

HALMAZOK

Halmazelméleti alapfogalmak, hatványhalmaz,
halmazműveletek, halmazműveletek azonosságai.

1. Alapfogalmak

A *halmaz* és az *elem* fogalmakat alapfogalmaknak tekintjük, nem definiáljuk őket. Jelölés: $x \in H$, azaz x eleme a H halmaznak. Itt x egy tetszőleges valami, mivel a H elemei is tetszőleges dolgok lehetnek. Egy halmaz elemeit megadhatjuk felsorolással, képlettel, körülírással; a lényeg, hogy egyértelműen kiderüljön, hogy mik tartoznak a halmazba, és mik nem. Egy halmaz *véges*, ha véges sok eleme van. Ezt a véges számot a halmaz *elemszámának* nevezzük. Egy H halmaz elemszámát $|H|$ -val jelöljük.

1. Definíció (Üres halmaz). Az *üres halmaz* olyan halmaz, melynek nincs eleme. Jele: $\emptyset$. Másképpen fogalmazva: minden x -re teljesül az, hogy $x \notin \emptyset$.

2. *Megjegyzés.* Csak egyetlen üres halmaz van, viszont sok különböző módon felírható. Például

$$\emptyset = \{10\text{-nél nagyobb páros prímszámok}\} = \{4 \text{ fejű piros kutyák}\}.$$

3. Definíció. Két halmaz *egyenlő*, ha elemeik megegyeznek. Jelölés: $A = B$.

4. *Megjegyzés.* Az előző definíció értelmében egy halmazban minden elemet egyszeres multiplicitással számolunk. Például $\{0, 1, 2\} = \{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2\}$, mert a két oldal elemei ugyanazok. Ugyanígy értelmetlen a halmazban az elemek sorrendjét megkülönböztetni.

5. Példa. ¹ $\{2, 4, 6, 8\} = \{8, 4, 2, 6\} = \{x \in \mathbb{N} : x < 10 \text{ és } \exists y \in \mathbb{N}, \text{ hogy } x = 2y\}$ = "egyjegyű páros számok halmaza"

6. Példa. $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

A bal oldali halmaz az üres halmaz, neki nincs eleme, elemszáma nulla. A jobb oldali egy olyan halmaz, mely 1 darab elemet tartalmaz, mégpedig az üres halmazt. Ennek az elemszáma 1. Ez a kettő olyan, mint egy üres könyv, illetve az üres könyvet tartalmazó polc. A könyv üres, de a polc nem. A két halmaz természetesen nem egyenlő.

¹ $\forall x$ jelentése "bármely x ", "minden x "; $\exists x$ jelentése "létezik x ", "van olyan x "

2. Részhalmaz, hatványhalmaz

7. Definíció (Részhalmaz). Az A halmaz a B halmaznak *részhalmaza*, ha minden A -beli elem egyben B -nek is eleme. Jelölés: $A \subseteq B$.

8. *Megjegyzés.* Minden H halmaznak van két triviális részhalmaza:

- $H \subseteq H$, azaz minden halmaz részhalmaza saját magának, illetve
- $\emptyset \subseteq H$, azaz az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

9. Definíció (Valódi részhalmaz). Az A halmaz a B halmaznak *valódi részhalmaza*, ha részhalmaza, de nem egyenlő vele. Jelölése: $A \subset B$.

A részhalmaz fogalmára érvényesek olyan tulajdonságok, mint valós számok körében a "kisebb vagy egyenlő" relációra.

10. Tétel. Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Ekkor

- ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$;
- ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.

11. *Megjegyzés.* Az előző tételben szereplő tulajdonságoknak neve is van, ami a későbbiekben még sokszor elő fog fordulni. Az első tulajdonság azt fejezi ki, hogy a részhalmaz reláció *transzitív*, a második pedig azt, hogy *antiszimmetrikus*. Az pedig, hogy minden halmaz részhalmaza saját magának azt fejezi ki, hogy a részhalmaz reláció *reflexív*.

12. Definíció (Hatóványhalmaz). Egy H halmaz *hatványhalmazának* nevezzük azt a halmazt, mely a H halmaz összes részhalmazát tartalmazza elemként. Tehát ez egy olyan halmaz, melynek elemei halmazok. Jelölése: $\mathcal{P}(H)$.

13. Példa. $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Általában egy rögzített, jól definiált halmaz elemeivel foglalkozunk, ugyanis nem túl sok értelme van a $H = \{0, 1, 2, 3, \text{Shakespeare összes művei}, p, q, r\}$ halmaznak. Ez is egy korrekten definiált halmaz, de gyakorlati haszna nem túl sok van. Ezért meg szoktunk állapítani egy alaphalmazt, és csak ezen alaphalmaz elemeit vizsgáljuk, az ezen kívüli elemekkel nem foglalkozunk. Például a prímszámok halmazának vizsgálatakor az alaphalmazt tekinthetjük például az egész számok halmazának, mert úgy sem akarjuk azt vizsgálni, hogy egy ceruza eleme-e a prímszámok halmazának. Mivel a ceruza nincs az alaphalmazban, így nem is merül fel ilyen kérdés.

Ha már azonos típusú elemekből álló halmazokat vizsgálunk, akkor bevezethetünk a halmazaink között műveleteket.

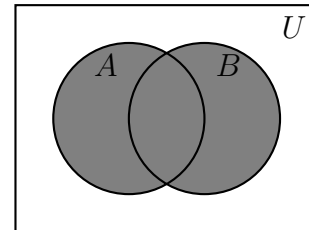
3. Halmazműveletek

14. Definíció (Halmazműveletek). Legyen A és B két tetszőleges halmaz, U legyen a rögzített alaphalmaz, $A, B \subseteq U$. (A formális definíciók mellett a műveleteket Venn-diagramokon is szemléltetjük.)

1. Az A és B halmazok **uniójának** nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van valamelyik halmazban.

Jelölés: $A \cup B$.

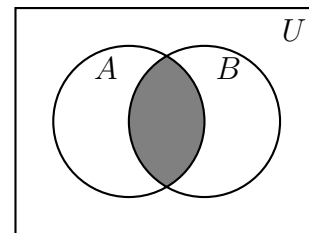
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ VAGY } x \in B\}$$



2. Az A és B halmazok **metszetének** nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van mindkét halmazban.

Jelölés: $A \cap B$.

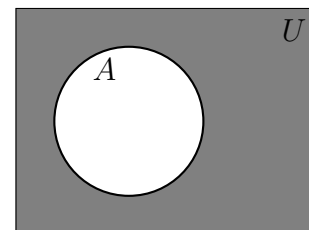
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ÉS } x \in B\}$$



3. Az A halmaz **komplementerének** nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van U -ban (az alaphalmazban), de nincs benne A -ben.

Jelölés: $\overline{A}$.

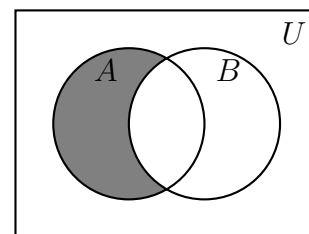
$$\overline{A} = \{x : x \in U \text{ ÉS } x \notin A\}$$



4. Az A és B halmazok **különbségének** nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van A -ban, de nincs benne B -ben.

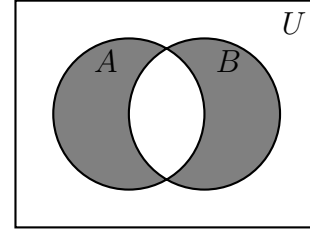
Jelölés: $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ÉS } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$



5. Az A és B halmazok **szimmetrikus differenciájának** nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme az A és a B halmazok közül pontosan az egyikben van benne. Jelölés: $A \triangle B$.

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$



4. Halmazműveleti azonosságok

Ebben a részben a halmazműveletek néhány fontosabb tulajdonságát vizsgáljuk meg. Tételként fogunk rájuk hivatkozni, de az állítások legnagyobb része az előbbi definíciók alapján könnyen és gyorsan igazolható.

15. Tétel. *Tetszőleges A, B, C halmazokra*

$$\begin{array}{lll} A \cap A = A, & A \cup A = A, & (\text{idempotencia}) \\ A \cap B = B \cap A, & A \cup B = B \cup A, & (\text{kommutativitás}) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), & (\text{asszociativitás}) \\ (A \cup B) \cap A = A, & (A \cap B) \cup A = A, & (\text{abszorptivitás}) \\ (A \cup B) \cap C = & (A \cap B) \cup C = & (\text{disztributivitás}) \\ (A \cap C) \cup (B \cap C), & (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{array}$$

16. Tétel. *Tetszőleges $A, B (\subseteq U)$ halmazokra*

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}, & \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}, & (\text{de Morgan azonosságok}) \\ \overline{\overline{A}} &= A, \\ A \cap \overline{A} &= \emptyset, & A \cup \overline{A} &= U, \\ A \cap U &= A, & A \cup U &= U, \\ A \cap \emptyset &= \emptyset, & A \cup \emptyset &= A. \end{aligned}$$

A következő tétel már szerepelt a halmazműveletek definíciójánál, azonban fontosságuk miatt tételként is leírjuk újra. A halmazműveletek definícióinál az igazi definíciók a szöveges definíciók, azokból lehet levezetni a következő egyenlőségeket a nyelvtani kötőszavakat megfelelően variálva.

17. Tétel. *Tetszőleges $A, B (\subseteq U)$ halmazokra*

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

és

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Az előző két tétel segíthet abban, hogy a különböző halmazműveleteket átírjuk más halmazműveleti jelek segítségével.

18. *Megjegyzés.* A fenti halmazműveletek mindegyike kifejezhető unió, metszet, és komplementer műveletek segítségével.

19. Példa.

$$A \setminus (B \Delta \overline{C}) = A \cap \overline{(B \Delta \overline{C})} \quad (1)$$

$$= A \cap \overline{((B \cup \overline{C}) \setminus (B \cap \overline{C}))} \quad (2)$$

$$= A \cap \overline{((B \cup \overline{C}) \cap \overline{(B \cap \overline{C})})} \quad (3)$$

$$= A \cap \overline{((B \cup \overline{C}) \cup \overline{(B \cap \overline{C})})} \quad (4)$$

$$= A \cap ((\overline{B} \cap C) \cup (B \cap \overline{C})) \quad (5)$$

(1): Különbség átírása a 17. Tétel szerint.

(2): Szimmetrikus differencia átírása a 17. Tétel szerint.

(3): Különbség átírása a 17. Tétel szerint.

(4): De Morgan azonosság alkalmazása a 16. Tétel szerint.

(5): De Morgan azonosság alkalmazása a 16. Tétel szerint, illetve alkalmazzuk ezen tétel második állítását is.

5. Alkalmazások

1. Halmaz, mint absztrakt adattípus. LÁSD: Algoritmusok és adatszerkezetek I. kurzus.
2. Java programozási nyelv: például Set interfész; AbstractSet, HashSet osztály.
3. Formális nyelvek és számítástudomány:
 - ábécé: előre rögzített, meghatározott jelek általában véges halmaza, például $\Sigma = \{\text{magyar nyelv által használt betűk és karakterek}\}$;
 - az ábécé elemei a karakterek, a karakterekből álló sorozatok a szavak, például Shakespeare minden műve egy-egy szó;
 - Σ^* az összes szavak halmaza;
 - Σ^* részhalmazai a nyelvek, például Shakespeare összes műve egy nyelv.
 - LÁSD: Bonyolultságelmélet kurzus.
4. Reguláris kifejezések: olyan string, amivel meghatározható stringek egy halmaza.
5. Fontos kiterjesztés: fuzzy-halmazok. Alkalmazásai: irányítástechnika, mesterséges intelligencia, elektronika. LÁSD: Mesterséges intelligencia kurzus.
6. Mandelbrot-halmaz és egyéb fraktálok.
7. Számelméleti halmazok: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
8. Biológia: rendszertani kategorizálás.

9. Minden területen, mindenféle kategóriába sorolás halmazelméleti feladat. Ujjlenyomat keresése adatbázisban, telefonszám keresése telefonkönyvben, ... - ez mind olyan probléma, mely arra vezethető vissza, hogy egy adott objektum eleme-e egy halmaznak. Gyakorlatban a halmazokon már értelmezve van valami sorrendiségi reláció, így már nem pusztán matematikai halmazokról beszélhetünk, ahol a halmaz elemeinek sorrendje nem számít. LÁSD: Algoritmusok és adatszerkezetek I. kurzus - Keresési és rendezési algoritmusok.