

10. GYAKORLAT

Mátrixműveletek.
Determináns.

1. Mátrixok

1. Definíció. Az M mátrix egy T test elemeiből álló táblázat, m darab sorral és n darab oszloppal. Az ilyen paraméterekkel rendelkező mátrixot $M_{m \times n}$ -nel jelöljük. Az M mátrix i -edik sorának j -edik elemét m_{ij} -vel jelöljük.

2. Példa. Legyen M az alábbi mátrix:

$$M_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} & 0.75 \\ \pi & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 6 & -7.2 & 9\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

Ekkor például $m_{13} = \sqrt{2}$.

3. Definíció. Az $(n \times n)$ -es egység mátrix olyan mátrix, amelynek a főátlója 1-eket tartalmaz, a többi eleme, pedig nulla:

$$I_n = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Definíció. Az $(n \times n)$ -es nullmátrix olyan mátrix, amely csak nulla elemeket tartalmaz:

$$Z_n = O_n = \mathbb{O}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Mátrixműveletek

5. Definíció. Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ és $B = (b_{ij})_{m \times n}$ két T számtest feletti $(m \times n)$ -es mátrix. Ekkor

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} \quad \text{és} \quad cA = (ca_{ij})_{m \times n}.$$

6. Észrevétel. Csak azonos méretű mátrixokat lehet összeadni.

7. Példa. $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 9 & 2 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ -8 & 10 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \end{pmatrix}, \quad (-2) \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ 6 & -2 & -14 \\ -4 & -4 & -18 \end{pmatrix}$$

8. Definíció. Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ és $B = (b_{ij})_{n \times k}$ két T számtest feletti mátrix. Ekkor

$$AB = \left(\sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj} \right)_{m \times k}.$$

9. Észrevétel. Két mátrix csak akkor szorozható össze, ha az első mátrix oszlopainak száma megegyezik a második mátrix sorainak számával.

10. Észrevétel. AB általában nem egyezik meg BA -val, sőt még lehet, hogy a méretük miatt nincs is értelmezve.

11. Példa. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Az AB mátrix (2×2) -es méretű lesz. A számolást végezzük úgy hogy az A megfelelő sorvektorait szorozzuk össze skalárisan B megfelelő oszlopvektorával. A skaláris szorzás a következőt jelenti:

$$\langle (a, b, c, d), (e, f, g, h) \rangle = ae + bf + cg + dh.$$

Tehát AB megkapható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle (2, -3, 5), (6, 2, -3) \rangle & \langle (2, -3, 5), (-1, -2, 0) \rangle \\ \langle (1, 0, 8), (6, 2, -3) \rangle & \langle (1, 0, 8), (-1, -2, 0) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 - 6 - 15 & -2 + 6 + 0 \\ 6 + 0 - 24 & -1 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -18 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12. Példa. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -9 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \\ -5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle (5, 4, -2), (-1, 0, -5) \rangle & \langle (5, 4, -2), (-2, 8, 7) \rangle & \langle (5, 4, -2), (3, 3, 9) \rangle \\ \langle (-9, 4, 6), (-1, 0, -5) \rangle & \langle (-9, 4, 6), (-2, 8, 7) \rangle & \langle (-9, 4, 6), (3, 3, 9) \rangle \\ \langle (3, 1, -2), (-1, 0, -5) \rangle & \langle (3, 1, -2), (-2, 8, 7) \rangle & \langle (3, 1, -2), (3, 3, 9) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 + 0 + 10 & -10 + 32 - 14 & 15 + 12 - 18 \\ 9 + 0 - 30 & 18 + 32 + 42 & -27 + 12 + 54 \\ -3 + 0 + 10 & -6 + 8 - 14 & 9 + 3 - 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -21 & 92 & 39 \\ 7 & -12 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

13. Definíció. Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ egy T számtest feletti $(m \times n)$ -es mátrix. Ekkor A^T egy $(n \times m)$ -es mátrix, melynek egy tetszőleges eleme a következőképpen számítható ki:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}.$$

Ez azt jelenti, hogy a mátrix sorait felcseréljük az oszlopaival.

14. Példa. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 8 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

15. Tétel. *Műveletek tulajdonságai.*

Legyenek A, B, C egy tetszőleges T test feletti mátrixok, és $c, d \in T$ skalárok. Ekkor

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(c + d)A = cA + dA$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $c(AB) = (cA)B$
- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = c(A^T)$

3. Determináns

A determináns rendkívül fontos a lineáris algebrában, így egy determináns kiszámítása mindenkinek rutinfeladatnak kell, hogy legyen!

3.1. Sarrus-szabály

Egy 1 darab számból álló mátrix determinánsa maga a mátrixot alkotó szám. Egy (2×2) -es mátrix determinánsának kiszámítására, maga a Sarrus-szabály a definíció:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (\text{főátló elemeinek szorzata}) - (\text{mellékátló elemeinek szorzata}) \\ = ad - bc.$$

A (3×3) -as mátrix determinánsa hasonlóan számítható, egy kis eltéréssel. Itt nem csak a főátlóval, és a mellékátlóval kell számolni, hanem a velük párhuzamos „átlókkal” is. Segítség képpen a determináns után odairhatjuk az első két oszlopát, hogy jobban lássuk a párhuzamosságot:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} \searrow & & \searrow \\ & \searrow & \\ & & \searrow \end{matrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} & \swarrow & \\ & & \swarrow \\ \swarrow & & \end{matrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}.$$

A determináns a következőképp áll össze. A főátlóban és a vele párhuzamos átlókban lévő elemek szorzatát adjuk össze, és ebből vonjuk ki a mellékátlóban, és a vele párhuzamos átlóban lévő elemek szorzatát. Tehát a következőt kell csinálni:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Nézzük meg ezt egy konkrét példán keresztül:

Példa.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 \cdot (-5) \cdot 1) + (2 \cdot 1 \cdot (-8)) + ((-4) \cdot (-2) \cdot 2) \\ - ((-4) \cdot (-5) \cdot (-8)) - (2 \cdot (-2) \cdot 1) - (3 \cdot 1 \cdot 2) \\ = -15 - 16 + 16 + 160 + 4 - 6 = 143$$

16. *Észrevétel.* Maga a számolási algoritmus nem bonyolult, de ennél a módszernél viszonylag nagy az elszámolás veszélye.

17. *Észrevétel.* Ez a módszer csak (2×2) -es és (3×3) -as determinánsok kiszámolására használható, nagyobb méretre nem működik.

3.2. Sor/oszlop szerinti kifejtés (Kifejtési tétel)

Emlékezzünk arra, hogy sor/oszlop szerinti kifejtésnél gondolnunk kell a mátrixhoz tartozó „sakktáblára”, ami előjeleket tartalmaz, felváltva, a bal felső sarok mindig „+”, és ettől váltakozik az előjel jobbra és lefelé:

+	-	+	...
-	+	-	...
+	-	+	...
⋮	⋮	⋮	⋱

Kiválasztjuk a determináns tetszőleges sorát vagy oszlopát, ami szerint a kifejtést el akarjuk végezni. Legyen ez először például az **első oszlop**. A determináns értéke a következőképpen adódik: a kiválasztott sor elemeit megszorozzuk a sakktáblában neki megfelelő előjellel, majd megszorozzuk annak a maradék determinánsnak az értékével, amit úgy kapunk, hogy az eredeti determinánsból töröljük az elem sorát és oszlopát. A példán rögtön látszik, hogy mit kell csinálni:

Példa.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-8) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

A módszer lényege, hogy egy $(n \times n)$ méretű determinánst vissza tudunk vezetni $(n-1) \times (n-1)$ -es determinánsokra. Folytassuk az (1) egyenlőséget, mivel a (2×2) -es determinánsok értéke már könnye számolható:

$$(1) = 3 \cdot ((-5) \cdot 1 - 1 \cdot 2) + 2 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot 2) - 8 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot (-5)) \\ = 3 \cdot (-7) + 2 \cdot 10 - 8 \cdot (-18) = -21 + 20 + 144 = 143.$$

Gyakorlás képpen végezzük el a determináns kifejtését a **második sora** szerint is:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot 2) - 5 \cdot (3 \cdot 1 - (-4) \cdot (-8)) - 1 \cdot (3 \cdot 2 - 2 \cdot (-8)) \\ &= 2 \cdot 10 - 5 \cdot (-29) - 1 \cdot 22 = 20 + 145 - 22 = 143. \end{aligned}$$

18. *Észrevétel.* Ez a módszer tetszőleges méretű determinánsokra is működik, szemben a Sarrus-szabállyal, ami csak (2×2) -es és (3×3) -as mátrixokra alkalmazható.

19. *Észrevétel.* Ha van a mátrix elemei között nulla, akkor érdemes lehet olyan sort, vagy oszlopot választani a kifejtéshez, amiben minél több nulla van.

20. *Észrevétel.* Dolgozatokban érdemes ezt alkalmazni, mert elszámolási hiba esetén még esetleg lehet részpontot adni, míg a Sarrus-szabálynál ez kevésbé lehetséges.

3.3. Elemi átalakítások (Gauss-elimináció)

21. *Észrevétel.* Ez a módszer talán a leggyorsabb, viszont koránt sem olyan algoritmikus, mint az előző kettő. Csak azoknak ajánlom megtanulni, akik biztosak abban, hogy ez a módszer nem fogja összezavarni az eddig megtanultakat.

22. Tétel. *Determinánsokra vonatkozó alapvető tulajdonságok.*

1. A determináns előjelet vált, ha két sorát megcseréljük.
2. Ha a determináns valamelyik sora nulla, akkor a determináns értéke nulla.
3. A determináns értéke nulla, van van két azonos sora.
4. Ha a determináns egy sorában minden elemet ugyanazzal a konstanssal megszorunk, vagy elosztunk, akkor a determináns értéke is ezzel a konstanssal szorzódik, vagy osztódik.
5. A determináns nulla, ha az egyik sora egy másik sor valamely konstans-szorosa.
6. A determináns értéke nem változik, ha valamelyik sorhoz hozzáadjuk egy másik sor konstans-szorosát.
7. Dualitási elv: az 1. – 6. állításokban a „sor” szó kicserélhető az „oszlop” szóra.

Ezekkel a műveletekkel gyorsan ki tudjuk számítani a determinánst, mert megtudjuk növelni a determinánsban szereplő nullák számát.

Példa.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} &\stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 6 & -7 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} -29 & 10 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(3)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} -29 & 10 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} (-7) \cdot (-29) - 6 \cdot 10 = 143. \end{aligned}$$

- (1) : A 2. sorhoz hozzáadtam a 3. sor (-1) -szeresét, azaz alkalmaztam a Tétel 6. állítását.
- (2) : Az 1. sorhoz hozzáadtam a 3. sor 4-szeresét, azaz alkalmaztam a Tétel 6. állítását.
- (3) : Kifejtettem a determináns a 3. oszlopa szerint.
- (4) : Sarrus-szabállyal megkaptam a végső eredményt.

23. *Észrevétel.* Még egyszer hangsúlyozom, hogy nem kell ezt a módszert alkalmazni, mert kis mátrixok esetében a Sarrus-szabály sokkal gyorsabb, a kifejtéses módszert pedig könnyebb ellenőrizni.

3.4. Érdekesség

Egy $n \times n$ -es mátrix determinánsának kiszámítása a kifejtéses módszerrel $\mathcal{O}(n!)$ időigénnyel tehető meg. Ha elemi átalakításokat végzünk, akkor bizonyítható, hogy az időigény csak $\mathcal{O}(n^3)$. Röviden rávilágítanék arra, hogy mennyivel jelent ez nagyobb gyorsaságot. A tegyük fel, hogy egy 5 GHz-es processzorú számítógéppel számolunk, ami azt jelenti, hogy 5 milliárd műveletet tud elvégezni másodpercenként. A könnyítés kedvéért a továbbiakban csak az ordo utáni függvényekkel számolok.

Ha $n = 3$, akkor a mátrix determinánsának kiszámítása kifejtéses módszerrel $0,12 \cdot 10^{-8}$ másodpercig tart, míg Gauss-eliminációval $0,54 \cdot 10^{-8}$ másodpercig. Itt még a kifejtéses módszer a gyorsabb. Ha $n = 10$, akkor az első módszerrel a számítás $0,00072576$ másodpercig tart, Gauss-eliminációval $0,0000002$ másodpercig tart. Itt az első módszer már több mint 3000-szer lassabb, de gyakorlatilag ez még elhanyagolható.

Nézzük az $n = 15$ esetet. Gauss-eliminációval az időigény 0,000000675 másodperc, míg kifejtéses módszerrel 4,358914560 perc. Ez már eléggé érzékelhető és zavaró különbség. Ha $n = 20$, akkor a Gauss-eliminációnak még mindig jóval másodperc alatti idő szükséges, 0,0000016 másodperc, míg a kifejtéses módszernek 15,64366003 évre lenne szüksége. Nem lenne túl hatékony ezt kivárni.

Végül ugorjunk egy „hatalmasat”, legyen $n = 50$. A Gauss-elimináció még mindig hatékony, időigénye 0,000025 másodperc. A kifejtéses módszerrel már komoly problémába ütköznénk, ugyanis $0.1955638709 \cdot 10^{48}$ évre lenne szüksége. A Nap várható hátralévő élettartamát 5 – 10 milliárd évre becsülik, tehát a Nap már nem élné meg az eredményt. Ha jól tudom, akkor ez a számolási időigény már a világegyetem várható életkoránál is nagyobb szám. Ha valaki kíváncsi rá, hogy a Gauss-elimináció mekkora n esetén megy 1 másodperc fölé, az könnyen kiszámolhatja egy egyszerű egyenletmegoldással.

Másik kérdés, hogy melyik módszer mennyire stabil numerikusan, ebbe most nem mennék bele, de ez is érdekes kérdés.

3.5. Alkalmazások

- Kalkulus: Jacobi-determináns
- Paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata.
- Egyenletrendszerek, Cramer-szabály.
- Adott pontokon átmenő sík, egyenes, kör egyenlete.
- Adott egy gráf. Van-e benne kör? Mennyi a feszítőfáinak száma? A kérdések a megfelelő mátrixok determinánsa alapján megoldható. (Informatikai párhuzam: van-e holtpont az erőforrások között? A választ lásd az Operációs rendszerek című kurzuson.)
- Adott egy páros gráf, van-e benne teljes párosítás? Egy speciális determinánssal ez is könnyen eldönthető.

3.6. Kiegészítés

- Wolfram Alpha / Wolfram Mathematica: `Det[{{3, 2, -4},{-2, -5, 1},{-8, 2, 1}}]`
- Maple: `LinearAlgebra[Determinant](Matrix([[3,2,-4],[-2,-5,1],[-8,2,1]]))`;
- Matlab: `det([3 2 -4;-2 -5 1;-8 2 1])`
- Matek.hu