

3. GYAKORLAT

Relációk tulajdonságai.
Ekvivalenciareláció, osztályozás.

1. Relációk tulajdonságai

A továbbiakban legyen A egy halmaz, és vezessük be a következő definíciókat.

RELÁCIÓ: $A \times A$ részhalmazai, azaz α reláció, ha $\alpha \subseteq A \times A (= A^2)$.

1. Definíció. A továbbiakban az $\alpha \subseteq A^2$ reláció legyen rögzített, és definiáljuk a relációk tulajdonságait:

- α **REFLEXÍV**, ha BÁRMELY $a \in A$ -ra teljesül, hogy $(a, a) \in \alpha$.
Például, ha $\beta = " \leq " (\subseteq \mathbb{R}^2)$, akkor β reflexív, mert bármely x valós számra teljesül, hogy $(x, x) \in \beta$, azaz $x \leq x$.
- α **SZIMMETRIKUS**, ha BÁRMELY $a, b \in A$ -ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \alpha$, akkor $(b, a) \in \alpha$.
Például az előbb említett β reláció nem szimmetrikus, mert abból, hogy $3 \leq 4$ [azaz $(3, 4) \in \beta$], nem következik, hogy $4 \leq 3$ [azaz $(4, 3) \in \beta$].
Megjegyzés: ha már egy ELLENPÉLDÁT találunk, akkor a tulajdonság meg van löve.
- α **TRANZITÍV**, ha BÁRMELY $a, b, c \in A$ -ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \alpha$ és $(b, c) \in \alpha$, akkor $(a, c) \in \alpha$.
Például a fenti β reláció nyilván tranzitív, aki nem hiszi, gondoljon utána.
- α **EKVIVALENCIARELÁCIÓ**, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív is egyszerre.
- α **ANTISZIMMETRIKUS**, ha BÁRMELY $a, b \in A$ -ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \alpha$ és $(b, a) \in \alpha$, akkor $a = b$.
Például a fenti β reláció nyilván antiszimmetrikus, mert ha $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x \leq y \leq x$, ami azt jelenti, hogy $x = y$.
- α **RÉSZBENRENDEZÉS**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív is egyszerre.
- α **DICHOTÓM**, ha BÁRMELY $a, b \in A$ -ra teljesül, hogy $(a, b) \in \alpha$ vagy $(b, a) \in \alpha$.
Például a β reláció dichotóm, mert bármely két valós számról el tudjuk dönteni, hogy melyik kisebb-egyenlő, mint a másik.
Megjegyzés: ha egy reláció nem reflexív, akkor dichotóm sem lehet. (Gondoljunk bele!)
- α **RENDEZÉS**, ha részbenrendezés és dichotóm is egyszerre.

2. Észrevétel. Ha egy relációt az irányított gráffjával adunk meg, akkor

- α pontosan akkor reflexív, ha a gráf minden pontjában van hurokél;
- α pontosan akkor tranzitív, ha teljesül az, hogy ha létezik út két pont között, akkor létezik 1 hosszú út is közöttük;
- α pontosan akkor szimmetrikus, ha a gráf minden éle kétirányú;
- α pontosan akkor antiszimmetrikus, ha bármely két különböző pont között 0 vagy 1 irányban megy él;
- α pontosan akkor dichotóm, ha a gráf bármely két pontja között megy él.

3. Példa. Legyen α a következő reláció: $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 2 \mid x^2 + y^2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Milyen tulajdonságok teljesülnek az α relációra?

Megoldás:

- Reflexivitás:* Azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x \in \mathbb{Z}$ -re teljesül-e, hogy $(x, x) \in \alpha$, azaz hogy $2 \mid x^2 + x^2$. Ez nyilván teljesül, mert $x^2 + x^2 = 2x^2$, ami nyilván páros, ezért minden egész szám α -relációban áll egymással.
- Szimmetria:* Azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x, y \in \mathbb{Z}$ -re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \alpha$ -ból következik-e feltétel nélkül, hogy $(y, x) \in \alpha$. Ez nyilván teljesül, mert $(x, y) \in \alpha \iff 2 \mid x^2 + y^2 \iff 2 \mid y^2 + x^2 \iff (y, x) \in \alpha$, azaz α szimmetrikus.
- Tranzitivitás:* Azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x, y, z \in \mathbb{Z}$ -re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \alpha$ -ból és $(y, z) \in \alpha$ -ból következik-e feltétel nélkül, hogy $(x, z) \in \alpha$. Nézzük meg:
 $(x, y) \in \alpha \iff 2 \mid x^2 + y^2 \iff x^2 + y^2 = 2k \ (k \in \mathbb{Z}) \iff x^2 = 2k - y^2$
 $(y, z) \in \alpha \iff 2 \mid y^2 + z^2 \iff y^2 + z^2 = 2l \ (l \in \mathbb{Z}) \iff z^2 = 2l - y^2$
Behelyettesítünk: $x^2 + z^2 = 2k + 2l - 2y^2 = 2(k + l - y^2) = 2m$, ahol $m \in \mathbb{Z}$.
Így megkaptuk, hogy $2 \mid x^2 + z^2$, azaz $(x, z) \in \alpha$, vagyis a reláció tranzitív.

4. Mind a három fenti tulajdonság teljesül, ezért a reláció *ekvivalencia*(reláció).
5. *Antiszimmetria*: Azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x, y \in \mathbb{Z}$ -re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \alpha$ -ból és $(y, x) \in \alpha$ -ból következik-e feltétel nélkül, hogy $x = y$. Rendkívül könnyen tudunk ellenpéldát találni, például $(2, 4) \in \alpha$, $(4, 2) \in \alpha$ és $2 \neq 4$.
6. Mivel az antiszimmetria nem teljesül, így α nem *részenrendezés*, és ezért már *rendezés* sem lehet, de azért nézzük meg az utolsó tulajdonságot is.
7. *Dichotómia*: Most azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x, y \in \mathbb{Z}$ -re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$. Nyilván egy páratlan-páros kombináció sem így, sem amúgy nincs benne a relációban, és így megint könnyen találtunk ellenpéldát (egyszerre végtelen sokat is).

2. Osztályozás

4. Definíció. Legyen A egy tetszőleges halmaz. Ekkor a $\mathcal{C}$ halmazt osztályozásnak nevezzük, ha

1. $\mathcal{C} \subseteq P(A)$,
2. BÁRMELY $X \in \mathcal{C}$ -re $X \neq \emptyset$,
3. BÁRMELY $X, Y \in \mathcal{C}$ -re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$, és
4. $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$.

A $\mathcal{C}$ halmaz elemeit osztályoknak nevezzük.

5. Példa. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{3, 5\}\}$.

$\mathcal{C}$ osztályozás, mert minden A -beli elem szerepel pontosan egy osztályban, és egyik osztály sem üres.

2.1. Ekvivalenciareláció – osztályozás

6. Tétel. Egy A halmaz feletti $\mathcal{C}$ osztályozás meghatároz egy ekvivalenciát a következő módon:

$$\rho_{\mathcal{C}} = \{(a, b) \in A^2 : \exists X \in \mathcal{C}, \text{ hogy } a, b \in X\}.$$

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az egy osztályban lévő elemek egymással mindenhogylációban vannak.

7. Példa. Az előző példában szereplő osztályozáshoz felírható reláció:

$$\rho_{\mathcal{C}} = \{(\textcolor{red}{1}, \textcolor{red}{1}), (\textcolor{red}{1}, \textcolor{red}{2}), (\textcolor{red}{2}, \textcolor{red}{1}), (\textcolor{red}{2}, \textcolor{red}{2}), (4, 4), (\textcolor{blue}{3}, \textcolor{blue}{3}), (\textcolor{blue}{3}, \textcolor{blue}{5}), (\textcolor{blue}{5}, \textcolor{blue}{3}), (\textcolor{blue}{5}, \textcolor{blue}{5})\}.$$

8. Tétel. Ha ρ ekvivalencia az A halmazon, akkor az $A/\rho = \{b\rho^* : b \in A\}$ halmaz osztályozás A -n, ahol $b\rho^* = \{c \in A : (b, c) \in \rho\}$.

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy egy ekvivalenciarelációhoz felírható egy olyan osztályozás, amelyben az egymással relációban lévő elemek ugyanabban az osztályban vannak.

Mire jó ez? Mindig áttérhetünk ekvivalenciáról osztályozásra, illetve osztályozásról ekvivalenciára, és úgy dolgozhatunk, amelyikkel nekünk kényelmesebb.

9. Példa. Térjünk vissza a 3. Példában bemutatott α relációra, amiről beláttuk, hogy ekvivalencia. Ekkor nyilván van egy hozzá tartozó osztályozás. Adjuk ezt meg!

Megoldás:

Keressünk egymással relációban álló számokat: $(0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 4), (2, 6), \dots \in \alpha$. Nyilván végtelen sok van, de az azért látszik hogy a páros számok a páros számokkal relációban vannak, ezért nyilván egy osztályban vannak. Mivel osztályozást keresünk, így a páratlan számokat is kell valahova tennünk. Könnyen rájöhettünk, hogy a páratlan számok relációban állnak a páratlan számokkal, ugyanis páratlan számok négyzete szintén páratlan, és két páratlan szám összege már páros, ezért teljesül a reláció. Így már van két osztályunk, a páros számok, és a páratlan számok osztálya. Most már csak azt kell belátni, hogy páratlan szám nem állhat relációban páros számmal. Ez pedig könnyű, mert páros szám négyzete páros, páratlané páratlan, és egy páros és egy páratlan szám összege páratlan, ami nyilván nem osztható kettővel, így nem teljesülhet a reláció feltétele.

Tehát a keresett $\mathcal{C}_{\alpha}$ osztályozás a következő: $\mathcal{C}_{\alpha} = \{\{\text{páros egész számok}\}, \{\text{páratlan egész számok}\}\}$.

3. Alkalmazások

1. Egy gráf erősen összefüggő komponensei az elérhetőségi reláció által meghatározott osztályai a gráf csúcshalmazának. Informatikai a probléma, mert minden irányított gráfot elképzelhetünk úgy, mint egy számítógép-hálózat reprezentációja, és minden hálózat reprezentálható gráffal.

2. Particionális információs struktúra. Elsősorban játékelméleti probléma, arról szól, hogy egy játékos nem ismeri, hogy jelenleg mi az állás, de pontosan tudja, hogy az állásról az általa birtokolt információkból mik a lehetséges és nem lehetséges lépések, ami kételemű partíciója az állások halmazának. Ezt általában feltételként szokták alkalmazni, ésszerű, hogy miért.
3. Minden kategorizálási feladat tulajdonképpen osztályozás. Például, ha iratokat rendezünk mappákba, akkor nyilván nem akarjuk, hogy maradjon üres mappa (illetve ha mégis, akkor az nem része a kategorizálásnak), illetve minden iratot pontosan egy mappába szeretnénk betenni.
4. Biológia: rendszertani osztályozás, minden (ismert) élőlény beletartozik pontosan egy fajba, és nyilván nem tartunk számon olyan fajt, aminek nem létezik (soha nem is létezett) egyede.