

5. ÉS 7. GYAKORLAT

Számosságok. Komplex számok és alakjai,
számolás komplex számokkal.

1. Számosságok

Végtelen halmazok esetén az elemszám helyett a számosság fogalmat használjuk. Minden halmaznak van számossága, ami véges halmaz esetén természetesen megegyezik a jól ismert elemszám fogalommal.

1. Példa. Az $A = \{0, a\}$ halmaz véges, elemszáma kettő, azaz $|A| = 2$.

2. Tétel. Ha A egy véges halmaz, és elemszáma m , akkor $\mathcal{P}(A) = 2^m$.

3. Példa. Mivel $|\emptyset| = 0$, így $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1$ és $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))| = 8$.

4. Definíció. Az $\mathbb{N}$ halmaz számosságát megszámlálhatóan végtelennek nevezzük, és $\aleph_0$ -al jelöljük, azaz $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

5. Definíció. Az A és B halmazok számossága egyenlő, ha létezik $A \rightarrow B$ bijektív leképezés.

6. Példa. A $B = \{\text{pozitív páros számok}\}$ végtelen sok elemet tartalmaz, elemszáma helyett számossága van, mégpedig $|B| = \aleph_0$.

7. Tétel. Tetszőleges A halmaz esetén $|A| \neq \mathcal{P}(A)$, sőt $|A| < \mathcal{P}(A)$.

8. Definíció. Az A halmaz számossága kisebb vagy egyenlő, mint a B halmaz számossága ($|A| \leq |B|$), ha létezik $A \rightarrow B$ injektív leképezés.

9. Tétel. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

10. Definíció. Az $\mathbb{R}$ halmaz számosságát kontinuum számosságnak nevezzük, és c -vel jelöljük, azaz $|\mathbb{R}| = c$.

11. Példa. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{T}| = c$.

12. Tétel. Az $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

13. Tétel.

1. (Dichotómia) Tetszőleges A és B halmazok esetén $|A| \leq |B|$ vagy $|B| \leq |A|$.
2. (Antiszimmetria) Tetszőleges A és B halmazok esetén ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$.
3. Legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója is megszámlálhatóan végtelen.
4. (Számosságaritmetika alaptétele) Ha az A és B halmazok közül valamelyik végtelen számosságú, akkor $|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|)$.
5. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
6. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

2. Komplex számok

14. Definíció. A valós számok halmazát $\mathbb{C}$ -vel jelöljük, és $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

15. Definíció. Legyen $z \in \mathbb{C}$, $z = (a, b)$ egy komplex szám.

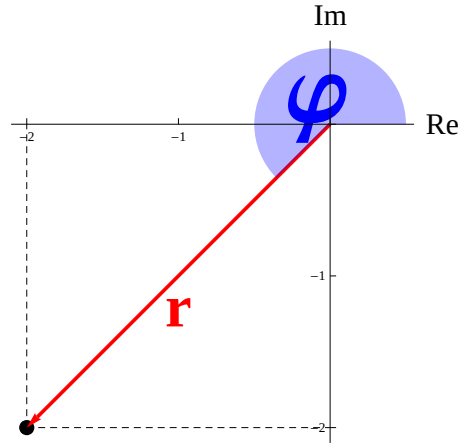
Ekkor a z **kanonikus alakja** a következő:

$$z = a + b \cdot i.$$

A z komplex szám **trigonometrikus alakja**:

$$z = r (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)),$$

ahol $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, és $\varphi = \arg(z)$ az a szög, amivel a valós tengely pozitív felét el kell forgatni az origó körül úgy, hogy átmenjen a z -nek megfelelő ponton.



16. Definíció. A $z = (a, b)$ komplex szám $z = a + bi$ kanonikus alakjában szereplő a valós számot z valós részének, b valós számot z képzetes részének nevezzük. Más jelöléssel $z = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z)$. Az i a képzetes egység. Az i olyan komplex szám, amelynek a négyzete -1 , azaz $i^2 = -1$.

17. Definíció. Legyenek z_1 és z_2 a következő kanonikus alakú komplex számok:

$$z_1 = a + bi, \quad z_2 = c + di.$$

Ekkor definiálhatjuk a következő műveleteket:

- **Összeadás:** $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
- **Ellentett:** $-z_1 = -a - bi$.
- **Kivonás:** $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a - c) + (b - d)i$.
- **Szorzás:** $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- **Konjugált:** $\bar{z}_1 = a - bi$.
- **Abszolútérték:** $|z_1| = \sqrt{z_1 \bar{z}_1} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- **Osztás:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac-bd+bc i+ad i}{c^2+d^2} = \frac{ac-bd}{c^2+d^2} + \frac{bc+ad}{c^2+d^2} i$.

18. Példa. $z_1 = (1, -1)$, $z_2 = (-4, 5)$

- **Kanonikus alak:** $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -4 + 5i$.
- **Trigonometrikus alak:** $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right)$.
- **Műveletek:**
 - **Összeadás:** $z_1 + z_2 = (1 - 4) + (-1 + 5)i = -3 + 4i$.
 - **Ellentett:** $-z_2 = 4 - 5i$.
 - **Kivonás:** $z_2 - z_1 = (-4 - 1) + (5 - (-1))i = -5 + 6i$.
 - **Szorzás:** $z_1 z_2 = (1 - i)(-4 + 5i) = -4 + 5i + 4i + 5 = 1 + 9i$.
 - **Konjugált:** $\bar{z}_1 = 1 + i$.
 - **Abszolútérték:** $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
 - **Osztás:** $\frac{z_2}{z_1} = \frac{-4+5i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-4-4i+5i-5}{1-i^2} = \frac{-9+i}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}i$.

19. Tétel. Ha $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$ két komplex szám, akkor $z_1 = z_2$ pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

20. Tétel. Legyenek z_1 és z_2 a következő trigonometrikus alakú komplex számok:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad w = s (\cos \psi + i \sin \psi).$$

Ekkor

- $z \cdot w = rs (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$;
- $\frac{z}{w} = \frac{r}{s} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$;
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$;
- $\bar{z} = r (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$;
- tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ számra $z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$;

- ha $z \neq 0$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számra $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, azaz minden nemnulla komplex számnak pontosan n darab n -edik gyöke van.

21. Példa. Legyen $z = (\sqrt{3}, 1)$ és $w = (1, -1)$ két komplex szám.

- $z = \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$, $w = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$;
- $zw = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4} \right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right)$;
- $\frac{z}{w} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{19\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{19\pi}{12} \right) \right)$;
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$;
- $\bar{w} = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{4} \right) \right)$;
- $w^6 = (\sqrt{2})^6 \left(\cos \left(6 \cdot \frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(6 \cdot \frac{7\pi}{4} \right) \right) = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 8i$;
- $\sqrt[3]{z} = x : x_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6}/3 \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6}/3 \right) \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18} \right)$,
 $x_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \right) / 3 \right) + i \sin \left(\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \right) / 3 \right) \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{18} + i \sin \frac{13\pi}{18} \right)$,
 $x_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi \right) / 3 \right) + i \sin \left(\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi \right) / 3 \right) \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{25\pi}{18} + i \sin \frac{25\pi}{18} \right)$.

3. Alkalmazások

1. Formális nyelvek és számítástudomány:

- ábécé: előre rögzített, meghatározott jelek **véges** halmaza, például $\Sigma = \{\text{magyar nyelv által használt betűk és karakterek}\}$;
 - az ábécé elemei a karakterek, a karakterekből álló sorozatok a szavak, például Shakespeare minden műve egy-egy szó;
 - Σ^* az összes szavak halmaza, $|\Sigma^*| = \aleph_0$;
 - Σ^* részhalmazai a nyelvek, például Shakespeare összes műve egy nyelv. $|\mathcal{P}(\Sigma^*)| = c$, tehát kontinuum sok nyelv létezik.
 - Legyen $\mathcal{D}$ az eldönthető nyelvek, $\mathcal{S}$ pedig a felsorolható nyelvek osztálya. Ekkor $|\mathcal{D}| = |\mathcal{S}| = |\text{co-}\mathcal{S}| = \aleph_0$. Ebből következik, hogy létezik olyan nyelv, ami nem sorolható fel. (Megjegyzendő, hogy létezik olyan nyelv is, ami nem eldönthető, de felsorolható.)
2. Komplex számok fizikai alkalmazásai: váltóáramú körök leírása, rezgések és hullámok leírása, komplex idő- és amplitudófüggvény, kvantummechanikai számítások.
3. Vegyük a következő sorozatot: $z_0 = 0$, $z_n = z_{n-1}^2 + c$. Azon c komplex számok, melyek esetén a sorozat korlátos a Mandelbrot-halmaz elemei, ami a talán legismertebb fraktálalakzat.
4. Hogy rajzoljunk egy szabályos n -szöget a képernyőre? Rögzítsünk egy pontot, és a megadott képletel számoljuk ki a rögzített pont által reprezentált komplex szám n -edik gyökeit (illetve csak azon közelítő értékeit). Így megkapuk az n -szög összes csúcsát.
5. A Wolfram Alpha ingyenes, internetes szoftverrel a komplex számokkal történő elemi számítások könnyen elvégezhetők. A <http://www.wolframalpha.com/> honlapon $(10+4i)/((2-3i)*(-9-i))$ formában lehet megadni komplex számokat és műveleteket.