

MÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKE, INVERZE

1. Sajátérték

1. Definíció. Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$ -es mátrix. Ha $xA = \lambda x$ valamely $\lambda \in T$ testbeli elemre és valamely nemnulla $x \in T^{1 \times n}$ sorvektorra, akkor λ -t az A mátrix **sajátértékének**, az x vektort pedig az A mátrix λ -hoz tartozó **baloldali sajátvektornak** nevezzük.

2. Definíció. Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$ -es mátrix. Ha $Ax = \lambda x$ valamely $\lambda \in T$ testbeli elemre és valamely nemnulla $x \in T^{n \times 1}$ oszlopvektorra, akkor λ -t az A mátrix **sajátértékének**, az x vektort pedig az A mátrix λ -hoz tartozó **jobboldali sajátvektornak** nevezzük.

3. Definíció. Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$ -es mátrix, és λ egy sajátértéke A -nak. Ekkor a λ -hoz tartozó bal- és jobboldali sajátvektorok halmazát a nullvektorral kiegészítve **bal-** illetve **jobboldali sajátaltérnek** nevezzük.

4. Definíció. Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$ -es mátrix. A

$$\chi_A(x) = (-1)^n \cdot \det(A - x \cdot E_n)$$

polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

5. Tétel. Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$ -es mátrix. Ekkor az A mátrix sajátértékei pontosan a $\chi_A(x)$ karakterisztikus polinom gyökei.

A fejezet további részében a számtest a valós, illetve a komplex számok halmaza lesz, mert más számtestekben történő számolás későbbi kurzusok anyaga lesz.

6. Példa. Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit!

$$\chi_A(x) = \det \left(\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 9-x & 4 \\ 3 & 5-x \end{vmatrix} = (9-x)(5-x) - 12 = x^2 - 14x + 33,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyökei: } x_1 = 3, x_2 = 11.$$

Így a mátrixnak két különböző valós sajátértéke van: $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 11$.

7. Példa. Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit!

$$\chi_A(x) = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 4 & 5-x \end{vmatrix} = (1-x)(5-x) + 4 = x^2 - 6x + 9,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x = 3.$$

Így a mátrixnak egy darab valós sajátértéke van: $\lambda = 3$.

8. Példa. Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit!

$$\chi_A(x) = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (1-x)(3-x) + 2 = x^2 - 4x + 5,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 2 - i, x_2 = 2 + i.$$

Így a mátrixnak nincs sajátértéke, ha a valós számok teste fölött dolgozunk, viszont a komplex számok teste esetén két gyök van, így az A mátrixnak két különböző komplex sajátértéke van: $\lambda_1 = 2 - i$ és $\lambda_2 = 2 + i$.

9. Példa. Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit!

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 8-x & 5 & 9 \\ 0 & -9-x & -1 \\ 0 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = (8-x)(-9-x)(5-x)$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 8, x_2 = -9, x_3 = 5.$$

Így a mátrixnak három különböző valós sajátértéke van: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -9$ és $\lambda_3 = 5$.

10. Példa. Határozza meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit!

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1-(1-x)^2 & 1+(1-x) \\ 1 & 1-x & -1 \\ 0 & 2x-3 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (-1) \begin{vmatrix} -1-(1-x)^2 & 2-x \\ 2x-3 & 2-x \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} -1-(1-x)^2 & 1 \\ 2x-3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(-1-1+2x-x^2-2x+3) = (x-2)(1-x^2) \end{aligned}$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1.$$

Így a mátrixnak három különböző valós sajátértéke van: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = -1$.

2. Inverz

11. Definíció. Egy A négyzetes mátrix inverzének nevezzük azt az A^{-1} -gyel jelölt mátrixot, melyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, ahol I a megfelelő méretű egységmátrix. (A definíció alapján egyértelmű, hogy az inverz mérete megegyezik az eredeti mátrix méretével.)

A definíció azonban semmit nem mond arról, hogy milyen mátrixoknak van inverze, és ha van, akkor hogyan számolhatjuk ki. A következőkben két kiszámítási módot fogunk ismertetni.

2.1. Tétel szerinti kiszámítás

12. Definíció. Egy $A = (a_{ij})_{n \times n}$ négyzetes mátrix a_{ij} eleméhez tartozó **adjungált aldetemináns** A_{ij} -vel jelöljük és az

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

képlettel számítjuk ki, ahol D_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó **aldetermináns**, vagyis annak a mátrixnak a determinánsa, melyet úgy kapunk, hogy az A mátrixból elhagyjuk az i -edik sorát és j -edik oszlopát.

13. Tétel. Tetszőleges $A = (a_{ij})_{n \times n}$ négyzetes mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha $\det(A) \neq 0$. Ha van inverze, akkor pontosan egy van, és erre érvényes az alábbi képlet:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A_{ji})_{n \times n}.$$

14. Példa. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$$\det(A) = 3 + 4 - 2 - 4 = 1$$

$$A_{11} = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2, \quad A_{12} = (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1, \quad A_{21} = (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 4) = 0,$$

$$A_{22} = (-1)^{(2+2)} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2, \quad A_{23} = (-1)^{(2+3)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1, \quad A_{32} = (-1)^{(3+2)} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2,$$

$$A_{33} = (-1)^{(3+3)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2. Gauss–Jordan-elimináció

15. Definíció. Egy adott M mátrix esetén a **sorvektorrendszer elemi átalakításain** az alábbiakat értjük:

- két sor cseréje,
- egy sor megszorzása egy nemnulla konstanssal,
- egyik sor konstansszorosának hozzáadása egy másik sorhoz.

16. Tétel. Ha A egy $n \times n$ -es négyzetes mátrix, I pedig az $n \times n$ -es egységmátrix, akkor tekintsük a $B = (A \mid I)$ mátrixot. Az A mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a sorvektorrendszer elemi átalakításainak sorozatával a B mátrix $(I \mid C)$ alakra hozható. Ekkor $A^{-1} = C$.

17. Példa. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(1)} & \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(2)} & \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(3)} & \\
 \\
 \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(4)} & \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(5)} & \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} & \\
 \\
 \xrightarrow{(6)} \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{(7)} & \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} & \implies & A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

- (1) 1. és 2. sor cseréje.
- (2) 3. sorból kivonom az 1.-t.
- (3) 1. sorból kivonom a 2.-at.
- (4) 3. sorból kivonom az 2.-at.
- (5) 3. sor megszorzása (-1) -gyel.
- (6) 1. sorból kivonom a 3.-at.
- (7) 2. sorhoz hozzáadom a 3. sor (-2) -szeresét.

18. Megjegyzés. Hasonlóan a determináns kiszámításához nagyobb méretű mátrixok esetén itt is a Gauss–Jordan-elimináció sokkal gyorsabb, mint a tétel szerinti aldeterminánsos módszer.