

MÁTRIXOK

Mátrixok. Mátrixműveletek és tulajdonságaik.

1. Mátrixok

1. Definíció. Az M -mel jelölt $m \times n$ -es **mátrix** egy T test elemeiből álló táblázat, m darab sorral és n darab oszloppal. Az ilyen paraméterekkel rendelkező mátrixot $M_{m \times n}$ -nel jelöljük. Az M mátrix i -edik sorának j -edik **elemét** m_{ij} -vel jelöljük.

2. Példa. Legyen M az alábbi mátrix:

$$M_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} & 0.75 \\ \pi & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 6 & -7.2 & 9\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

Ekkor például $m_{13} = \sqrt{2}$.

3. Definíció. Az $(n \times n)$ -es **egység mátrix** olyan mátrix, amelynek a főátlója 1-eket tartalmaz, a többi eleme, pedig nulla:

$$I_n = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Az $(n \times n)$ -es **null mátrix** olyan mátrix, amely csak nulla elemeket tartalmaz:

$$Z_n = O_n = \mathbb{O}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Mátrixműveletek

4. Definíció (Mátrixok összeadása és skalárral szorzása). Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ és $B = (b_{ij})_{m \times n}$ két T számtest feletti $(m \times n)$ -es mátrix. Ekkor

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} \text{ és } cA = (ca_{ij})_{m \times n}.$$

5. *Megjegyzés.* Csak azonos méretű mátrixokat lehet összeadni, különböző méretűeket sosem.

6. **Példa.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 9 & 2 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ -8 & 10 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \end{pmatrix}, \quad (-2) \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ 6 & -2 & -14 \\ -4 & -4 & -18 \end{pmatrix}$$

7. **Definíció** (Mátrixok szorzása). Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ és $B = (b_{ij})_{n \times k}$ két T számtest feletti mátrix. Ekkor

$$AB = \left(\sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj} \right)_{m \times k}.$$

A fenti szummás képletet szövegesen is leírjuk. Egy $(m \times n)$ -es és egy $(n \times k)$ -s mátrix szorzata $(m \times k)$ -s méretű. Továbbá a szorzat i -edik sorának j -edik eleme $\sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj}$, azaz az A mátrix i -edik sorának és a B mátrix j -edik oszlopának skaláris szorzata.

8. *Megjegyzés.* Két mátrix csak akkor szorozható össze, ha az első mátrix oszlopainak száma megegyezik a második mátrix sorainak számával.

9. *Megjegyzés.* Az AB szorzat általában nem egyezik meg a BA szorzattal, sőt még lehet, hogy a méretük miatt nincs is értelmezve.

10. **Példa.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Az AB mátrix (2×2) -es méretű lesz. A számolást végezzük úgy hogy az A megfelelő sorvektorait szorozzuk össze skalárisan B megfelelő oszlopvektorával. A skaláris szorzás a következőt jelenti:

$$\langle (a, b, c, d), (e, f, g, h) \rangle = ae + bf + cg + dh.$$

Tehát AB megkapható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle (2, -3, 5), (6, 2, -3) \rangle & \langle (2, -3, 5), (-1, -2, 0) \rangle \\ \langle (1, 0, 8), (6, 2, -3) \rangle & \langle (1, 0, 8), (-1, -2, 0) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 - 6 - 15 & -2 + 6 + 0 \\ 6 + 0 - 24 & -1 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -18 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

11. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -9 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \\ -5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle(5, 4, -2), (-1, 0, -5)\rangle & \langle(5, 4, -2), (-2, 8, 7)\rangle & \langle(5, 4, -2), (3, 3, 9)\rangle \\ \langle(-9, 4, 6), (-1, 0, -5)\rangle & \langle(-9, 4, 6), (-2, 8, 7)\rangle & \langle(-9, 4, 6), (3, 3, 9)\rangle \\ \langle(3, 1, -2), (-1, 0, -5)\rangle & \langle(3, 1, -2), (-2, 8, 7)\rangle & \langle(3, 1, -2), (3, 3, 9)\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 + 0 + 10 & -10 + 32 - 14 & 15 + 12 - 18 \\ 9 + 0 - 30 & 18 + 32 + 42 & -27 + 12 + 54 \\ -3 + 0 + 10 & -6 + 8 - 14 & 9 + 3 - 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -21 & 92 & 39 \\ 7 & -12 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12. Definíció (Transzponálás). Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ egy T számtest feletti $(m \times n)$ -es mátrix. Ekkor A^T egy $(n \times m)$ -es mátrix, melynek egy tetszőleges eleme a következőképpen számítható ki:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

Ez azt jelenti, hogy a mátrix sorait felcseréljük az oszlopaival, vagy másképpen fogalmazva tükrözzük a mátrixot a "főátlóra". (Igazi főátlóról csak négyzetes mátrixok esetében szoktunk beszélni.)

13. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 8 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

14. Tétel (Műveletek tulajdonságai.). Legyenek A, B, C egy tetszőleges T test feletti mátrixok, és $c, d \in T$ skalárok. Ekkor

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(c + d)A = cA + dA$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $c(AB) = (cA)B$
- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = c(A^T)$

3. Informatikai alkalmazások

- A különböző geometriai transzformációk tulajdonképpen lineáris leképezésnek tekinthetők, és kifejezhetők egy alkalmas mátrixszal történő szorzás segítségével. Például tükrözzük az $(a; b)$ pontot az y tengelyre. Ekkor a kapott vektor $(-a, b)$. Ha jól megnézzük, könnyen megtaláljuk az y tengelyre való tükrözés mátrixát:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ mert } (-a; b) = (a; b) \cdot A.$$

Ilyen mátrixok megadhatók tükrözésekre, forgatásokra, vetítésekre, akár több dimenzióban is. LÁSD: Diszkrét matematika III. és Számítógépes grafika tantárgyakból.

- A gráfok egyértelműen kódolhatók szomszédsági és pont-él illeszkedési mátrixukkal. Mivel a mátrix szinte minden programnyelvben jól kezelhető egy 2-dimenziós tömbként, így ennek a kódolásnak is vannak előnyei. A gráfok az informatika több területén is előkerülnek, akár programozási algoritmus, akár hardverszinten, például beszélhetünk erőforrásgráfról, vagy a számítógép-hálózat is felfogható egy (irányított) gráfként.
- Lineáris egyenletrendszer esetén elég az egyenletrendszer bővített mátrixával dolgozni. Sokszor kell megoldani lineáris egyenletrendszert, és érdekes kérdések merülnek fel a numerikus precizitás és a számolás időigénye kapcsán, LÁSD: Közelítő és szimbolikus számítások.
- Kódoláselméletben bizonyos kódok esetében a kódolás és a dekódolás is egy-egy mátrixszorzással kivitelezhető. Ide kapcsolódik a generátormátrix és a paritás-ellenőrző mátrix fogalma is, LÁSD: Diszkrét matematika III.