

4. GYAKORLAT

Részenrendezés, Hasse-diagram.
Leképezések tulajdonságai.

1. Részenrendezés, Hasse-diagram

1. Definíció (Emlékeztető).

- Egy A halmaz esetén az A^2 halmaz részhalmazait relációknak nevezzük.
- Egy reláció részenrendezés, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.
- Egy reláció (teljes) rendezés, ha részenrendezés és dichotóm.

2. Definíció (Részenrendezett halmaz). Egy $(A; \leq)$ párt részenrendezett halmaznak nevezünk, ha A egy nemüres halmaz, „ $\leq$ ” pedig részenrendezés az A halmazon.

3. Definíció. Legyen $(A; \leq)$ egy részenrendezett halmaz, $a, b \in A$. Ekkor jelölje $a < b$ azt, hogy $a \leq b$, de $a \neq b$. Jelölje $a \prec b$ azt, hogy $a < b$, és nincs olyan $x \in A$, melyre $a < x$ és $x < b$ teljesülne.

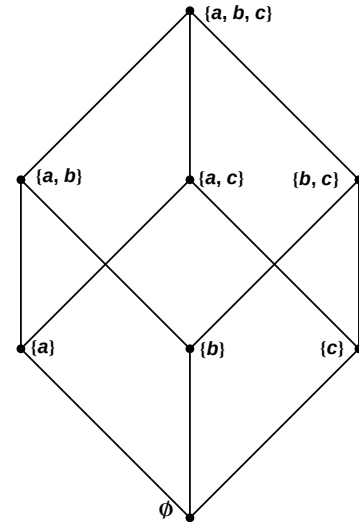
4. Tétel. Ha $(A; \leq)$ véges részenrendezett halmaz, akkor tetszőleges $a, b \in A$ elemekre az alábbi két állítás ekvivalens:

- $a \leq b$;
- létezik $n \in \mathbb{N}_0$ és léteznek $c_0, c_1, \dots, c_n \in A$ elemek úgy, hogy $a = c_0, c_0 \prec c_1, \dots, c_{n-1} \prec c_n, c_n = b$.

A tétel azt jelenti, hogy $a \prec b$ követési reláció meghatározza a részenrendezést.

A részenrendezés ábrázolása helyett szemléletesebb a követési relációt ábrázolni, és erre szolgál a Hasse-diagram.

5. Definíció (Hasse-diagram). Egy tetszőleges $(A; \leq)$ részenrendezett halmaz Hasse-diagramja olyan irányított gráf, amelyben a részenrendezett halmaz A alaphalmazának az elemei alkotják a gráf pontjait, és a gráfban az a és b pontok között pontosan akkor halad él, ha $a \prec b$. Az él irányítását a diagramon úgy ábrázoljuk, hogy a b pontot az a pont fölött helyezzük el. A reflexivitásból adódó hurokéleket a diagramon nem ábrázoljuk.



6. Példa. Legyen adott az $A = \{a, b, c\}$ háromelemű halmazt. A $(\mathcal{P}(A); \subseteq)$ pár bizonyíthatóan részenrendezett halmaz, és a Hasse-diagramja a jobb oldali ábrán látható.

7. Definíció. Legyen $(A; \leq)$ egy részenrendezett halmaz, $a \in A$ pedig egy tetszőleges elem.

- Az a maximális eleme A -nak, ha nem létezik olyan $x \in A$, melyre $b < x$.
- Az a minimális eleme A -nak, ha nem létezik olyan $x \in A$, melyre $x < b$.
- Az a legnagyobb eleme A -nak, ha minden $x \in A$ elemre $x \leq a$.
- Az a legkisebb eleme A -nak, ha minden $x \in A$ elemre $a \leq x$.

8. Tétel. Ha a az $(A; \leq)$ részenrendezett halmaz legnagyobb elemem akkor a maximális elem is. Ugyanez igaz legkisebb és minimális elemre.

9. Tétel. Legnagyobb és legkisebb elemből csak legfeljebb egy darab létezhet egy $(A; \leq)$ részenrendezett halmazban, maximális és minimális elem több is lehet.

10. Példa. Az előző példában lévő részenrendezett halmaz legnagyobb (és egyben maximális) eleme $\{a, b, c\}$, a legkisebb (és egyben minimális) eleme $\emptyset$.

2. Leképezések tulajdonságai

A továbbiakban legyen A és B két halmaz, és vezessük be a következő definíciókat.

RELÁCIÓ: $A \times A$ részhalmazai, azaz α reláció, ha $\alpha \subseteq A \times A (= A^2)$.

MEGFELELTETÉS: $A \times B$ részhalmazai, azaz α megfeleltetés, ha $\alpha \subseteq A \times B$.

LEKÉPEZÉS: az $\alpha \subseteq A \times B$ megfeleltetést akkor nevezzük leképezésnek, ha BÁRMELY $a \in A$ -ra LÉTEZIK pontosan egy olyan $b \in B$, amelyre $(a, b) \in \alpha$.

A továbbiakban az $f : A \rightarrow B$ leképezés legyen rögzített, és definiáljuk a leképezések tulajdonságait:

11. Definíció. f **INJEKTÍV**, ha BÁRMELY $a_1, a_2 \in A$ -ra teljesül, hogy ha $a_1 f = a_2 f$, akkor $a_1 = a_2$.

Más szóval, különböző elemek képe különböző.

12. Definíció. f **SZÜRJEKTÍV**, ha BÁRMELY $b \in B$ -hez LÉTEZIK olyan $a \in A$, amelyre $f(a) = b$.

Más szóval, minden B -beli elemnek van őse A -ban.

13. Definíció. f **BIJEKTÍV**, ha injektív ÉS szürjektív.

14. Példa. Például, legyen $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto |n - 3| + 1$ egy leképezés. Vizsgáljuk meg a g leképezés fenti tulajdonságait!

Injektivitás: Tegyük fel, hogy $|n - 3| + 1 = |m - 3| + 1$. Ez ekvivalens azzal, hogy $|n - 3| = |m - 3|$, vagyis $n - 3 = \pm(m - 3)$. Két eset van: $n - 3 = m - 3$, vagy $n - 3 = 3 - m$. Az első esetben azt kapjuk, hogy $n = m$, és ezt kell kapnunk, ahhoz hogy injektív legyen, de meg kell vizsgálni a másik esetet is. A második eset azzal ekvivalens, hogy $n + m = 6$, azaz $m = 6 - n$. Ez azt jelenti, hogy $g(n) = g(6 - n)$, természetesen csak akkor, ha $6 - n \in \mathbb{N}$. De van olyan (elég) kicsi $n \in \mathbb{N}$, amelyre még $6 - n \in \mathbb{N}$, például $n = 5$. Ekkor azt kaptuk, hogy $g(5) = g(1)$, viszont $5 \neq 1$, tehát a g leképezés NEM injektív.

15. Észrevétel. Ha már egy ELLENPÉLDÁT találunk, akkor a tulajdonság meg van lőve.

16. Észrevétel. Ábrázolás + vízszintes vonal teszt.

Szürjektivitás: Rögzítünk egy tetszőleges $y \in \mathbb{N}$ számot, és keresünk hozzá egy megfelelő $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $g(n) = y$. Keressük az n számot a következő egyenlet megoldásaként: $|n - 3| + 1 = y$. Ez azzal ekvivalens, hogy $|n - 3| = y - 1$. Nekünk nem az összes olyan szám kell, aminek a képe y , elég csak egyet találnunk, ezért elhagyhatjuk az abszolútérték jelet. Ekkor azt kapjuk, hogy $n - 3 = y - 1$, azaz $n = y + 2$. Mit kaptunk? Azt hogy BÁRMELY $y \in \mathbb{N}$ számra teljesül, hogy $g(y + 2) = y$. Tehát minden y -hoz található ős, ezért a leképezés szürjektív.

17. Észrevétel. Lásd 16. Észrevétel.

Bijektivitás: A fenti g leképezés nyilván NEM bijektív, mivel nem injektív.

3. Alkalmazások

1. Egy programnyelvben a beépített véletlenszám-generátor a $[0; 1]$ intervallumból ad vissza értéket (egyenletes eloszlással). Nekünk a dobókocka imitálására van szükség. A feladat egy leképezéssel könnyen megoldható, ahol a $[0; 1]$ intervallum számait kell leképezni az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ számhalmazra.
2. Digitalizálás: egy analóg jel digitalizálásakor végtelen sok különböző állapotról kell leképeznünk véges állapothalmazra, mivel a számítógép diszkrét működésű. Például a szemmel érzékelhető színeket (természetesen annak csak egy sokkal „kisebb” méretű részhalmazát) RGB-kóddal jeleníthetjük meg a számítógépen. (A $(\pi, \sqrt{2}, e)$ színt meg tudjuk jeleníteni? Miért? Milyen akkor az RGB-leképezés?)
3. Kódolás (titkosítás): olyan leképezés, mellyel egy üzenet képe csak a leképezés inverzével együtt olvasható, azaz a kódoló és dekódoló leképezés szorzata az identitás.
4. Programozás: szintaktikai és szemantikai szabályok szerint leképezzük a végrehajtandó feladatot egy adott programnyelvre. (A compiler természetesen még ezt is tovább képezi alacsonyabb szintű programozóra.)
5. Maga a nyelv is leképezés, a gondolatainkat képezzük le különböző nyelvi eszközökre. Ez a leképezés sem injektív, például a „fog” szó bizonyítja ezt.
6. Rendezési algoritmusok. Adott egy véges halmaz, rendezzük az elemeit a megadott rendezési reláció szerint. (Lásd Algoritmusok és adatszerkezetek kurzus.)
7. Post-háló és Post tétele. Lásd Logika és informatikai alkalmazásai kurzus.