

2. GYAKORLAT

Halmazműveleti egyenlőségek.
Descartes szorzat. Relációk szorzata, inverze.

1. Halmazműveleti egyenlőségek

1. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra

$$\begin{array}{lll} A \cap A = A, & A \cup A = A, & (\text{idempotencia}) \\ A \cap B = B \cap A, & A \cup B = B \cup A, & (\text{kommutativitás}) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), & (\text{asszociativitás}) \\ (A \cup B) \cap A = A, & (A \cap B) \cup A = A, & (\text{abszorptivitás}) \\ (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). & (\text{disztributivitás}) \end{array}$$

2. Tétel. Tetszőleges $A, B (\subseteq U)$ halmazokra

$$\begin{array}{ll} \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \\ \overline{\overline{A}} = A, & \\ A \cap \overline{A} = \emptyset, & A \cup \overline{A} = U, \\ A \cap U = A, & A \cup U = U, \\ A \cap \emptyset = \emptyset, & A \cup \emptyset = A. \end{array} \quad (\text{de Morgan azonosságok})$$

3. Tétel. Tetszőleges $A, B (\subseteq U)$ halmazokra

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

és

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

2. Descartes-szorzat

4. Definíció. Tetszőleges két a, b objektum esetén értelmezhetjük a (a, b) elempár fogalmát. Rendezett elempárról beszélünk, ha (a_1, b_1) pontosan akkor egyenlő (a_2, b_2) -vel, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$, azaz fontos a két elem sorrendje.

5. Definíció (Descartes-szorzat). Legyen A, B két halmaz. Ekkor az A és B halmaz Descartes-szorzata olyan halmaz, mely olyan rendezett elempárokból áll, amiknek az első komponense A -nak, második komponense B -nek eleme. Jelölés: $A \times B$.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

6. Definíció (Descartes-négyzet). Legyen A egy halmaz. Ekkor az A halmaz Descartes-négyzete az a halmaz, mely olyan rendezett elempárokból áll, amiknek mindkét komponense A -nak az eleme. Jelölés: A^2 .

$$A^2 = A \times A = \{(a, b) : a \in A, b \in A\}$$

7. *Észrevétel.* Ha A véges halmaz, és elemszáma m , illetve B véges halmaz, és elemszáma n , akkor az $A \times B$ halmaz is véges és elemszáma $m \cdot n$.

8. *Észrevétel.* Ha $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$, akkor $A \times B = \emptyset$.

9. *Észrevétel.* Ha A és B két tetszőleges halmaz, akkor $A \times B \neq B \times A$.

3. Relációk

10. Definíció (Megfeleltetés). Legyen A és B két halmaz. Az $A \times B$ Descartes-szorzat részhalmazait A -ból B -be menő megfeleltetéseknek nevezzük. Ekkor A az indulási halmaz, B pedig az érkezési halmaz.

11. Definíció. Legyen A egy halmaz. Az A^2 Descartes-négyzet részhalmazait relációknak nevezzük.

12. Észrevétel. A megfeleltetések, ábrázolása történhet gráffal, koordinátarendszerrel és mátrixszal is.

13. Definíció (Relációk szorzata). Legyen α és β két reláció az A halmazon, azaz $\alpha \subseteq A^2$ és $\beta \subseteq A^2$. Ekkor a két reláció szorzatát $\alpha\beta$ -val jelöljük, és a következőképpen definiáljuk:

$$\alpha\beta = \{(a, c) \in A^2 : \text{létezik } b \in A, \text{ hogy } (a, b) \in \alpha \text{ és } (b, c) \in \beta\}.$$

14. Definíció (Reláció inverze). Legyen α egy reláció az A halmazon, azaz $\alpha \subseteq A^2$. Ekkor a reláció inverzét α^{-1} -gyel jelöljük, és a következőképpen definiáljuk:

$$\alpha^{-1} = \{(a, b) \in A^2 : (b, a) \in \alpha\}.$$

15. Észrevétel. Mivel a reláció is halmaz, ezért relációk metszetéről, uniójáról, különbségéről, szimmetrikus differenciájáról is beszélhetünk.

4. Informatikai alkalmazás

Relációs adatmodell

Tegyük fel, hogy bizonyos személyek neveit és címeit biztonsági okokból két külön adatbázisban (esetleg két külön rendszerben) tároljuk. Az első minden névhez egy azonosító kódot tartalmaz, a második minden kódhoz hozzárendel egy címet. A két „tábla” egymás nélkül használhatatlan. Ahhoz, hogy „lekérdezzük” valaki(k)nek a címét, tulajdonképpen egy relációsorzást kell alkalmaznunk, először a (név, kód) párt határozzuk meg, ezután a (kód, cím) párt, ebből kapunk (név, cím) párt. Ez relációsorzás.