Komplex számok

Komplex számok és alakjaik,
számolás komplex számokkal.

1. Komplex számok

A komplex számokra a valós számok kiterjesztéseként volt szükség. Ugyanis már középiskolában előkerülnek olyan másodfokú egyenletek, melyeknek a valós számok között nincs megoldása. Felmerült tehát a kérdés, hogyan kell a valós számokat kiterjeszteni úgy, hogy a másodfokú egyenleteknek mindig legyen megoldása, de a valós számoknak az eddig megismert tulajdonságai az új számok között is érvényesek maradjanak. A komplex számok használata többek között ezt a problémát is megoldja.

1. Definíció. A **komplex számok** halmazát $\mathbb{C}$-vel jelöljük, és $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

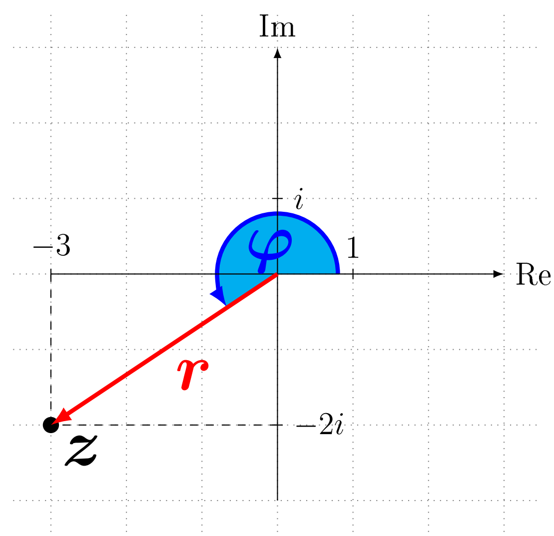
2. Definíció. Legyen $z \in \mathbb{C}$, $z = (a, b)$ egy komplex szám.
Ekkor a z **kanonikus alak**ja

$$z = a + b \cdot i.$$

A z komplex szám **trigonometrikus alak**ja

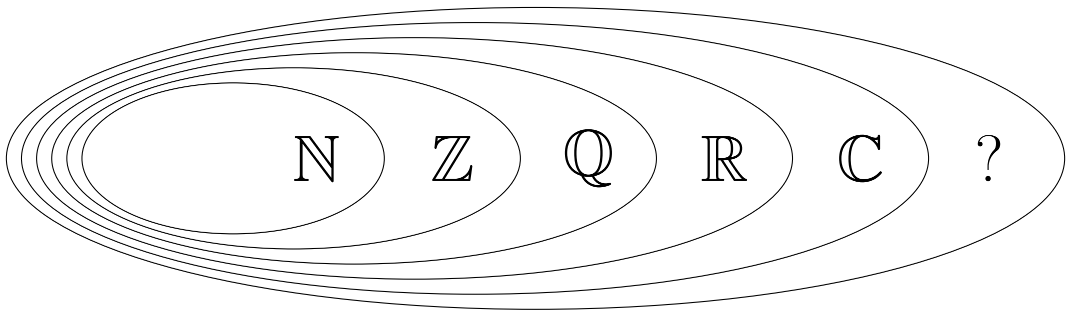
$$z = r\left(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)\right),$$

ahol $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, és $\varphi = \arg(z)$ az a szög, amivel a valós tengely pozitív felét el kell forgatni az origó körül úgy, hogy átmenjen a z-nek megfelelő ponton.



3. Definíció. A $z = (a, b)$ komplex szám $z = a + bi$ kanonikus alakjában szereplő a valós számot z **valós rész**ének, b valós számot z **képzetes rész**ének nevezzük. Más jelöléssel $z = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z)$. Az i a **képzetes egység**. Az i olyan komplex szám, amelynek a négyzete -1, azaz $i^2 = -1$.

Az előbbi definíciókból látható, hogy ez az új számfogalom valóban a valós számok kiterjesztéseként értelmezhető. Ugyanis minden r valós szám egy $(r, 0)$ alakú komplex számnak felel meg, azaz olyan komplex számnak, melynek a képzetes része nulla. Az ismert számhalmazok viszonyát a következő Venn-diagram mutatja. A kurzus keretében nem tárgyaljuk, hogy miként bővíthetők a komplex számok, ha egyáltalán lehetséges ilyen bővítés.



1. ábra.

4. Definíció. Legyenek z_1 és z_2 a következő kanonikus alakú komplex számok:

$$z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di.$$

Ekkor definiálhatjuk a következő **műveletek**et.

- *Összeadás:* $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$
- *Ellentett:* $-z_1 = -a - bi.$
- *Kivonás:* $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a - c) + (b - d)i.$
- *Szorzás:* $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$
- *Konjugált:* $\overline{z_1} = a - bi.$
- *Abszolútérték:* $|z_1| = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$
- *Osztás:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

A definícióban látható, hogy komplex számok kanonikus alakjával pontosan úgy számolunk, mint az algebrai kifejezésekkel. Tehát a képzetes egységre gondolhatunk úgy, mint egy változó, de fontos, hogy ki kell használnunk az i azon tulajdonságát, mely szerint $i^2 = -1$. Tehát ha a képzetes egységnek egy magasabb hatványával találkozunk, akkor fel kell használnunk az előbb említett tulajdonságot, mert egy kanonikus alakban nem szerepelhet i-nek magasabb hatványa. A képzetes egység minden magasabb hatványa átírható az $1, -1, i, -i$ komplex számok valamelyikére.

5. Példa.

- $i^{221} = i^{220} \cdot i = (i^2)^{110} \cdot i = (-1)^{110} \cdot i = 1 \cdot i = i.$
- $i^{43} = i^{42} \cdot i = (i^2)^{21} \cdot i = (-1)^{21} \cdot i = (-1) \cdot i = -i.$
- $i^{1262} = (i^2)^{631} = (-1)^{631} = -1.$

A következő példában bemutatjuk, hogyan történik a fent definiált műveletek elvégzése adott komplex számok esetén.

6. Példa. $z_1 = (1, -1)\,,\ z_2 = (-4, 5)$

- **Kanonikus alak:** $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -4 + 5i.$
- **Trigonometrikus alak:** $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right).$
- **Műveletek:**
  - *Összeadás:* $z_1 + z_2 = (1 - 4) + (-1 + 5)i = -3 + 4i.$
  - *Ellentett:* $-z_2 = 4 - 5i.$
  - *Kivonás:* $z_2 - z_1 = (-4 - 1) + (5 - (-1))i = -5 + 6i.$
  - *Szorzás:* $z_1 z_2 = (1 - i)(-4 + 5i) = -4 + 5i + 4i + 5 = 1 + 9i.$
  - *Konjugált:* $\overline{z_1} = 1 + i.$
  - *Abszolútérték:* $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$
  - *Osztás:*

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-4 + 5i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{-4 - 4i + 5i - 5}{1^2 - i^2} = \frac{-9 + i}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}i.$$

7. Tétel. *Ha $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$ két komplex szám, akkor $z_1 = z_2$ pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.*

A komplex számok trigonometrikus alakja megengedi, hogy geometriai szempontból vizsgáljuk a komplex számokat. A következő tételben összefoglaljuk, hogyan történik a fentebb már definiált műveletek elvégzése trigonometrikus alak esetén.

8. Tétel. *Legyenek z_1 és z_2 a következő trigonometrikus alakú komplex számok:*

$$z = r\left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right),\ w = s\left(\cos\psi + i \sin\psi\right).$$

Ekkor

- $z \cdot w = rs\left(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)\right);$
- $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}\left(\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)\right);$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)\right);$
- $\overline{z} = r\left(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)\right);$

- *tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ számra $z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\right);$*
- *ha $z \neq 0$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számra $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right),\quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, azaz minden nemnulla komplex számnak pontosan n darab n-edik gyöke van.*

A tételben szereplő állítások geometriai jelentőséggel bírnak. Minden komplex számnak a Gauss-féle számsíkon megfelel egy pont. Például egy komplex szám konjugáltjának megfelelő pont, az eredetinek a valós tengelyre vett tükörképe. Egy komplex szám n-edik gyökei, pedig egy meghatározott sugarú körvonalon vannak és egy szabályos n-szöget határoznak meg.

9. Példa. Legyen $z = \left(\sqrt{3}, 1\right)$ és $w = (1, -1)$ két komplex szám.

- $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \ w = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right);$
- $zw = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right);$
- $\frac{z}{w} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{19\pi}{12}\right)\right);$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right);$
- $\overline{w} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right);$
- $w^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\left(6\cdot\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(6\cdot\frac{7\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i;$
- $\sqrt[3]{z} = x: \ x_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}/3\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}/3\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right),$
  $x_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)/3\right) + i\sin\left(\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)/3\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i\sin\frac{13\pi}{18}\right),$
  $x_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right)/3\right) + i\sin\left(\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right)/3\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18} + i\sin\frac{25\pi}{18}\right).$

2. Alkalmazások

1. Komplex számok fizikai alkalmazásai: váltóáramú körök leírása, rezgések és hullámok leírása, komplex idő- és amplitúdófüggvény, kvantummechanikai számítások.
2. Vegyük a következő sorozatot: $z_0 = 0$, $z_n = z_{n-1}^2 + c$. Azon c komplex számok, melyek esetén a sorozat korlátos a Mandelbrot-halmaz elemei, ami talán a legismertebb fraktálalakzat.
3. Hogy rajzoljunk egy szabályos n-szöget a képernyőre? Rögzítsünk egy pontot, és a megadott képlettel számoljuk ki a rögzített pont által reprezentált komplex szám n-edik gyökeit (illetve csak azok közelítő értékeit). Így megkapjuk az n-szög összes csúcsát.
4. Komplex számokkal működő Fourier-transzformációt használnak a képfeldolgozás különböző területein, például az arcfelismerésben, vagy a tömörítésben.
5. A Wolfram Alpha ingyenes, internetes szoftverrel a komplex számokkal történő elemi számítások könnyen elvégezhető. A `http://www.wolframalpha.com/` honlapon, vagy a *Wolfram Mathematica* nevű offline programban `(10+4i)/((2-3i)*(-9-i))` formában lehet megadni komplex számokat és műveleteket. Szinte mindegyik komputeralgebrai szoftver képes a komplex számokat kezelni, például a Maple és a MatLab is.