	!
---	------	------	-----	-----	-----	-----	-----------	-------------	-------------	---

4. feladat

Az $x^3 + x^2 - 2x + 10$ polinomot maradékosan osztjuk az $x + 3$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

4. kérdés

4. feladat

Az $x^3 + x^2 - 2x + 10$ polinomot maradékosan osztjuk az $x + 3$ polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

Hint

Polinomosztás.

Megoldás:

$$x^3 + x^2 - 2x + 10 = (x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 4) - 2$$

5. kérdés

(5) Legyen F egy olyan formula, amelyik a „Ha péntek van és mindenki alszik, akkor senki sem fél” ítéletet formalizálja. Az alábbi

$$\begin{aligned} U : & (\forall x)(\exists y)(\neg A(x) \wedge F(y) \wedge P), \\ V : & (P \wedge (\forall x)A(x)) \rightarrow ((\forall y)\neg F(y)), \\ W : & (P \wedge (\forall x)(\exists y))(A(x) \vee F(y)). \end{aligned}$$

képletek közül (alkalmas elsőrendű nyelv esetén) melyik az, amelyik F -vel ekvivalens formula?

!	☐ U	☐ V	☐ W	☐ egyik sem	!
---	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------------	---

5. feladat

Legyen F egy olyan formula, amelyik a „Ha péntek van és mindenki alszik, akkor senki sem fél” ítéletet formalizálja. Az alábbi

- $U : (\forall x)(\forall y)(\neg A(x) \wedge F(x) \wedge P)$
- $V : (P \wedge (\forall x)A(x)) \rightarrow ((\forall y)\neg F(y))$
- $W : (P \wedge (\forall x)(\exists y))(A(x) \vee F(y))$

képletek közül (alkalmas elsőrendű nyelv esetén) melyik az, amelyik F -vel ekvivalens formula?

5. feladat

Legyen F egy olyan formula, amelyik a „Ha péntek van és mindenki alszik, akkor senki sem fél” ítéletet formalizálja. Az alábbi

- $U : (\forall x)(\forall y)(\neg A(x) \wedge F(x) \wedge P)$
- $V : (P \wedge (\forall x) A(x)) \rightarrow ((\forall y) \neg F(y))$
- $W : (P \wedge (\forall x)(\exists y))(A(x) \vee F(y))$

képletek közül (alkalmas elsőrendű nyelv esetén) melyik az, amelyik F -vel ekvivalens formula?

Megoldás:

Egyértelmű, hogy a V formulát keressük. Az első mást jelent, az utolsó szintaktikailag nem is (jó) formula.

6. kérdés

(6) Igazak-e az alábbi kijelentések?

Létezik $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$ bijektív leképezés.

Létezik $\mathbb{Q}^7 \rightarrow \mathbb{R}$ bijektív leképezés.

Létezik $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}^2$ bijektív leképezés.

!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!

6. feladat

Igazak-e az alábbi kijelentések?

- Létezik $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$ bijektív leképezés.
- Létezik $\mathbb{Q}^7 \rightarrow \mathbb{R}$ bijektív leképezés.
- Létezik $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}^2$ bijektív leképezés.

6. feladat

Igazak-e az alábbi kijelentések?

- Létezik $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$ bijektív leképezés.
- Létezik $\mathbb{Q}^7 \rightarrow \mathbb{R}$ bijektív leképezés.
- Létezik $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}^2$ bijektív leképezés.

Hint

A feladat a számosságokhoz kapcsolódik.

Megoldás:

- $|\mathbb{N}| = \aleph_0 = \aleph_0 = |\mathbb{N}^3| \implies$ létezik bijekció
- $|\mathbb{Q}^7| = \aleph_0 \neq c = |\mathbb{R}| \implies$ nem létezik bijekció
- $|\mathbb{R}| = c \neq \aleph_0 = |\mathbb{N}^2| \implies$ nem létezik bijekció

7. kérdés

(7) Mennyi az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánása?

!	0	☐	1	☐	2	☐	3	☐	4	☐	-1	☐	-2	☐	-3	☐	egyéb	☐	!
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	----	-----------------------	----	-----------------------	----	-----------------------	-------	-----------------------	---

7. feladat

Mennyi az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánása?

7. feladat

Mennyi az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa?

Megoldás:

Kifejtem a determinánst a második oszlopa szerint:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 0. \end{aligned}$$

8. kérdés

(8) Az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzetének hány zérus eleme van? (Azaz A^2 kilenc eleme közül hány egyenlő 0-val?)

!	0	☐	1	☐	2	☐	3	☐	4	☐	5	☐	6	☐	7	☐	8	☐	!
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---

8. feladat

Az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzetének hány zérus eleme van?
(Azaz A^2 kilenc eleme közül hány egyenlő 0-val?)

8. kérdés

8. feladat

Az $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix négyzetének hány zérus eleme van?
(Azaz A^2 kilenc eleme közül hány egyenlő 0-val?)

Megoldás:

$$\begin{array}{c|c} & A \\ \hline A & A \cdot A = A^2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & 2 & 1 \\ & & & 2 & 1 & 3 \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 6 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}$$

9. kérdés

(9) Az alábbiak közül mely esetben mondhatjuk, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa **biztosan** nulla?

A mátrix sorvektorrendszere lineárisan független.

A mátrix megegyezik a transzponáltjával.

A mátrix valamelyik oszlopában minden elem nulla.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

9. feladat

Az alábbiak közül mely esetben mondhatjuk, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa **biztosan** nulla?

- A mátrix sorvektorrendszere lineárisan független.
- A mátrix megegyezik a transzponáltjával.
- A mátrix valamelyik oszlopában minden elem nulla.

9. feladat

Az alábbiak közül mely esetben mondhatjuk, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa **biztosan** nulla?

- A mátrix sorvektorrendszere lineárisan független.
- A mátrix megegyezik a transzponáltjával.
- A mátrix valamelyik oszlopában minden elem nulla.

Megoldás:

- Biztosan NEM nulla. (Paralelepipedon.)
- Semmi releváns információ nincs a kijelentésben a feladat szempontjából.
- Biztosan nulla. (Kifejtjük a csupa nulla oszlop szerint.)

10. kérdés

(10) Az $\mathbb{R}^5$ -ben tekintsük az $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$ részhalmazt. Hánydimenziós az S altér? (Gondoljunk a lineáris egyenletrendszerekről tanultakra!)

!	0	1	2	3	4	5	egyéb	!
---	---	---	---	---	---	---	-------	---

10. feladat

Az $\mathbb{R}^5$ -ben tekintsük az

$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$ részhalmazt. Hány dimenziós az S altér? (Gondoljunk a lineáris egyenletrendszerekről tanultakra!)

10. feladat

Az $\mathbb{R}^5$ -ben tekintsük az

$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$
részalmazt. Hány dimenziós az S altér? (Gondoljunk a lineáris egyenletrendszerekről tanultakra!)

Hint

A tanár úr már gondolt rá.

Megoldás:

Megoldjuk az egyenletet (egyenletrendszert), és a szabad változók száma adja a megoldásaltér dimenzióját. Most látható, hogy 4 szabadismeretlen van, tehát az S altér 4-dimenziós.

- 1 dmnv1j-02.C1-B
- 2 dmnv1-12.C1-D
- 3 dmnv1-01.C1-C
- 4 dmnv1CSP-25-A
- 5 dmnv1-14.C0-C
- 6 1. Feladatsor
- 7 2. Feladatsor**
- 8 3. Feladatsor
- 9 Válogatott feladatok

1. kérdés

(1) Legyen $A = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ és $\rho = \{(x, y) \in A^2 : x - y = 1\} \subseteq A^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus ☐	reflexív ☐	részbenrendezés ☐	egyik sem ☐	?
---	--	--------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------	---

1. feladat

Legyen $A = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ és $\rho = \{(x, y) \in A^2 : x - y = 1\} \subseteq A^2$. Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus	reflexív	részbenrendezés	egyik sem	?
---	------------------	----------	-----------------	-----------	---

1. kérdés

1. feladat

Legyen $A = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ és $\rho = \{(x, y) \in A^2 : x - y = 1\} \subseteq A^2$.
Mely tulajdonságokkal rendelkezik a ρ reláció az alábbiak közül?

?	antiszimmetrikus	reflexív	részbenrendezés	egyik sem	?
---	------------------	----------	-----------------	-----------	---

Megoldás:

- Antiszimmetrikus, mert $(a, b) \in \rho$ és $(b, a) \in \rho$ egyszerre nem is teljesülhet. (Logika - implikáció: $h \rightarrow \text{bármilyen} = \text{igaz.}$)
- Nem reflexív, mert bármely $a \in A$ esetében $a - a = 0$, azaz $(a, a) \notin \rho$.
- Nem részbenrendezés, mivel nem is reflexív. (Egyébként nem is tranzitív.)

2. kérdés

(2) Legyen $A = \mathcal{P}(\{1, 2\})$ és $B = \mathcal{P}(\{2, 3\})$, ahol tetszőleges X halmazra $\mathcal{P}(X)$ az X hatványhalmazát jelöli. Hány elemű az $A \triangle B$ halmaz?

!	0	☐	1	☐	2	☐	3	☐	4	☐	5	☐	6	☐	7	☐	egyik sem	☐	!
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	-----------	-----------------------	---

2. feladat

Legyen $A = \mathcal{P}(\{1, 2\})$ és $B = \mathcal{P}(\{2, 3\})$, ahol tetszőleges X halmazra $\mathcal{P}(X)$ az X hatványhalmazát jelöli. Hány elemű az $A \triangle B$ halmaz?

2. kérdés

2. feladat

Legyen $A = \mathcal{P}(\{1, 2\})$ és $B = \mathcal{P}(\{2, 3\})$, ahol tetszőleges X halmazra $\mathcal{P}(X)$ az X hatványhalmazát jelöli. Hány elemű az $A \triangle B$ halmaz?

Hint

Egyszerűen meg kell adni $A \triangle B$ -t.

Megoldás:

- $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $B = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$
 $\{\{1\}, \{1, 2\}\} \cup \{\{3\}, \{2, 3\}\} = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

3. kérdés

(3) Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$$

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

3. feladat

Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$

3. kérdés

3. feladat

Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$

Hint

Mit mondtam utolsó órán az alterekről?

Megoldás:

- Igen, mert minden homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaltere altér.
- Nem altér, mert nincs benne a nullvektor.
- Nem altér, mert nincs benne a nullvektor.

4. kérdés

(4) Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T -tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

!	2 ☐	5 ☐	7 ☐	1 ☐	4 ☐	0 ☐	-5 ☐	más számérték ☐	nincs értelmezve ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	-------------------------------------	--	---

4. feladat

Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T -tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

4. kérdés

4. feladat

Az $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját A^T -tal jelölve mennyi az $A \cdot A^T$ szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

Hint

Igen speciális mátrixszorzást kell végrehajtani, de ne ijedjünk meg tőle.

Megoldás:

- $A^T = (0 \ 1 \ 2)$

- | | | | |
|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 4 |

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$

5. kérdés

(5) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ (valós számokból álló) mátrixot jelöl, $A\vec{x} = \vec{0}$ az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa A , és a szóban forgó vektorok, illetve alterek az $\mathbb{R}^4$ vektortér elemei, illetve alterei.

Ha A -nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere kétdimenziós.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

Ha A -nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere nulladimenziós.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

Ha A -nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere négydimenziós.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

5. feladat

Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ (valós számokból álló) mátrixot jelöl, $A\vec{x} = \vec{0}$ az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa A , és a szóban forgó vektorok, illetve alterek az $\mathbb{R}^4$ vektortér elemei, illetve alterei.

- Ha A -nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere kétdimenziós.
- Ha A -nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere nulladimenziós.
- Ha A -nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere négydimenziós.

5. feladat

Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ (valós számokból álló) mátrixot jelöl, $A\vec{x} = \vec{0}$ az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa A , és a szóban forgó vektorok, illetve alterek az $\mathbb{R}^4$ vektortér elemei, illetve alterei.

- Ha A -nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere kétdimenziós.
- Ha A -nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere nulladimenziós.
- Ha A -nak van inverze, akkor az $A\vec{x} = \vec{0}$ megoldásainak altere négydimenziós.

Megoldás:

- A -nak van inverze
- $\implies \det(A) \neq 0$
- $\implies A$ sorvektorai lineárisan független vektorrendszert alkotnak
- $\implies A$ -ban Gauss-elimináció során nem tűnik el sor
- $\implies A$ lépcsős alaknak 4 sora van.
- $\implies$ Nincs szabadismeretlen.
- $\implies A$ megoldásaltér dimenziója nulla.

6. kérdés

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \right) \leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)) \right)$$

$$((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$$

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

6. feladat

Tautológiák-e az alábbi formulák?

- $(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y))) \leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)))$
- $((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$

6. feladat

Tautológiák-e az alábbi formulák?

- $(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y))) \leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)))$
- $((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$

Hint

Az egyik predikátum-, a másik ítéletkalkulusbeli formula.

Megoldás:

- Tautológia: a $\leftrightarrow$ két oldalán egymással ekvivalens formulák állnak. (Ugyanaz a tagadás, más formában.)
- Ha nincs jobb ötlet: igazságtábla, és megnézni, hogy mindenhol igaz jön-e ki. NEM.

7. kérdés

(7) Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív ☐	g szürjektív ☐	g injektív ☐	egyik sem ☐	?
---	------------------------------------	--------------------------------------	------------------------------------	---------------------------------	---

7. feladat

Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és
 $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

?	f injektív	g szürjektív	g injektív	egyik sem	?
---	--------------	----------------	--------------	-----------	---

7. feladat

Legyen $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ és
 $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x - 1, x + 1)$. Melyek az igaz kijelentések az
 alábbiak közül?

?	f injektív	g szürjektív	g injektív	egyik sem	?
---	--------------	----------------	--------------	-----------	---

Megoldás:

- f nem injektív. Ellenpélda: $(1, 4) \mapsto 5$, $(2, 3) \mapsto 5$ DE $(1, 4) \neq (2, 3)$.
- g nem szürjektív. A $(0, 0)$ -nak nincs őse.
- g injektív. Definíció szerint könnyen kijön.

8. kérdés

(8) Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

☐	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	☐	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$	☐	$\vec{a}, \vec{b}$	☐	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$	☐	egyik sem	☐	☐
-----------------------	-----------------------------	-----------------------	-----------------------------	-----------------------	--------------------	-----------------------	-----------------------------	-----------------------	-----------	-----------------------	-----------------------

8. feladat

Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

☐	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	☐	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$	☐	$\vec{a}, \vec{b}$	☐	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$	☐	egyik sem	☐	☐
-----------------------	-----------------------------	-----------------------	-----------------------------	-----------------------	--------------------	-----------------------	-----------------------------	-----------------------	-----------	-----------------------	-----------------------

8. kérdés

8. feladat

Legyen $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$, $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$ és $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$, és persze $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$. Melyek lineárisan függőek az alábbi vektorrendszerek közül?

?	$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	$\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$	$\vec{a}, \vec{b}$	$\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$	egyik sem	?
---	-----------------------------	-----------------------------	--------------------	-----------------------------	-----------	---

Hint

Standard feladat, nincs szükség segítségre.

Megoldás:

- Lineárisan függő.
- Lineárisan független.
- Lineárisan független.
- Lineárisan függő.

9. kérdés

(9) Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$, $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{\mathcal{P}(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A téglalapban felsoroltak közül melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$	☐	$\mathcal{D}$	☐	$\mathcal{E}$	☐	egyik sem	☐	?
---	---------------	-----------------------	---------------	-----------------------	---------------	-----------------------	-----------	-----------------------	---

9. feladat

Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$,
 $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{\mathcal{P}(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A
 téglalapban felsoroltak közül, melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	?
---	---------------	---------------	---------------	---

9. kérdés

9. feladat

Legyen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$,
 $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ és $\mathcal{E} = \{\mathcal{P}(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$. A
téglalapban felsoroltak közül, melyek osztályozásai az A halmaznak?

?	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	?
---	---------------	---------------	---------------	---

Hint

Hogy néz ki az osztályozás?

Megoldás:

- $\mathcal{C}$ osztályozás
- $\mathcal{D}$ nem osztályozás (a 2-es két blokkban szerepel)
- $\mathcal{E}$ nem osztályozás (a 2-es biztos nem szerepel egy blokkban sem)

10. kérdés

(10) Hány olyan eleme van a $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzének (a kilenc közül), amelyek egész szám?

Pontosabban, az A^{-1} -ben hány helyen van egész szám? (Tehát ha egy szám több helyen is fellép, akkor többször számoljuk.) Ha nem létezik az A^{-1} , akkor az „egyéb” lehetőséget jelölje meg.

!	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	7 ☐	8 ☐	9 ☐	egyéb ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-----------------------------	---

10. feladat

Hány olyan eleme van a $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzének (a kilenc közül), amelyek egész szám? Pontosabban, az A^{-1} -ben hány helyen van egész szám? (Tehát ha egy szám több helyen is fellép, akkor többször számoljuk.) Ha nem létezik az A^{-1} , akkor az „egyéb” lehetőséget jelölje meg.

10. kérdés

10. feladat

Hány olyan eleme van a $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzének (a kilenc közül), amelyik egész szám? Pontosabban, az A^{-1} -ben hány helyen van egész szám? (Tehát ha egy szám több helyen is fellép, akkor többször számoljuk.) Ha nem létezik az A^{-1} , akkor az „egyéb” lehetőséget jelölje meg.

Megoldás:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

- 1 dmnv1j-02.C1-B
- 2 dmnv1-12.C1-D
- 3 dmnv1-01.C1-C
- 4 dmnv1CSP-25-A
- 5 dmnv1-14.C0-C
- 6 1. Feladatsor
- 7 2. Feladatsor
- 8 3. Feladatsor**
- 9 Válogatott feladatok

1. kérdés

(1) Milyen tulajdonságai vannak a $\mathbb{Z}$ -n értelmezett $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ relációnak az alábbiak közül?

?	szimmetrikus ☐	antiszimmetrikus ☐	reflexív ☐	transzitiv ☐	egyik sem ☐	?
---	------------------------------------	--	--------------------------------	----------------------------------	---------------------------------	---

1. feladat

Milyen tulajdonságai vannak a $\mathbb{Z}$ -n értelmezett $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ relációnak az alábbiak közül?

?	szimmetrikus	antiszimmetrikus	reflexív	transzitiv	egyik sem	?
---	--------------	------------------	----------	------------	-----------	---

1. kérdés

1. feladat

Milyen tulajdonságai vannak a $\mathbb{Z}$ -n értelmezett $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 \leq y^2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ relációnak az alábbiak közül?

?	szimmetrikus	antiszimmetrikus	reflexív	tranzitív	egyik sem	?
---	--------------	------------------	----------	-----------	-----------	---

Megoldás:

- Nem szimmetrikus: $(0, 1) \in \rho$ de $(1, 0) \notin \rho$.
- Nem antiszimmetrikus: $(-1, 1) \in \rho$, $(1, -1) \in \rho$ de $1 \neq -1$.
- Reflexív: minden $x \in \mathbb{Z}$ -re $(x, x) \in \rho$, mert $x^2 \leq x^2$.
- Tranzitív: $x^2 \leq y^2$ -ből és $y^2 \leq z^2$ -ből következik, hogy $x^2 \leq z^2$.

2. kérdés

(2) Legyen z az a komplex szám, amelyre $(3 - i)z = 5 + 5i$. Mennyi z képzetes része (azaz az i együtthatója z kanonikus alakjában) az alábbiak közül?

!	-3 ☐	-2 ☐	-1 ☐	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	egyik sem ☐	!
---	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

2. feladat

Legyen z az a komplex szám, amelyre $(3 - i)z = 5 + 5i$. Mennyi z képzetes része (azaz az i együtthatója z kanonikus alakjában) az alábbiak közül?

2. kérdés

2. feladat

Legyen z az a komplex szám, amelyre $(3 - i)z = 5 + 5i$. Mennyi z képzetes része (azaz az i együtthatója z kanonikus alakjában) az alábbiak közül?

Hint

Úgy kell megoldani, mint egy középiskolai lineáris egyenletet.

Megoldás:

$$\begin{aligned}(3 - i)z &= 5 + 5i \\ z &= \frac{5 + 5i}{3 - i} \\ z &= \frac{5 + 5i}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{10 + 20i}{10} \\ z &= 1 + 2i\end{aligned}$$

3. kérdés

(3) Hány $\vee$ (diszjunkció jel) van az $A \rightarrow (B \vee (\neg C))$ teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma!)

!	0	☐	1	☐	2	☐	3	☐	4	☐	5	☐	6	☐	7	☐	egyéb	☐	!
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	-------	-----------------------	---

3. feladat

Hány $\vee$ (diszjunkció jel) van az $A \rightarrow (B \vee (\neg C))$ teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma!)

3. kérdés

3. feladat

Hány $\vee$ (diszjunkció jel) van az $A \rightarrow (B \vee (\neg C))$ teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma!)

Megoldás:

Igazságtáblázat $\Rightarrow$ megnézni hány különböző kiértékelésre igaz (a 8-ból) $\Rightarrow$ ez lesz a diszjunkció tagjainak a száma.

Másik megoldás:

$$\begin{aligned} A \rightarrow (B \vee (\neg C)) &= h \\ A = i \quad \& \quad B \vee (\neg C) &= h \\ B = h \quad \& \quad \neg C &= h \\ B = h \quad \& \quad C &= i \end{aligned}$$

A formula 1 darab kiértékelésre hamis, tehát 7 darabra igaz. Így a $\vee$ jelek száma 6.

4. kérdés

(4) Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mennyi A (valós) sajátértékeinek összege az alábbiak közül:

!	$-\infty$ ☐	-4 ☐	0 ☐	1 ☐	3 ☐	6 ☐	10 ☐	∞ ☐	egyik sem ☐	!
---	---------------------------------	----------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	----------------------------	--------------------------------	---------------------------------	---

4. feladat

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mennyi A (valós) sajátértékeinek összege az alábbiak közül?

4. kérdés

4. feladat

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mennyi A (valós) sajátértékeinek összege az alábbiak közül?

Hint

Elég speciális a mátrix alakja.

Megoldás:

Trianguláris mátrix sajátértékei a főátlóban lévő elemei.

5. kérdés

(5) Mekkora annak a paralelepipedonnak a térfogata, amelynek egyik csúcsa az origó, és az origóval szomszédos (azaz éllel összekötött) csúcsai pedig az $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 2)$ és $(1, 0, 1)$ pontok?

!	0	☐	1	☐	2	☐	3	☐	4	☐	5	☐	6	☐	7	☐	egyik sem	☐	!
---	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	---	-----------------------	-----------	-----------------------	---

5. feladat

Mekkora annak a paralelepipedonnak a térfogata, amelynek egyik csúcsa az origó, és az origóval szomszédos (azaz éllel összekötött) csúcsai pedig az $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 2)$, és $(1, 0, 1)$ pontok?

5. kérdés

5. feladat

Mekkora annak a paralelepipedonnak a térfogata, amelynek egyik csúcsa az origó, és az origóval szomszédos (azaz éllel összekötött) csúcsai pedig az $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 2)$, és $(1, 0, 1)$ pontok?

Hint

Ez egy alkalmazása a determinánsoknak.

Megoldás:

Felírjuk a determinánst, és kifejtjük az első sora szerint:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 - (-2) = 4 \end{aligned}$$

6. kérdés

(6) Igazak-e az alábbiak:

$\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen.

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

$|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$.

!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!
!	igen ☐	nem ☐	!

6. feladat

Igazak-e az alábbiak?

- $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen.
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.
- $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$.

6. kérdés

6. feladat

Igazak-e az alábbiak?

- $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen.
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.
- $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Hint

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = c$.
Számosságaritmetika alaptétele.

Megoldás:

- Hamis: $\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \max\{c, \aleph_0\} = c$.
- Igaz.
- Igaz: $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \max\{\aleph_0, \aleph_0\} = \aleph_0$.

7. kérdés

(7) Az alábbi

$$A : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xfygz = xgyfxgz \wedge xgyfz = xgzgyfz)$$

$$B : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzfg = xygxzgf \wedge xyfzg = xzgyzgf)$$

$$C : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzgf = xyfxzfg \wedge xygzf = xzfyzfg)$$

formulák közül melyik az, amelyik azt fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az f kétváltozós művelet disztributív a g kétváltozós műveletre?

!	☐ A	☐ B	☐ C	☐ egyik sem	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

7. feladat

Az alábbi

$$A : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xfygz = xgyfxgz \wedge xgyfz = xgzgyfz)$$

$$B : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzfg = xygxzgf \wedge xyfzg = xzgyzgf)$$

$$C : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzgf = xyfxzfg \wedge xygzf = xzfyzfg)$$

formulák közül melyik az, amelyik azt fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az f kétváltozós művelet disztributív a g kétváltozós műveletre?

7. kérdés

7. feladat

Az alábbi

$$A : (\forall x) (\forall y) (\forall z) (xfgz = xgyfxgz \wedge xgyfz = xfgzyfz)$$

$$B : (\forall x) (\forall y) (\forall z) (xyzfg = xygxzgf \wedge xyfzg = xzgyzgf)$$

$$C : (\forall x) (\forall y) (\forall z) (xyzgf = xyfxzfg \wedge xygzf = xzfyzfg)$$

formulák közül melyik az, amelyik azt fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az f kétváltozós művelet disztributív a g kétváltozós műveletre?

Hint

- MELYIK...?
- Fordított lengyel jelölés = postfix ábrázolás.
- Használjunk konkrét f és g -t, például szorzást és összeadást.

7. kérdés

7. feladat'

Melyik formula fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az f kétváltozós művelet disztributív a g kétváltozós műveletre?

Megoldás:

- Infix ábrázolás:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$xf(ygz) = (xfy)g(xfz)$$

- Postfix ábrázolás:

$$xyz + \cdot = xy \cdot xz \cdot +$$

$$xyzgf = xyfxzfg$$

- Ez már elég? Nem.
- Válasz: C.

8. kérdés

(8) Legyen $\vec{a} = (3, 2, 0, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, 2, 1)$, $\vec{v} = (12, 3, -6, 0) \in \mathbb{R}^4$. Írjuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ alakban ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Melyik a $\lambda + \mu$ szám (tehát a két együttható összege) az alábbiak közül?

!	1 ☐	2 ☐	3 ☐	-1 ☐	0 ☐	-2 ☐	-3 ☐	-5 ☐	egyéb ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

8. feladat

Legyen $\vec{a} = (3, 2, 0, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, 2, 1)$,
 $\vec{v} = (12, 3, -6, 0) \in \mathbb{R}^4$. Írjuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$
 alakban ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Melyik a $\lambda + \mu$ szám (tehát a két együttható
 összege) az alábbiak közül?

8. kérdés

8. feladat

Legyen $\vec{a} = (3, 2, 0, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, 2, 1)$, $\vec{v} = (12, 3, -6, 0) \in \mathbb{R}^4$. Írjuk fel a $\vec{v}$ vektort $\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ alakban ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Melyik a $\lambda + \mu$ szám (tehát a két együttható összege) az alábbiak közül?

Hint

Standard módszer vs. gondolkozzunk vs. vegyük észre.

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & | & 12 \\ 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & | & -6 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & | & -6 \\ 3 & -1 & | & 12 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 2 & | & -6 \\ 0 & -4 & | & 12 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

9. kérdés

(9) Legyen $\vec{a} = (1, -1, 2)$ és $\vec{b} = (-2, 1, 1)$. Melyik az $\vec{a} \times \vec{b}$ vektoriális szorzat a téglalapban felsoroltak közül?

!	$(-5, 2, -1)$ ○	$(-3, -5, -1)$ ○	$(-9, -9, 9)$ ○	$(9, -9, -9)$ ○	$(3, 7, 5)$ ○	egyik sem ○	!
---	-----------------	------------------	-----------------	-----------------	---------------	-------------	---

9. feladat

Legyen $\vec{a} = (1, -1, 2)$ és $\vec{b} = (-2, 1, 1)$. Melyik az $\vec{a} \times \vec{b}$ vektoriális szorzat a téglalapban felsoroltak közül?

9. kérdés

9. feladat

Legyen $\vec{a} = (1, -1, 2)$ és $\vec{b} = (-2, 1, 1)$. Melyik az $\vec{a} \times \vec{b}$ vektoriális szorzat a téglalapban felsoroltak közül?

Hint

Csak tudni kell mi az a vektoriális szorzás.

Megoldás:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= i \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3i - 5j - k = (-3, -5, -1)\end{aligned}$$

10. kérdés

(10) Jelölje be a téglalapban felsorolt elemek közül azokat, amelyek szerepelnek (egyszer vagy

többször) az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzában!

☐	-3 ☐	-2 ☐	-1 ☐	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	egyik sem szerepel ☐	☐
--------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	---	--------------------------

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

10. feladat

Jelölje be a téglalapban felsorolt elemek közül azokat, amelyek

szerepelnek (egyszer vagy többször) az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

mátrix inverzában!

10. kérdés

10. feladat

Jelölje be a téglalapban felsorol elemek közül azokat, amelyek

szerepelnek (egyszer vagy többször) az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

mátrix inverzében!

Megoldás:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \sim & \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \sim & \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} & \sim & \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1 dmnv1j-02.C1-B
- 2 dmnv1-12.C1-D
- 3 dmnv1-01.C1-C
- 4 dmnv1CSP-25-A
- 5 dmnv1-14.C0-C
- 6 1. Feladatsor
- 7 2. Feladatsor
- 8 3. Feladatsor
- 9 Válogatott feladatok**

3. kérdés

(8) Legyen $A := \{0, 1, \dots, 8\}$, $\alpha := \{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\} \subseteq A^2$, $\beta := \alpha^{-1}\alpha$ és $\gamma := A^2 \setminus \beta$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon definiált γ reláció?

?	transzitiv ☐	antiszimmetrikus ☐	dichotom ☐	egyik sem ☐	?
---	----------------------------------	--	--------------------------------	---------------------------------	---

3. feladat

Legyen $A = \{0, 1, \dots, 8\}$, $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\} \subseteq A^2$, $\beta = \alpha^{-1}\alpha$ és $\gamma = A^2 \setminus \beta$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon definiált γ reláció?

transzitiv	antiszimmetrikus	dichotom	egyik sem
------------	------------------	----------	-----------

3. kérdés

3. feladat

Legyen $A = \{0, 1, \dots, 8\}$, $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\} \subseteq A^2$,
 $\beta = \alpha^{-1}\alpha$ és $\gamma = A^2 \setminus \beta$. Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az A halmazon definiált γ reláció?

tranzitív	antiszimmetrikus	dichotom	egyik sem
-----------	------------------	----------	-----------

Hint

Legalább az alaphalmaz véges.

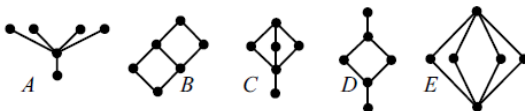
Megoldás:

- α = „legfeljebb 5 távolságra vannak”
- $\alpha^{-1} = \alpha$
- β = „legfeljebb 10 távolságra vannak” = A^2
- $\gamma = \emptyset$

$\implies \gamma$ tranzitív, antiszimmetrikus, nem dichotóm.

6. kérdés

(4) Az alábbi részbenrendezett halmazok közül melyiknek van legkisebb eleme?



?	A ☐	B ☐	C ☐	D ☐	E ☐	egyiknek sincs ☐	?
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------------------	---

6. feladat

Az alábbi részbenrendezett halmazok közül melyiknek van legkisebb eleme?

Megoldás: Mindnek van.

7. kérdés

(6) Legyen

$$\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \\ x - 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

$$\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 1.$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

☐ α szürjektív	☐ β injektív	☐ β szürjektív	☐ az előzőek egyike sem	☐
--	---	---	--	--------------------------

7. feladat

Legyen

$$\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \\ x - 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

$$\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 1.$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

☐ α szürjektív	☐ β injektív	☐ β szürjektív
☐ az előzőek egyike sem		

7. kérdés

7. feladat

Legyen

$$\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \\ x - 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases},$$

$$\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 1.$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

α szürjektív	β injektív	β szürjektív
az előzőek egyike sem		

Megoldás:

- α szürjektív, mert az x tetszőleges természetes szám őse (például) az $x + 1$ szám.
- β injektív, mert ha $x + 1 = y + 1$, akkor $x = y$.
- β nem szürjektív, mivel az 1-nek nincs őse.

8. kérdés

(7) Legyen $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x \mapsto (x^2 + 5, x^2 + 1)$, és $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x - y$. Igazak-e az alábbiak:

„ $\varphi\psi$ szürjektív.”

„ φ injektív.”

„ ψ szürjektív.”

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

8. feladat

Legyen $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto (x^2 + 5, x^2 + 1)$, és $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x - y$. Igazak-e az alábbiak:

- „ $\varphi\psi$ szürjektív.”
- „ φ injektív.”
- „ ψ szürjektív.”

8. kérdés

8. feladat

Legyen $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x \mapsto (x^2 + 5, x^2 + 1)$, és $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x - y$. Igazak-e az alábbiak:

- „ $\varphi\psi$ szürjektív.”
- „ φ injektív.”
- „ ψ szürjektív.”

Megoldás:

- φ injektív, mert „koordinátánként” injektív.
- ψ szürjektív, mert egy negatív x egész szám őse például a $(0, |x|)$ számpár, pozitív egész x esetén az őse például $(x, 0)$, és a nullának is végtelen sok őse van.
- $\varphi\psi$ nem szürjektív. Nem létezik olyan $x \in \mathbb{N}$, melyre $x(\varphi\psi) = 0$.

A tanárok hozzáállása a vizsgán:

A tanárok hozzáállása a vizsgán:



Köszönöm a figyelmet!