Relációk

Descartes-szorzat. Relációk szorzata, inverze. Relációk tulajdonságai. Ekvivalenciareláció, osztályozás. Részbenrendezés, Hasse-diagram.

1. Descartes-szorzat

1. Definíció. Tetszőleges két a, b objektum esetén értelmezhetjük az (a, b) elempár fogalmát. **Rendezett elempár**ról beszélünk, ha (a_1, b_1) pontosan akkor egyenlő (a_2, b_2)-vel, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$, azaz fontos a két elem sorrendje.

2. Definíció (Descartes-szorzat)**.** Legyen A, B két halmaz. Ekkor az A és B halmaz **Descartes-szorzat**a az a halmaz, mely azokat a rendezett elempárokat tartalmazza, amiknek az első komponense A-nak, második komponense B-nek eleme. Jelölés: $A \times B$.

$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A, \ b \in B\}$$

3. Definíció (Descartes-négyzet)**.** Legyen A egy halmaz. Ekkor az A halmaz **Descartes-négyzet**e az a halmaz, mely azon rendezett elempárokból áll, amiknek mindkét komponense A-nak az eleme. Jelölés: A^2.

$$A^2 = A \times A = \{(a, b) : \ a \in A, \ b \in A\}$$

4. *Megjegyzés.* Ha A véges halmaz, és elemszáma m, illetve B is véges halmaz, és elemszáma n, akkor az $A \times B$ halmaz is véges, és elemszáma $m \cdot n$. Ez egy egyszerű középiskolai feladatként is felfogható, és könnyen igazolható.

5. *Megjegyzés.* Ha $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$, akkor $A \times B = \emptyset$.

6. *Megjegyzés.* Ha A és B két tetszőleges halmaz, akkor $A \times B \neq B \times A$.

2. Relációk

7. Definíció (Megfeleltetés)**.** Legyen A és B két halmaz. Az $A \times B$ Descartes-szorzat részhalmazait A-ból B-be menő **megfeleltetés**eknek nevezzük. Ekkor A az indulási halmaz, B pedig az érkezési halmaz.

8. Definíció. Legyen A egy halmaz. Az A^2 Descartes-négyzet részhalmazait **reláció**knak nevezzük. A relációkat általában a görög ábécé kis betűivel jelöljük.

9. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ két halmaz. Ekkor $\varrho = \{(1, 3), (3, 6), (4, 2)\}$ egy megfeleltetés A-ból B-be, és $\sigma = \{(1, 1), (2, 4), (4, 2)\}$ egy reláció az A halmazon.

10. *Megjegyzés.* A megfeleltetések ábrázolása történhet gráffal, koordinátarendszerrel és mátrixszal is.

11. Definíció (Relációk szorzata)**.** Legyen ϱ és σ két reláció az A halmazon, azaz $\varrho \subseteq A^2$ és $\sigma \subseteq A^2$. Ekkor a két **reláció szorzat**át $\varrho\sigma$-val jelöljük, és a következőképpen definiáljuk:

$$\varrho\sigma = \left\{(a, c) \in A^2 : \ \text{létezik } b \in A, \ \text{hogy } \ (a, b) \in \varrho \text{ és } \ (b, c) \in \sigma\right\}.$$

12. Definíció (Reláció inverze)**.** Legyen σ egy reláció az A halmazon, azaz $\sigma \subseteq A^2$. Ekkor a σ **reláció inverz**ét σ^{-1}-gyel jelöljük, és a következőképpen definiáljuk:

$$\sigma^{-1} = \left\{(a, b) \in A^2 : \ (b, a) \in \sigma\right\}.$$

13. *Megjegyzés.* Mivel a reláció is halmaz, ezért relációk metszetéről, uniójáról, különbségéről, szimmetrikus differenciájától is beszélhetünk, de ezeket itt nem részletezzük. Ezek úgy működnek, mint egyszerű halmazok esetén, csak itt a halmazok elemei speciálisan rendezett elempárok.

3. Relációk tulajdonságai

A továbbiakban legyen A egy tetszőleges halmaz. Definiálni fogjuk a relációk néhány tulajdonságát.

14. Definíció. A továbbiakban a $\sigma \subseteq A^2$ reláció legyen rögzített, és definiáljuk a relációk következő tulajdonságait.

1. σ **REFLEXÍV**, ha BÁRMELY $a \in A$-ra teljesül, hogy $(a, a) \in \sigma$.
   Például a $\varrho = " \leq " \left(\subseteq \mathbb{R}^2\right)$ reláció reflexív, mert bármely x valós számra teljesül, hogy $(x, x) \in \varrho$, azaz $x \leq x$.
2. σ **SZIMMETRIKUS**, ha BÁRMELY $a, b \in A$-ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \sigma$, akkor $(b, a) \in \sigma$.
   Például az előbb említett ϱ reláció nem szimmetrikus, mert abból, hogy $3 \leq 4$ [azaz $(3, 4) \in \varrho$], nem következik, hogy $4 \leq 3$ [azaz $(4, 3) \in \varrho$]. Az $" = "$ reláció már szimmetrikus.

   Megjegyzés. Ha már egy ELLENPÉLDÁT találunk, akkor a tulajdonság meg van lőve.
3. σ **TRANZITÍV**, ha BÁRMELY $a, b, c \in A$-ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \sigma$ és $(b, c) \in \sigma$, akkor $(a, c) \in \sigma$.
   Például a fenti ϱ reláció nyilván tranzitív, mert ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$ is teljesül.
4. σ **EKVIVALENCIARELÁCIÓ**, vagy röviden **EKVIVALENCIA**, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív is egyszerre.
5. σ **ANTISZIMMETRIKUS**, ha BÁRMELY $a, b \in A$-ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \sigma$ és $(b, a) \in \sigma$, akkor $a = b$.
   Például a fenti ϱ reláció nyilván antiszimmetrikus, mert ha $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x \leq y \leq x$, ami azt jelenti, hogy $x = y$.
6. σ **RÉSZBENRENDEZÉS**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív is egyszerre.
7. σ **DICHOTÓM**, ha BÁRMELY $a, b \in A$-ra teljesül, hogy $(a, b) \in \sigma$ vagy $(b, a) \in \sigma$.
   Például a ϱ reláció dichotóm, mert bármely két valós számról el tudjuk dönteni, hogy melyik kisebb-egyenlő, mint a másik.

   Megjegyzés. Ha egy reláció nem reflexív, akkor dichotóm sem lehet. (Gondoljunk bele! A dichotómia definíciójában az a-ról és a b-ről nem tettük fel, hogy különbözőek legyenek.)
8. σ **RENDEZÉS**, ha részbenrendezés és dichotóm is egyszerre.

15. *Megjegyzés.* Ha egy relációt az irányított gráfjával adunk meg, akkor

- σ pontosan akkor reflexív, ha a gráf minden pontjában van hurokél;
- σ pontosan akkor tranzitív, ha teljesül az, hogy ha létezik út két pont között, akkor létezik 1 hosszú út is közöttük;
- σ pontosan akkor szimmetrikus, ha a gráf minden éle kétirányú;
- σ pontosan akkor antiszimmetrikus, ha bármely két különböző pont között 0 vagy 1 irányban megy él;
- σ pontosan akkor dichotóm, ha a gráf bármely két pontja között megy él.

16. Példa. Legyen σ a következő reláció: $\sigma = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 2 \mid x^2 + y^2\right\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Milyen tulajdonságok teljesülnek a σ relációra?
Megoldás:

1. *Reflexivitás:* Azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, x) \in \sigma$, azaz hogy $2 \mid x^2 + x^2$. Ez nyilván teljesül, mert $x^2 + x^2 = 2x^2$, ami nyilván páros, ezért minden egész szám σ-relációban áll saját magával.
2. *Szimmetria:* Azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x, y \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$-ból következik-e feltétel nélkül, hogy $(y, x) \in \sigma$. Ez nyilván teljesül, mert $(x, y) \in \sigma \iff 2 \mid x^2 + y^2 \iff 2 \mid y^2 + x^2 \iff (y, x) \in \sigma$, azaz σ szimmetrikus.
3. *Tranzitivitás:* Azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x, y, z \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$-ból és $(y, z) \in \sigma$-ból következik-e feltétel nélkül, hogy $(x, z) \in \sigma$. Nézzük meg:
   $(x, y) \in \sigma \iff 2 \mid x^2 + y^2 \iff x^2 + y^2 = 2k \ (k \in \mathbb{Z}) \iff x^2 = 2k - y^2$
   $(y, z) \in \sigma \iff 2 \mid y^2 + z^2 \iff y^2 + z^2 = 2l \ (l \in \mathbb{Z}) \iff z^2 = 2l - y^2$
   Behelyettesítünk: $x^2 + z^2 = 2k + 2l - 2y^2 = 2\left(k + l - y^2\right) = 2m$, ahol $m \in \mathbb{Z}$.
   Így megkaptuk, hogy $2 \mid x^2 + z^2$, azaz $(x, z) \in \sigma$, vagyis a reláció tranzitív.
4. Mind a három fenti tulajdonság teljesül, ezért a reláció *ekvivalencia*(reláció).
5. *Antiszimmetria:* Azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x, y \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$-ból és $(y, x) \in \sigma$-ból következik-e feltétel nélkül, hogy $x = y$. Rendkívül könnyen tudunk ellenpéldát találni, például $(2, 4) \in \sigma$, $(4, 2) \in \sigma$ DE $2 \neq 4$.

   Megjegyzés. Nagyon kevés olyan reláció van, ami egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus is, de létezik ilyen, sőt már meg is volt említve egy ilyen reláció egy korábbi példaként. Viszont az sem igaz, hogy egy relációra valamelyik teljesül. Könnyen adható olyan reláció, amelyik se nem antiszimmetrikus, se nem szimmetrikus.

6. Mivel az antiszimmetria nem teljesül, így σ nem *részbenrendezés*, és ezért már *rendezés* sem lehet, de azért nézzük meg az utolsó tulajdonságot is.
7. *Dichotómia:* Most azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x, y \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$ vagy $(y, x) \in \sigma$. Nyilván egy páratlan-páros kombináció sem így, sem amúgy nincs benne a relációban, és így megint könnyen találtunk ellenpéldát (egyszerre végtelen sokat is).

4. Osztályozás

Az osztályozás tulajdonképpen egy adott halmaz speciális részhalmazokra történő felbontása. A formális definíció olvasása közben gondoljunk a biológiából ismert rendszertani országokra. Minden élőlény beletartozik valamelyikbe, nincs olyan élőlény, aki két különböző kategóriába esne, egyik ország sem üres, és csak élőlények vannak beléjük sorolva. Gyakorlatilag ilyen a formális definíció is.

17. Definíció. Legyen A egy tetszőleges halmaz. Ekkor a $\mathcal{C}$ halmazt **osztályozás**nak nevezzük az A halmazon, ha

1. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$,
2. BÁRMELY $X \in \mathcal{C}$-re $X \neq \emptyset$,
3. BÁRMELY $X, Y \in \mathcal{C}$-re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$, és
4. $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$.

Szóban így vonható össze az előbbi négy feltétel: $\mathcal{C}$ osztályozás az A halmazon, ha $\mathcal{C}$ az A nemüres (2) részhalmaziból áll (1), és minden A-beli elem (4) pontosan egy darab $\mathcal{C}$-beli halmaznak eleme (3).

A $\mathcal{C}$ halmaz elemeit **osztály**oknak nevezzük.

18. Példa. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{3, 5\}\}$. (A színezésnek egy későbbi példában lesz értelme.)
$\mathcal{C}$ osztályozás, mert minden A-beli elem szerepel pontosan egy osztályban, és egyik osztály sem üres.

Ekvivalenciareláció – osztályozás

19. Tétel. *Egy A halmaz feletti $\mathcal{C}$ osztályozás meghatároz egy ekvivalenciát a következő módon:*

$$\rho_{\mathcal{C}} = \left\{(a, b) \in A^2 : \exists X \in \mathcal{C},\ \textit{hogy}\ a, b \in X\right\}.$$

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az egy osztályban lévő elemek egymással mindenhogy relációban vannak.

20. Példa. Az előző példában szereplő osztályozáshoz felírható ekvivalenciareláció:

$$\rho_{\mathcal{C}} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (4, 4), (3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}.$$

21. Tétel. *Ha ρ ekvivalencia az A halmazon, akkor az $A/\rho = \{b\varrho * : b \in A\}$ halmaz osztályozás A-n, ahol $b\rho* = \{c \in A : (b, c) \in \rho\}$.*

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy egy ekvivalenciarelációhoz felírható egy olyan osztályozás, amelyben az egymással relációban lévő elemek ugyanabban az osztályban vannak.

Mire jó ez? Mindig áttérhetünk ekvivalenciáról osztályozásra, illetve osztályozásról ekvivalenciára, és azzal dolgozhatunk, amelyikkel nekünk kényelmesebb. Például ha meg akarjuk határozni két olyan ekvivalencia metszetét, melyek az általuk meghatározott osztályozással vannak megadva, akkor dolgozhatunk a következőképpen. Az osztályozásokat átírjuk reláció-alakba, relációalakba, és ezeknek vesszük a metszetét. Az osztályozások metszete teljesen más, rossz eredményt adna.

22. Példa. Térjünk vissza a 16. Példában bemutatott σ relációra, amiről beláttuk, hogy ekvivalencia. Ekkor nyilván van egy hozzá tartozó osztályozás. Adjuk ezt meg!
Megoldás:

Keressünk egymással relációban álló számokat: $(0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 4), (2, 6), \ldots \in \sigma$. Nyilván végtelen sok van, de az azért látszik hogy a páros számok a páros számokkal relációban vannak, ezért nyilván egy osztályban vannak. Mivel osztályozást keresünk, így a páratlan számokat is kell valahova tennünk. Könnyen rájöhetünk, hogy a páratlan számok relációban állnak a páratlan számokkal, ugyanis páratlan számok négyzete szintén páratlan, és két páratlan szám összege már páros, ezért teljesül a reláció feltétele. Így már van két osztály-jelöltünk, a páros számok, és a páratlan számok halmaza. Most már csak azt kell belátni, hogy páratlan szám nem állhat relációban páros számmal, hogy valóban két különböző osztályt kapjunk. Ez pedig könnyű, mert páros szám négyzete páros, páratlané páratlan, és egy páros és egy páratlan szám összege páratlan, ami nyilván nem osztható kettővel, így nem teljesülhet a reláció feltétele.

Tehát a keresett $\mathcal{C}_\sigma$ osztályozás a következő: $\mathcal{C}_\sigma = \{\{\text{páros egész számok}\}, \{\text{páratlan egész számok}\}\}$.

5. Részbenrendezés, Hasse-diagram

23. Definíció (Emlékeztető)**.**

- Egy A halmaz esetén az A^2 halmaz részhalmazait **reláció**knak nevezzük.
- Egy reláció **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.
- Egy reláció (teljes) **rendezés**, ha részbenrendezés és dichotóm.

24. Definíció (Részbenrendezett halmaz)**.** Egy $(A;\leq)$ párt **részbenrendezett halmaz**nak nevezünk, ha A egy nemüres halmaz, „$\leq$" pedig egy tetszőleges részbenrendezés az A halmazon.

25. Definíció. Legyen $(A;\leq)$ egy részbenrendezett halmaz, $a, b \in A$. Ekkor jelölje $a < b$ azt, hogy $a \leq b$, de $a \neq b$. Jelölje $a \prec b$ azt, hogy $a < b$, és nincs olyan $x \in A$, melyre $a < x$ és $x < b$ teljesülne. Ha $a \prec b$, akkor azt mondjuk, hogy b **köveți** a-t, a $\prec$ relációt pedig **követési relációnak** nevezzük.

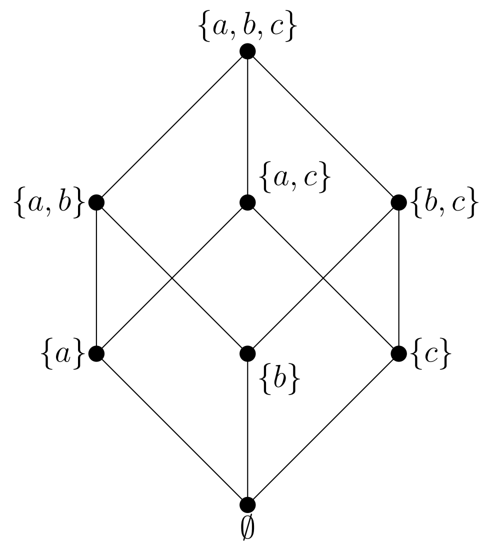
26. Tétel. *Ha $(A;\leq)$ véges részbenrendezett halmaz, akkor tetszőleges $a, b \in A$ elemekre az alábbi két állítás ekvivalens:*

- $a \leq b$;
- *létezik $n \in \mathbb{N}_0$ és léteznek $c_0, c_1, \ldots, c_n \in A$ elemek úgy, hogy $a = c_0$, $c_0 \prec c_1$, $\ldots$, $c_{n-1} \prec c_n$, $c_n = b$.*

A tétel azt jelenti, hogy a $\prec$ követési reláció meghatározza a részbenrendezést.

A részbenrendezés ábrázolása helyett szemléletesebb a követési relációt ábrázolni, illetve az előző tétel szerint ezt meg is tehetjük, és erre szolgál a Hasse-diagram.

27. Definíció (Hasse-diagram)**.** Egy tetszőleges $(A;\leq)$ részbenrendezett halmaz **Hasse-diagram**ja olyan irányított gráf, amelyben a részbenrendezett halmaz A alaphalmazának az elemei alkotják a gráf pontjait, és a gráfban az a és b pontok között pontosan akkor halad él, ha $a \prec b$. Az él irányítását a diagramon úgy ábrázoljuk, hogy a b pontot az a pont fölött helyezzük el. A reflexivitásból adódó hurokéleket a diagramon nem ábrázoljuk.



28. Példa. Legyen adott az $A = \{a, b, c\}$ három elemű halmaz. A $(\mathcal{P}(A);\subseteq)$ pár bizonyíthatóan részbenrendezett halmaz, és a Hasse-diagramja a jobb oldali ábrán látható.

29. Definíció. Legyen $(A;\leq)$ egy részbenrendezett halmaz, $a \in A$ pedig egy tetszőleges elem.

- Az a **maximális elem**e A-nak, ha nem létezik olyan $x \in A$, melyre $b < x$.
- Az a **minimális elem**e A-nak, ha nem létezik olyan $x \in A$, melyre $x < b$.
- Az a **legnagyobb elem**e A-nak, ha minden $x \in A$ elemre $x \leq a$.
- Az a **legkisebb elem**e A-nak, ha minden $x \in A$ elemre $a \leq x$.

30. Tétel. *Ha a az $(A;\leq)$ részbenrendezett halmaz legnagyobb eleme, akkor a maximális elem is. Ugyanez igaz legkisebb és minimális elemre.*

31. Tétel. *Legnagyobb és legkisebb elemből csak legfeljebb egy darab létezhet egy $(A;\leq)$ részbenrendezett halmazban, maximális és minimális elem több is lehet.*

32. Példa. Az előző példában lévő részbenrendezett halmaz legnagyobb (és egyben maximális) eleme $\{a, b, c\}$, a legkisebb (és egyben minimális) eleme $\emptyset$.

6. Informatikai alkalmazások

1. Relációs adatmodell. Tegyük fel, hogy bizonyos személyek neveit és címeit biztonsági okokból két külön adatbázisban (esetleg két külön rendszerben) tároljuk. Az első minden névhez egy azonosító kódot tartalmaz, a második minden kódhoz hozzárendel egy címet. A két „tábla" egymás nélkül használhatatlan. Ahhoz, hogy „lekérdezzük" valaki(k)nek a címét, tulajdonképpen egy relációszorzást kell alkalmaznunk, először a (név, kód) párt határozzuk meg, ezután a (kód, cím) párt, ebből kapunk (név, cím) párt. Ez relációszorzás.
2. Rendezési algoritmusok. Adott egy véges halmaz, rendezzük az elemeit a megadott rendezési reláció szerint. (LÁSD: Algoritmusok és adatszerkezetek kurzus.)
3. Post-háló és Post tétele. LÁSD: Logika és informatikai alkalmazásai kurzus.
4. Egy gráf erősen összefüggő komponensei az elérhetőségi reláció által meghatározott osztályai a gráf csúcshalmazának. Informatikai a probléma, mert minden irányított gráfot elképzelhetünk úgy, mint egy számítógép-hálózat reprezentációja, és minden hálózat reprezentálható gráffal.

7. Alkalmazások

1. Partícionális információs struktúra. Elsősorban játékelméleti probléma, arról szól, hogy egy játékos nem ismeri, hogy jelenleg mi az állás, de pontosan tudja, hogy az állásról az általa birtokolt információkból mik a lehetséges és nem lehetséges lépések, ami kételemű partíciója az állások halmazának. Ezt általában feltételként szokták alkalmazni, ésszerű, hogy miért.
2. Minden kategorizálási feladat tulajdonképpen osztályozás. Például, ha iratokat rendezünk mappákba, akkor nyilván nem akarjuk, hogy maradjon üres mappa (illetve ha mégis, akkor az nem része a kategorizálásnak), illetve minden iratot pontosan egy mappába szeretnénk betenni. Ez tulajdonképpen az osztályozás definíciója (osztály=mappa, irat=elem).
3. Biológia: rendszertani osztályozás, minden (ismert) élőlény beletartozik pontosan egy fajba, és nyilván nem tartunk számon olyan fajt, aminek nem létezik (soha nem is létezett) egyede.