

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH – 2011. október 13.

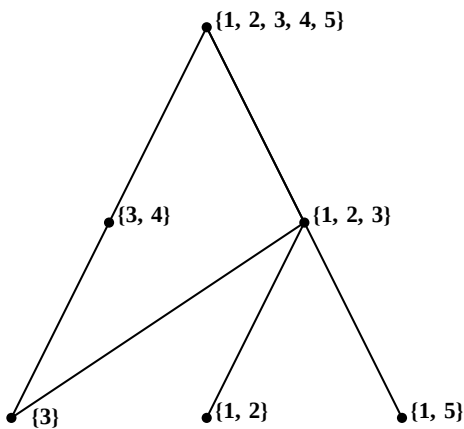
α csoport

1. Feladat (4 pont). Legyen adott az

$$A = \{\{3\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagramját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeket!

Megoldás.



- Maximális elem: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Minimális elemek: $\{3\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}$.
- Legnagyobb elem: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Legkisebb elem: NINCS.

2. Feladat (4 pont). Legyen adott a

$$\varrho = \{(a, b) : 4 \mid 3a - 3b\} \subseteq \mathbb{Z}^2$$

reláció. Vizsgálja meg, hogy a ϱ relációra az alábbiak közül mely tulajdonságok teljesülnek! Válaszait mindegyik esetben indokolja!

- antiszimmetrikus
- dichotóm
- reflexív
- szimmetrikus

Megoldás.

- Nem antiszimmetrikus. Ellenpélda: $(4, 0) \in \varrho$ és $(0, 4) \in \varrho$, viszont $4 \neq 0$.
- Nem dichotóm. Ellenpélda: $(1, 0) \notin \varrho$ és $(0, 1) \notin \varrho$ sem.
- Reflexív, mivel tetszőleges $a \in \mathbb{Z}$ esetén

$$(a, a) \in \varrho \iff 4 \mid 3a - 3a \iff 4 \mid 0,$$

ami mindig teljesül.

- Szimmetrikus. mivel tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}$ számok esetén

$$(a, b) \in \varrho \iff 4 \mid 3a - 3b \iff 4 \mid -(3b - 3a) \iff 4 \mid 3b - 3a \iff (b, a) \in \varrho,$$

ami pont az a következtetés, ami a szimmetriához szükséges.

3. Feladat (4 pont). Döntse el, hogy ...

- ... az $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\alpha = 4x^3$ leképezés bijektív-e?
- ... a $\beta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$, $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ leképezés injektív-e?
- ... a $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x\gamma = |x + 2|$ leképezés szürjektív-e?

Válaszait mindegyik esetben indokolja!

Megoldás.

1. Az α leképezés bijektív, mivel injektív és szürjektív is.

- Az α leképezés injektív, mivel tetszőleges $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ elemek képe csak úgy lehet egyenlő, ha ők maguk is egyenlők:

$$\begin{aligned}x_1\alpha &= x_2\alpha \\4x_1^3 &= 4x_2^3 \\x_1 &= x_2.\end{aligned}$$

- Az α leképezés szürjektív, mivel minden rögzített $y \in \mathbb{R}$ értékhez tudok találni olyan $x \in \mathbb{R}$ értéket, melyre $x\alpha = y$:

$$\begin{aligned}4x^3 &= y \\x &= \sqrt[3]{\frac{y}{4}}.\end{aligned}$$

2. A β leképezés nem injektív. Ellenpélda: $(2, 1)\beta = (4, 2)\beta = 2$, DE $(2, 1) \neq (4, 2)$.

3. A γ leképezés nem szürjektív. Ellenpélda: az 1-nek nincs őse, azaz nincs olyan $x \in \mathbb{N}$, amelyre $x\gamma = 1$.

4. Feladat (3 pont). Legyen adott az $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alaphalmaz, és ennek három részhalmaza:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6\} \text{ és } C = \{1, 4, 6\}.$$

Határozza meg a $\mathcal{P}((A \triangle B) \setminus \overline{C})$ hatványhalmazt!

Megoldás.

$$\begin{aligned}A \triangle B &= \{1, 3, 6\} \\ \overline{C} &= \{2, 3, 5\} \\ (A \triangle B) \setminus \overline{C} &= \{1, 6\} \\ \mathcal{P}(\{1, 6\}) &= \{\emptyset, \{1\}, \{6\}, \{1, 6\}\}\end{aligned}$$

5. Feladat (3 pont). Legyen adott három komplex szám:

$$z_1 = -3 - 5i, z_2 = 4 + i, z_3 = 2 - 3i.$$

Határozza meg a

$$\frac{\overline{z_1} - z_2}{z_3}$$

komplex számot.

Megoldás.

$$\begin{aligned}\overline{z_1} &= -3 + 5i \\ \overline{z_1} - z_2 &= -7 + 4i \\ \frac{\overline{z_1} - z_2}{z_3} &= \frac{-7+4i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{-14-21i+8i-12}{4+9} = \frac{-26-13i}{13} = -2 - i\end{aligned}$$

Kiegészítés. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Q} = \{\text{racionális számok}\}$, $\mathbb{R} = \{\text{valós számok}\}$, $\mathbb{R}^+ = \{\text{pozitív valós számok}\}$, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH – 2011. október 13.

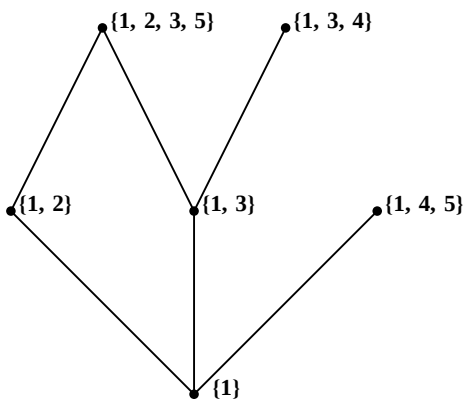
β csoport

1. Feladat (4 pont). Legyen adott az

$$A = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagramját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeket!

Megoldás.



- Maximális elemek: $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 4, 5\}$.
- Minimális elem: $\{1\}$.
- Legnagyobb elem: NINCS.
- Legkisebb elem: $\{1\}$.

2. Feladat (4 pont). Legyen adott a

$$\sigma = \{(a, b) : 3 \mid 2a - 2b\} \subseteq \mathbb{Z}^2$$

reláció. Vizsgálja meg, hogy a σ relációra az alábbiak közül mely tulajdonságok teljesülnek! Válaszait mindegyik esetben indokolja!

- antiszimmetrikus
- dichotóm
- reflexív
- szimmetrikus

Megoldás.

- Nem antiszimmetrikus. Ellenpélda: $(3, 0) \in \sigma$ és $(0, 3) \in \sigma$, viszont $3 \neq 0$.
- Nem dichotóm. Ellenpélda: $(1, 2) \notin \sigma$ és $(2, 1) \notin \sigma$ sem.
- Reflexív, mivel tetszőleges $a \in \mathbb{Z}$ esetén

$$(a, a) \in \sigma \iff 3 \mid 2a - 2a \iff 3 \mid 0,$$

ami mindig teljesül.

- Szimmetrikus. mivel tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}$ számok esetén

$$(a, b) \in \sigma \iff 3 \mid 2a - 2b \iff 3 \mid -(2b - 2a) \iff 3 \mid 2b - 2a \iff (b, a) \in \sigma,$$

ami pont az a következtetés, ami a szimmetriához szükséges.

3. Feladat (4 pont). Döntse el, hogy ...

- ... az $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x\alpha = 2\sqrt{x}$ leképezés bijektív-e?
- ... a $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x\beta = 5|x|$ leképezés injektív-e?
- ... a $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x\gamma = x^2$ leképezés szürjektív-e?

Válaszait mindegyik esetben indokolja!

Megoldás.

1. Az α leképezés bijektív, mivel injektív és szürjektív is.

- Az α leképezés injektív, mivel tetszőleges $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ elemek képe csak úgy lehet egyenlő, ha ők maguk is egyenlők:

$$\begin{aligned}x_1\alpha &= x_2\alpha \\2\sqrt{x_1} &= 2\sqrt{x_2} \\x_1 &= x_2.\end{aligned}$$

- Az α leképezés szürjektív, mivel minden rögzített $y \in \mathbb{R}^+$ értékhez tudok találni olyan $x \in \mathbb{R}^+$ értéket, melyre $x\alpha = y$:

$$\begin{aligned}2\sqrt{x} &= y \\x &= \left(\frac{y}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

2. A β leképezés nem injektív. Ellenpélda: $(-3)\beta = 3\beta = 15$, DE $-3 \neq 3$.

3. A γ leképezés nem szürjektív. Ellenpélda: a 3-nek nincs őse, azaz nincs olyan $x \in \mathbb{N}$, amelyre $x\gamma = 3$.

4. Feladat (3 pont). Legyen adott az $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alaphalmaz, és ennek három részhalmaza:

$$A = \{1, 4, 5, 6\}, B = \{1, 6\} \text{ és } C = \{1, 3, 6\}.$$

Határozza meg a $\mathcal{P}((A \setminus C) \triangle \overline{B})$ hatványhalmazt!

Megoldás.

$$\begin{aligned}A \setminus C &= \{4, 5\} \\ \overline{B} &= \{2, 3, 4, 5\} \\ (A \setminus C) \triangle \overline{B} &= \{2, 3\} \\ \mathcal{P}(\{2, 3\}) &= \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}\end{aligned}$$

5. Feladat (3 pont). Legyen adott három komplex szám:

$$z_1 = 2 + 5i, z_2 = -5 - 4i, z_3 = 3 + 4i.$$

Határozza meg a

$$\frac{z_1 - \overline{z_2}}{z_3}$$

komplex számot.

Megoldás.

$$\begin{aligned}\overline{z_2} &= -5 + 4i \\ z_1 - \overline{z_2} &= 7 + i \\ \frac{z_1 - \overline{z_2}}{z_3} &= \frac{7+i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{21-28i+3i+4}{9+16} = \frac{25-25i}{25} = 1 - i\end{aligned}$$

Kiegészítés. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Q} = \{\text{racionális számok}\}$, $\mathbb{R} = \{\text{valós számok}\}$, $\mathbb{R}^+ = \{\text{pozitív valós számok}\}$, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH – 2011. október 13.

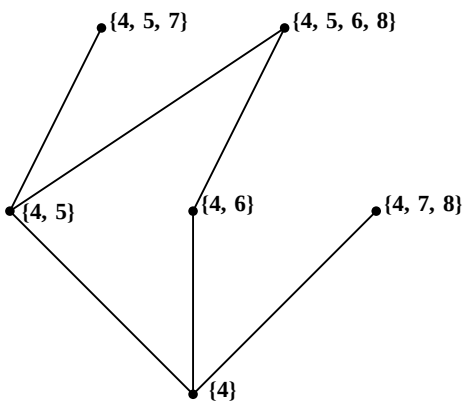
γ csoport

1. Feladat (4 pont). Legyen adott az

$$A = \{\{4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{4, 7, 8\}, \{4, 5, 6, 8\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagramját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeket!

Megoldás.



- Maximális elemek: $\{4, 5, 6, 8\}$, $\{4, 5, 7\}$, $\{4, 7, 8\}$.
- Minimális elem: $\{4\}$.
- Legnagyobb elem: NINCS.
- Legkisebb elem: $\{4\}$.

2. Feladat (4 pont). Legyen adott a

$$\tau = \{(a, b) : 6 \mid b - a\} \subseteq \mathbb{Z}^2$$

reláció. Vizsgálja meg, hogy a τ relációra az alábbiak közül mely tulajdonságok teljesülnek! Válaszait mindegyik esetben indokolja!

- antiszimmetrikus
- dichotóm
- reflexív
- szimmetrikus

Megoldás.

- Nem antiszimmetrikus. Ellenpélda: $(1, 7) \in \tau$ és $(7, 1) \in \tau$, viszont $1 \neq 7$.
- Nem dichotóm. Ellenpélda: $(3, 2) \notin \tau$ és $(2, 3) \notin \tau$ sem.
- Reflexív, mivel tetszőleges $a \in \mathbb{Z}$ esetén

$$(a, a) \in \tau \iff 6 \mid a - a \iff 6 \mid 0,$$

ami mindig teljesül.

- Szimmetrikus. mivel tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}$ számok esetén

$$(a, b) \in \tau \iff 6 \mid b - a \iff 6 \mid -(b - a) \iff 6 \mid a - b \iff (b, a) \in \tau,$$

ami pont az a következtetés, ami a szimmetriához szükséges.

3. Feladat (4 pont). Döntse el, hogy ...

- ... az $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x\alpha = 2\sqrt{x}$ leképezés bijektív-e?
- ... a $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ leképezés injektív-e?
- ... a $\gamma : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto a + b$ leképezés szürjektív-e?

Válaszait mindegyik esetben indokolja!

Megoldás.

1. Az α leképezés bijektív, mivel injektív és szürjektív is.

- Az α leképezés injektív, mivel tetszőleges $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ elemek képe csak úgy lehet egyenlő, ha ők maguk is egyenlők:

$$\begin{aligned}x_1\alpha &= x_2\alpha \\2\sqrt{x_1} &= 2\sqrt{x_2} \\x_1 &= x_2.\end{aligned}$$

- Az α leképezés szürjektív, mivel minden rögzített $y \in \mathbb{R}^+$ értékhez tudok találni olyan $x \in \mathbb{R}^+$ értéket, melyre $x\alpha = y$:

$$\begin{aligned}2\sqrt{x} &= y \\x &= \left(\frac{y}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

2. A β leképezés nem injektív. Ellenpélda: $1\beta = 2\beta = 0$, DE $1 \neq 2$.

3. A γ leképezés nem szürjektív. Ellenpélda: az 1-nek nincs őse, azaz nincs olyan $x \in \mathbb{N}^2$, amelyre $x\gamma = 1$.

4. Feladat (3 pont). Legyen adott az $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alaphalmaz, és ennek három részhalmaza:

$$A = \{3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 6\} \text{ és } C = \{2, 3, 6\}.$$

Határozza meg a $\mathcal{P}((A \triangle B) \setminus \overline{C})$ hatványhalmazt!

Megoldás.

$$\begin{aligned}A \triangle B &= \{2, 3, 5\} \\ \overline{C} &= \{1, 4, 5\} \\ (A \triangle B) \setminus \overline{C} &= \{2, 3\} \\ \mathcal{P}(\{2, 3\}) &= \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}\end{aligned}$$

5. Feladat (3 pont). Legyen adott három komplex szám:

$$z_1 = 8 - i, z_2 = 7 - 6i, z_3 = 3 - 4i.$$

Határozza meg a

$$\frac{z_2 - \overline{z_1}}{z_3}$$

komplex számot.

Megoldás.

$$\begin{aligned}\overline{z_1} &= 8 + i \\ z_2 - \overline{z_1} &= -1 - 7i \\ \frac{z_2 - \overline{z_1}}{z_3} &= \frac{-1-7i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{-3-4i-21i+28}{9+16} = \frac{25-25i}{25} = 1 - i\end{aligned}$$

Kiegészítés. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Q} = \{\text{racionális számok}\}$, $\mathbb{R} = \{\text{valós számok}\}$, $\mathbb{R}^+ = \{\text{pozitív valós számok}\}$, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Diszkrét matematika I. gyakorlat

1. ZH – 2011. október 13.

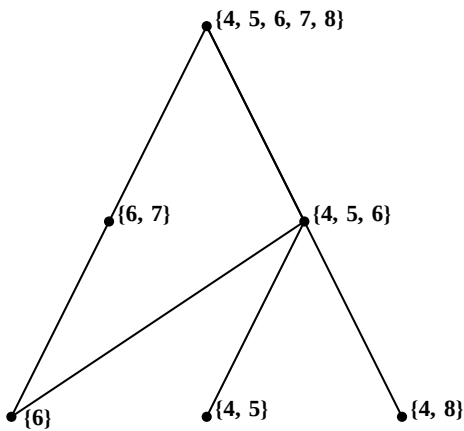
δ csoport

1. Feladat (4 pont). Legyen adott az

$$A = \{\{6\}, \{4, 5\}, \{4, 8\}, \{6, 7\}, \{4, 5, 6\}, \{4, 5, 6, 7, 8\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagramját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeket!

Megoldás.



- Maximális elem: $\{4, 5, 6, 7, 8\}$.
- Minimális elemek: $\{6\}, \{4, 5\}, \{4, 8\}$.
- Legnagyobb elem: $\{4, 5, 6, 7, 8\}$.
- Legkisebb elem: NINCS.

2. Feladat (4 pont). Legyen adott a

$$\theta = \{(a, b) : 5 \mid a - b\} \subseteq \mathbb{Z}^2$$

reláció. Vizsgálja meg, hogy a θ relációra az alábbiak közül mely tulajdonságok teljesülnek! Válaszait mindegyik esetben indokolja!

- antiszimmetrikus
- dichotóm
- reflexív
- szimmetrikus

Megoldás.

- Nem antiszimmetrikus. Ellenpélda: $(6, 1) \in \theta$ és $(1, 6) \in \theta$, viszont $1 \neq 6$.
- Nem dichotóm. Ellenpélda: $(2, 3) \notin \theta$ és $(3, 2) \notin \theta$ sem.
- Reflexív, mivel tetszőleges $a \in \mathbb{Z}$ esetén

$$(a, a) \in \theta \iff 5 \mid a - a \iff 5 \mid 0,$$

ami mindig teljesül.

- Szimmetrikus. mivel tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}$ számok esetén

$$(a, b) \in \theta \iff 5 \mid a - b \iff 5 \mid -(a - b) \iff 5 \mid b - a \iff (b, a) \in \theta,$$

ami pont az a következtetés, ami a szimmetriához szükséges.

3. Feladat (4 pont). Döntse el, hogy ...

- ... az $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x\alpha = 3x^3$ leképezés bijektív-e?
- ... a $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x\beta = x^2 + 3x + 2$ leképezés injektív-e?
- ... a $\gamma : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto a + 3b$ leképezés szürjektív-e?

Válaszait mindegyik esetben indokolja!

Megoldás.

1. Az α leképezés bijektív, mivel injektív és szürjektív is.

- Az α leképezés injektív, mivel tetszőleges $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ elemek képe csak úgy lehet egyenlő, ha ők maguk is egyenlők:

$$\begin{aligned}x_1\alpha &= x_2\alpha \\4x_1^3 &= 4x_2^3 \\x_1 &= x_2.\end{aligned}$$

- Az α leképezés szürjektív, mivel minden rögzített $y \in \mathbb{R}$ értékhez tudok találni olyan $x \in \mathbb{R}$ értéket, melyre $x\alpha = y$:

$$\begin{aligned}4x^3 &= y \\x &= \sqrt[3]{\frac{y}{4}}.\end{aligned}$$

2. A β leképezés nem injektív. Ellenpélda: $(-2)\beta = (-1)\beta = 0$, DE $-2 \neq -1$.

3. A γ leképezés nem szürjektív. Ellenpélda: az 1-nek nincs őse, azaz nincs olyan $x \in \mathbb{N}$, amelyre $x\gamma = 1$.

4. Feladat (3 pont). Legyen adott az $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alaphalmaz, és ennek három részhalmaza:

$$A = \{2, 3, 4, 5\}, B = \{4, 5\} \text{ és } C = \{1, 4, 5\}.$$

Határozza meg a $\mathcal{P}((A \setminus C) \triangle \overline{B})$ hatványhalmazt!

Megoldás.

$$\begin{aligned}A \setminus C &= \{2, 3\} \\ \overline{B} &= \{1, 2, 3, 6\} \\ (A \setminus C) \triangle \overline{B} &= \{1, 6\} \\ \mathcal{P}(\{1, 6\}) &= \{\emptyset, \{1\}, \{6\}, \{1, 6\}\}\end{aligned}$$

5. Feladat (3 pont). Legyen adott három komplex szám:

$$z_1 = -6 - 7i, z_2 = 1 + 4i, z_3 = 5 - 2i.$$

Határozza meg a

$$\frac{\overline{z_2} - z_1}{z_3}$$

komplex számot.

Megoldás.

$$\begin{aligned}\overline{z_2} &= 1 - 4i \\ \overline{z_2} - z_1 &= 7 + 3i \\ \frac{\overline{z_2} - z_1}{z_3} &= \frac{7+3i}{5-2i} \cdot \frac{5+2i}{5+2i} = \frac{35+14i+15i-6}{25+4} = \frac{29+29i}{29} = 1 + i\end{aligned}$$

Kiegészítés. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Q} = \{\text{racióális számok}\}$, $\mathbb{R} = \{\text{valós számok}\}$, $\mathbb{R}^+ = \{\text{pozitív valós számok}\}$, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.