

1. GYAKORLAT

Halmazok, halmazműveletek, hatványhalmaz.

1. Alapfogalmak

A halmaz és az eleme alapfogalmak, nem definiáljuk őket. Jelölés: $x \in H$: az x eleme a H halmaznak. Itt x egy tetszőleges valami, mivel a H elemei is tetszőleges dolgok lehetnek. Egy halmaz véges, ha véges sok eleme van. Ezt a véges számot a halmaz elemszámának nevezzük.

1. Definíció (Üres halmaz). Az üres halmaz olyan halmaz, melynek nincs eleme. Jele: $\emptyset$. Másképp fogalmazva: minden x -re teljesül az, hogy $x \notin \emptyset$.

2. Észrevétel. Csak egyetlen üres halmaz van, viszont sok különböző módon felírható.

Ha a halmaz nem üres, akkor elemeit megadhatjuk felsorolással, képlettel, körülírással; a lényeg, hogy egyértelműen kiderüljön, hogy mik tartoznak a halmazba, és mik nem.

3. Definíció. Két halmaz akkor egyenlő, ha elemeik megegyeznek. Jelölés: $A = B$.

4. Észrevétel. Egy halmazban minden elemet egyszeres multiplicitással számolunk. Például $\{0, 1, 2\} = \{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2\}$.

5. Példa. $H = \{2, 4, 6, 8\} = \{x \in \mathbb{N} : x < 10 \text{ és } \exists y \in \mathbb{N}, \text{ hogy } x = 2y\}$ = „egyjegyű páros számok halmaza”

6. Észrevétel. $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

Az első az üres halmaz, neki nincs eleme, elemszáma nulla. A második egy olyan halmaz, mely 1 elemet tartalmaz, mégpedig az üres halmazt. Ennek az elemszáma 1.

7. Definíció (Részhalmaz). Az A halmaz a B halmaznak részhalmaza, ha bármely A -beli elem B -nek is eleme. Jelölés: $A \subseteq B$.

8. Definíció (Valódi részhalmaz). Az A halmaz a B halmaznak valódi részhalmaza, ha részhalmaza, de nem egyenlő vele. Jelölés: $A \subset B$.

9. Tétel. Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Ekkor

- ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$;
- ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.

10. Definíció (Hatványhalmaz). Egy H halmaz hatványhalmazának nevezzük azt a halmazt, mely a H halmaz összes részhalmazából áll. Jelölés: $\mathcal{P}(H)$.

Általában egy rögzített, jól definiált halmaz elemeivel foglalkozunk, ugyanis nem túl sok értelme van a $H = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{\text{Shakespeare összes művei}\}$ halmaznak. Ez is egy korrekten definiált halmaz, de gyakorlati haszna nincs. Ezért meg szoktunk állapítani egy alaphalmazt, és csak ezen alaphalmaz elemeit vizsgáljuk, az ezen kívüli elemekkel nem foglalkozunk.

11. Definíció (Halmazműveletek). Legyen A és B két tetszőleges halmaz, U legyen a rögzített alaphalmaz, $A, B \subseteq U$.

1. Az A és B halmazok uniójának nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van valamelyik halmazban. Jelölés: $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ VAGY } x \in B\}$$

2. Az A és B halmazok metszetének nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van mindkét halmazban. Jelölés: $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ÉS } x \in B\}$$

3. Az A halmaz komplementerének nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van U -ban (az alaphalmazban), de nincs benne A -ben. Jelölés: $\overline{A}$.

$$\overline{A} = \{x : x \in U \text{ ÉS } x \notin A\}$$

4. Az A és B halmazok különbségének nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van A -ban, de nincs benne B -ben. Jelölés: $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ÉS } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

5. Az A és B halmazok szimmetrikus differenciájának nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme az A és a B halmazok közül pontosan az egyikben van benne. Jelölés: $A \triangle B$.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

2. Alkalmazások

1. Halmaz, mint absztrakt adattípus. LÁSD: Algoritmusok és adatszerkezetek I. kurzus.
2. Java programozási nyelv: például Set interfész; AbstractSet, HashSet osztály.
3. Formális nyelvek és számítástudomány:
 - ábécé: előre rögzített, meghatározott jelek általában véges halmaza, például $\Sigma = \{\text{magyar nyelv által használt betűk és karakterek}\}$;
 - az ábécé elemei a karakterek, a karakterekből álló sorozatok a szavak, például Shakespeare minden műve egy-egy szó;
 - Σ^* az összes szavak halmaza;
 - Σ^* részhalmazai a nyelvek, például Shakespeare összes műve egy nyelv.
4. Reguláris kifejezések: olyan string, amivel meghatározható stringek egy halmaza.
5. Fontos kiterjesztés: fuzzy-halmazok. Alkalmazásai: irányítástechnika, mesterséges intelligencia, elektronika.
6. Mandelbrot-halmaz és egyéb fraktálok.
7. Számelméleti halmazok: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
8. Biológia: rendszertani kategorizálás.
9. Minden területen, mindenféle kategóriába sorolás halmazelméleti feladat. Ujjlenyomat keresése adatbázisban, telefonszám keresése telefonkönyvben ... - ez mind olyan probléma, mely arra vezethető vissza, hogy egy adott objektum eleme-e egy halmaznak. Gyakorlatban a halmazokon már értelmezve van valami sorrendiségi reláció, így már nem pusztán matematikai halmazokról beszélhetünk, ahol a halmaz elemeinek sorrendje nem számít. LÁSD: Algoritmusok és adatszerkezetek I. kurzus - Keresési és rendezési algoritmusok.