

# Diszkrét matematika I. gyakorlat

Bogya Norbert

2011. december 15.

# Tartalom

- 1 Teljes feladatsor #1
- 2 Teljes feladatsor #2
- 3 Teljes feladatsor #3
- 4 Válogatott feladatok

## 1. kérdés

(1) Mennyi a  $z$  komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha  $(4 - 2i)z = 2 + 14i$ ?  
 (Emlékeztető: a képzetes rész az  $i$  együtthatója a kanonikus alakban.)

|   |                          |                          |                          |                         |                         |                         |                         |                         |                                 |   |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|---|
| ! | -3 <input type="radio"/> | -2 <input type="radio"/> | -1 <input type="radio"/> | 0 <input type="radio"/> | 1 <input type="radio"/> | 2 <input type="radio"/> | 3 <input type="radio"/> | 4 <input type="radio"/> | egyik sem <input type="radio"/> | ! |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|---|

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

## 1. feladat

Mennyi a  $z$  komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha  
 $(4 - 2i)z = 2 + 14i$ ?  
 (Emlékeztető: a képzetes rész az  $i$  együtthatója a kanonikus alakban.)

# 1. kérdés

## 1. feladat

Mennyi a  $z$  komplex szám képzetes része az alábbiak közül, ha  $(4 - 2i)z = 2 + 14i$ ?

(Emlékeztető: a képzetes rész az  $i$  együtthatója a kanonikuss alakban.)

## Hint

Meg kell oldani a

$$(4 - 2i)z = 2 + 14i$$

egyenletet a komplex számok körében, ahol  $z$  az ismeretlen!

## Megoldás

$$z = \frac{2 + 14i}{4 - 2i} = \dots = -1 + 3i$$

## 2. kérdés

(2) Igazak-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges  $A, B, C$  halmazokra?

Ha  $A \subseteq B$ , akkor  $A \times A \subseteq B \times B$ .

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

$A \cup (B \cap A) = A$ .

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |

### 2. feladat

Igazak-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges  $A, B, C$  halmazokra?

- Ha  $A \subseteq B$ , akkor  $A \times A \subseteq B \times B$ .
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
- $A \cup (B \cap A) = A$ .

## 2. kérdés

### 2. feladat

Igazak-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges  $A, B, C$  halmazokra?

- Ha  $A \subseteq B$ , akkor  $A \times A \subseteq B \times B$ .
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
- $A \cup (B \cap A) = A$ .

### Hint

Mivel a vizsga tesztos, rajzolgatni is lehet.

### Megoldás

- Igaz. (Kijön a definícióból.)
- Igaz. (Az unió disztributív a metszetre nézve.)
- Igaz. (Elnyelési tulajdonság.)

## 3. kérdés

(3) Legyen  $A = P(\mathbb{N})$  az  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  hatványhalmaza, és legyen  $\rho = \{(X, Y) \in A^2 : X \cap Y \text{ véges}\}$ . Mely tulajdonságokkal rendelkezik a  $\rho$  reláció az alábbiak közül?

|                          |                                    |                                        |                                |                                 |                          |
|--------------------------|------------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | szimmetrikus <input type="radio"/> | antiszimmetrikus <input type="radio"/> | reflexív <input type="radio"/> | egyik sem <input type="radio"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|------------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------|

## 3. feladat

Legyen  $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  az  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  hatványhalmaza, és legyen  $\rho = \{(X, Y \in A^2 : X \cap Y \text{ véges})\}$ . Mely tulajdonságokkal rendelkezik a  $\rho$  reláció az alábbiak közül?

szimmetrikus,      antiszimmetrikus,      reflexív,      egyik sem

### 3. kérdés

#### 3. feladat

Legyen  $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  az  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  hatványhalmaza, és legyen  $\rho = \{(X, Y \in A^2 : X \cap Y \text{ véges})\}$ . Mely tulajdonságokkal rendelkezik a  $\rho$  reláció az alábbiak közül?

szimmetrikus,      antiszimmetrikus,      reflexív,      egyik sem

#### Hint

Ne essünk azonnal teljesen kétségbe.

#### Megoldás

- Szimmetrikus. Triviális.
- Nem antiszimmetrikus. (Az előző miatt már ez is triviális.)
- Nem reflexív. Ez már nem feltétlen triviális. Ellenpélda:  
 $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$  viszont  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \notin \rho$ , mert  $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}$  nem véges.



## 4. kérdés

(4) Az  $x^3 + x^2 - 2x + 10$  polinomot maradékosan osztjuk az  $x + 3$  polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül?

|   |      |      |     |     |     |     |           |             |             |   |
|---|------|------|-----|-----|-----|-----|-----------|-------------|-------------|---|
| ! | -3 ○ | -2 ○ | 0 ○ | 2 ○ | 1 ○ | 3 ○ | $x - 3$ ○ | $x^2 + 1$ ○ | egyik sem ○ | ! |
|---|------|------|-----|-----|-----|-----|-----------|-------------|-------------|---|

## 4. feladat

Az  $x^3 + x^2 - 2x + 10$  polinomot maradékosan osztjuk az  $x + 3$  polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül.

## 4. kérdés

### 4. feladat

Az  $x^3 + x^2 - 2x + 10$  polinomot maradékosan osztjuk az  $x + 3$  polinommal. Mi lesz az osztás maradéka az alábbiak közül.

### Hint

Polinomosztást kell produkálni.

### Megoldás

$$x^3 + x^2 - 2x + 10 = (x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 4) - 2$$

## 5. kérdés

(5) Legyen  $F$  egy olyan formula, amelyik a „Ha péntek van és mindenki alszik, akkor senki sem fél” ítéletet formalizálja. Az alábbi

$$\begin{aligned} U : & (\forall x)(\exists y)(\neg A(x) \wedge F(y) \wedge P), \\ V : & (P \wedge (\forall x)A(x)) \rightarrow ((\forall y)\neg F(y)), \\ W : & (P \wedge (\forall x)(\exists y))(A(x) \vee F(y)). \end{aligned}$$

képletek közül (alkalmas elsőrendű nyelv esetén) melyik az, amelyik  $F$ -vel ekvivalens formula?

|   |                           |                           |                           |                                 |   |
|---|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------------|---|
| ! | <input type="radio"/> $U$ | <input type="radio"/> $V$ | <input type="radio"/> $W$ | <input type="radio"/> egyik sem | ! |
|---|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------------|---|

### 5. feladat

Legyen  $F$  egy olyan formula, amelyik a „Ha péntek van és mindenki alszik, akkor senki sem fél” ítéletet formalizálja. Az alábbi

- $U : (\forall x)(\forall y)(\neg A(x) \wedge F(x) \wedge P)$
- $V : (P \wedge (\forall x)A(x)) \rightarrow ((\forall y)\neg F(y))$
- $W : (P \wedge (\forall x)(\exists y))(A(x) \vee F(y))$

képletek közül (alkalmas elsőrendű nyelv esetén) melyik az, amelyik  $F$ -vel ekvivalens formula?

## 5. kérdés

### 5. feladat

Legyen  $F$  egy olyan formula, amelyik a „Ha péntek van és mindenki alszik, akkor senki sem fél” ítéletet formalizálja. Az alábbi

- $U : (\forall x) (\forall y) (\neg A(x) \wedge F(x) \wedge P)$
- $V : (P \wedge (\forall x) A(x)) \rightarrow ((\forall y) \neg F(y))$
- $W : (P \wedge (\forall x) (\exists y)) (A(x) \vee F(y))$

képletek közül (alkalmas elsőrendű nyelv esetén) melyik az, amelyik  $F$ -vel ekvivalens formula?

### Megoldás

Egyértelmű, hogy a  $V$  formulát keressük. Az első mást jelent, az utolsó szintaktikailag nem is (jó) formula.

## 6. kérdés

(6) Igazak-e az alábbi kijelentések?

Létezik  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$  bijektív leképezés.

Létezik  $\mathbb{Q}^7 \rightarrow \mathbb{R}$  bijektív leképezés.

Létezik  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}^2$  bijektív leképezés.

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |

## 6. feladat

Igazak-e az alábbi kijelentések?

- Létezik  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$  bijektív leképezés.
- Létezik  $\mathbb{Q}^7 \rightarrow \mathbb{R}$  bijektív leképezés.
- Létezik  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}^2$  bijektív leképezés.

## 6. kérdés

### 6. feladat

Igazak-e az alábbi kijelentések?

- Létezik  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$  bijektív leképezés.
- Létezik  $\mathbb{Q}^7 \rightarrow \mathbb{R}$  bijektív leképezés.
- Létezik  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}^2$  bijektív leképezés.

### Hint

A feladat a számosságokhoz kapcsolódik.

### Megoldás

- $|\mathbb{N}| = \aleph_0 = \aleph_0 = |\mathbb{N}^3| \implies$  létezik bijekció
- $|\mathbb{Q}^7| = \aleph_0 \neq c = |\mathbb{R}| \implies$  nem létezik bijekció
- $|\mathbb{R}| = c \neq \aleph_0 = |\mathbb{N}^2| \implies$  nem létezik bijekció

## 7. kérdés

(7) Mennyi az  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix determinánása?

|   |                         |                         |                         |                         |                         |                          |                          |                          |                             |   |
|---|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------------|---|
| ! | 0 <input type="radio"/> | 1 <input type="radio"/> | 2 <input type="radio"/> | 3 <input type="radio"/> | 4 <input type="radio"/> | -1 <input type="radio"/> | -2 <input type="radio"/> | -3 <input type="radio"/> | egyéb <input type="radio"/> | ! |
|---|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------------|---|

## 7. feladat

Mennyi az  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix determinánása?

## 7. kérdés

### 7. feladat

Mennyi az  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix determinánsa?

### Megoldás

Kifejtem a determinánst a második oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = -2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 0.$$



## 8. kérdés

(8) Az  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix négyzetének hány zérus eleme van? (Azaz  $A^2$  kilenc eleme közül hány egyenlő 0-val?)

|   |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |
|---|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|
| ! | 0 | <input type="radio"/> | 1 | <input type="radio"/> | 2 | <input type="radio"/> | 3 | <input type="radio"/> | 4 | <input type="radio"/> | 5 | <input type="radio"/> | 6 | <input type="radio"/> | 7 | <input type="radio"/> | 8 | <input type="radio"/> | ! |
|---|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|

## 8. feladat

Az  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix négyzetének hány zérus eleme van?  
(Azaz  $A^2$  kilenc eleme közül hány egyenlő 0-val?)

## 8. kérdés

### 8. feladat

Az  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix négyzetének hány zérus eleme van?

(Azaz  $A^2$  kilenc eleme közül hány egyenlő 0-val?)

### Megoldás

|    |   |   |    |   |   |
|----|---|---|----|---|---|
|    |   |   | -1 | 2 | 1 |
|    |   |   | 2  | 1 | 3 |
|    |   |   | 1  | 0 | 1 |
| -1 | 2 | 1 | 6  | 0 | 6 |
| 2  | 1 | 3 | 3  | 5 | 8 |
| 1  | 0 | 1 | 0  | 2 | 2 |

## 9. kérdés

(9) Az alábbiak közül mely esetben mondhatjuk, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa **biztosan** nulla?

A mátrix sorvektorrendszere lineárisan független.

A mátrix megegyezik a transzponáltjával.

A mátrix valamelyik oszlopában minden elem nulla.

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

### 9. feladat

Az alábbiak közül mely esetben mondhatjuk, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa **biztosan** nulla?

- A mátrix sorvektorrendszere lineárisan független.
- A mátrix megegyezik a transzponáltjával.
- A mátrix valamelyik oszlopában minden elem nulla.

## 9. kérdés

### 9. feladat

Az alábbiak közül mely esetben mondhatjuk, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa **biztosan** nulla?

- A mátrix sorvektorrendszere lineárisan független.
- A mátrix megegyezik a transzponáltjával.
- A mátrix valamelyik oszlopában minden elem nulla.

### Megoldás

- Biztosan NEM nulla. (Paralelepipedon.)
- Semmi releváns információ nincs a kijelentésben a feladat szempontjából.
- Biztosan nulla. (Kifejtjük a csupa nulla oszlop szerint.)

## 10. kérdés

(10) Az  $\mathbb{R}^5$ -ben tekintsük az  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$  részhalmazt. Hánydimenziós az  $S$  altér? (Gondoljunk a lineáris egyenletrendszerekről tanultakra!)

|   |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |       |                       |   |
|---|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|-------|-----------------------|---|
| ! | 0 | <input type="radio"/> | 1 | <input type="radio"/> | 2 | <input type="radio"/> | 3 | <input type="radio"/> | 4 | <input type="radio"/> | 5 | <input type="radio"/> | egyéb | <input type="radio"/> | ! |
|---|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|-------|-----------------------|---|

## 10. feladat

Az  $\mathbb{R}^5$ -ben tekintsük az

$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$  részhalmazt. Hány dimenziós az  $S$  altér? (Gondoljunk a lineáris egyenletrendszerekről tanultakra!)

## 10. kérdés

### 10. feladat

Az  $\mathbb{R}^5$ -ben tekintsük az

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$$

részalmazt. Hány dimenziós az  $S$  altér? (Gondoljunk a lineáris egyenletrendszerekről tanultakra!)

### Hint

A tanár úr már gondolt rá.

### Megoldás

Megoldjuk az egyenletet (egyenletrendszert), és a szabad változók száma adja a megoldásaltér dimenzióját. Most látható, hogy 4 szabadismeretlen van, tehát az  $S$  altér 4-dimenziós.

# Tartalom

- 1 Teljes feladatsor #1
- 2 Teljes feladatsor #2
- 3 Teljes feladatsor #3
- 4 Válogatott feladatok

## 1. kérdés

(1) Legyen  $A = \{0, 1, 3, 4, 5\}$  és  $\rho = \{(x, y) \in A^2 : x - y = 1\} \subseteq A^2$ . Mely tulajdonságokkal rendelkezik a  $\rho$  reláció az alábbiak közül?

|   |                                        |                                |                                       |                                 |   |
|---|----------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------|---|
| ? | antiszimmetrikus <input type="radio"/> | reflexív <input type="radio"/> | részbenrendezés <input type="radio"/> | egyik sem <input type="radio"/> | ? |
|---|----------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------|---|

## 1. feladat

Legyen  $A = \{0, 1, 3, 4, 5\}$  és  $\rho = \{(x, y) \in A^2 : x - y = 1\} \subseteq A^2$ . Mely tulajdonságokkal rendelkezik a  $\rho$  reláció az alábbiak közül?

antiszimmetrikus,      reflexív,      részbenrendezés,      egyik sem



# 1. kérdés

## 1. feladat

Legyen  $A = \{0, 1, 3, 4, 5\}$  és  $\rho = \{(x, y) \in A^2 : x - y = 1\} \subseteq A^2$ .  
Mely tulajdonságokkal rendelkezik a  $\rho$  reláció az alábbiak közül?  
antiszimmetrikus, reflexív, részbenrendezés, egyik sem

## Megoldás

- Antiszimmetrikus, mert  $(a, b) \in \rho$  és  $(b, a) \in \rho$  egyszerre nem is teljesülhet. (Logika - implikáció -  $h \rightarrow \text{bármilyen} = \text{igaz.}$ )
- Nem reflexív, mert bármely  $a \in A$  esetében  $a - a = 0$ , azaz  $(a, a) \notin \rho$ .
- Nem részbenrendezés, mivel nem is reflexív. (Egyébként nem is tranzitív.)

## 2. kérdés

(2) Legyen  $A = \mathcal{P}(\{1, 2\})$  és  $B = \mathcal{P}(\{2, 3\})$ , ahol tetszőleges  $X$  halmazra  $\mathcal{P}(X)$  az  $X$  hatványhalmazát jelöli. Hány elemű az  $A \triangle B$  halmaz?

|   |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |           |                       |   |
|---|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|-----------|-----------------------|---|
| ! | 0 | <input type="radio"/> | 1 | <input type="radio"/> | 2 | <input type="radio"/> | 3 | <input type="radio"/> | 4 | <input type="radio"/> | 5 | <input type="radio"/> | 6 | <input type="radio"/> | 7 | <input type="radio"/> | egyik sem | <input type="radio"/> | ! |
|---|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|-----------|-----------------------|---|

## 2. feladat

Legyen  $A = \mathcal{P}(\{1, 2\})$  és  $B = \mathcal{P}(\{2, 3\})$ , ahol tetszőleges  $X$  halmazra  $\mathcal{P}(X)$  az  $X$  hatványhalmazát jelöli. Hány elemű az  $A \triangle B$  halmaz?

## 2. kérdés

### 2. feladat

Legyen  $A = \mathcal{P}(\{1, 2\})$  és  $B = \mathcal{P}(\{2, 3\})$ , ahol tetszőleges  $X$  halmazra  $\mathcal{P}(X)$  az  $X$  hatványhalmazát jelöli. Hány elemű az  $A \triangle B$  halmaz?

### Hint

Egyszerűen meg kell adni  $A \triangle B$ -t.

### Megoldás

- $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $B = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$   
 $\{\{1\}, \{1, 2\}\} \cup \{\{3\}, \{2, 3\}\} = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

### 3. kérdés

(3) Alteret alkotnak-e  $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$$

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

#### 3. feladat

Alteret alkotnak-e  $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$

### 3. kérdés

#### 3. feladat

Alteret alkotnak-e  $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 25\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$

#### Hint

Mi az altér definíciója?

#### Megoldás

- Igen, mert minden homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshaltér.
- Nem altér, mert nincs benne a nullvektor.
- Nem, mert nincs benne a nullvektor.

## 4. kérdés

(4) Az  $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  mátrix transzponáltját  $A^T$ -tal jelölve mennyi az  $A \cdot A^T$  szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

|   |                         |                         |                         |                         |                         |                         |                          |                                     |                                        |   |
|---|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------|---|
| ! | 2 <input type="radio"/> | 5 <input type="radio"/> | 7 <input type="radio"/> | 1 <input type="radio"/> | 4 <input type="radio"/> | 0 <input type="radio"/> | -5 <input type="radio"/> | más számérték <input type="radio"/> | nincs értelmezve <input type="radio"/> | ! |
|---|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------|---|

## 4. feladat

Az  $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  mátrix transzponáltját  $A^T$ -tal jelölve mennyi az  $A \cdot A^T$  szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

## 4. kérdés

### 4. feladat

Az  $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  mátrix transzponáltját  $A^T$ -tal jelölve mennyi az  $A \cdot A^T$  szorzatmátrix determinánsa az alábbiak közül?

### Megoldás

- $A^T = ( 0 \ 1 \ 2 )$

- |   |  |   |   |   |
|---|--|---|---|---|
|   |  | 0 | 1 | 2 |
| 0 |  | 0 | 0 | 0 |
| 1 |  | 0 | 1 | 2 |
| 2 |  | 0 | 2 | 4 |

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$

## 5. kérdés

(5) Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha  $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$  (valós számokból álló) mátrixot jelöl,  $A\vec{x} = \vec{0}$  az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa  $A$ , és a szóban forgó vektorok, illetve alterek az  $\mathbb{R}^4$  vektortér elemei, illetve alterei.

Ha  $A$ -nak van inverze, akkor az  $A\vec{x} = \vec{0}$  megoldásainak altere kétdimenziós.

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

Ha  $A$ -nak van inverze, akkor az  $A\vec{x} = \vec{0}$  megoldásainak altere nulladimenziós.

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

Ha  $A$ -nak van inverze, akkor az  $A\vec{x} = \vec{0}$  megoldásainak altere négydimenziós.

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

### 5. feladat

Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha  $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$  (valós számokból álló) mátrixot jelöl,  $A\vec{x} = \vec{0}$  az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa  $A$ , és a szóban forgó vektorok, illetve alterek az  $\mathbb{R}^4$  vektortér elemei, illetve alterei.

- Ha  $A$ -nak van inverze, akkor az  $A\vec{x} = \vec{0}$  megoldásainak altere kétdimenziós.
- Ha  $A$ -nak van inverze, akkor az  $A\vec{x} = \vec{0}$  megoldásainak altere nulladimenziós.
- Ha  $A$ -nak van inverze, akkor az  $A\vec{x} = \vec{0}$  megoldásainak altere négydimenziós.



## 5. kérdés

### 5. feladat

Igazak-e szükségképpen az alábbi kijelentések, ha  $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$  (valós számokból álló) mátrixot jelöl,  $A\vec{x} = \vec{0}$  az a homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek mátrixa  $A$ , és a szóban forgó vektorok, illetve alterek az  $\mathbb{R}^4$  vektortér elemei, illetve alterei.

- Ha  $A$ -nak van inverze, akkor az  $A\vec{x} = \vec{0}$  megoldásainak altere kétdimenziós.
- Ha  $A$ -nak van inverze, akkor az  $A\vec{x} = \vec{0}$  megoldásainak altere nulladimenziós.
- Ha  $A$ -nak van inverze, akkor az  $A\vec{x} = \vec{0}$  megoldásainak altere négydimenziós.

### Megoldás

- $A$ -nak van inverze
- $\implies \det(A) \neq 0$
- $\implies A$  sorvektorai lineárisan független vektorrendszert alkotnak
- $\implies A$  Gauss-elimináció során nem tűnik el sor
- $\implies A$  lépcsős alaknak 4 sora van.
- $\implies$  Nincs szabadismeretlen.
- $\implies A$  megoldásaltér dimenziója nulla.

## 6. kérdés

(6) Tautológiák-e az alábbi formulák?

$$\left( \neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y)) \right) \leftrightarrow \left( (\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)) \right)$$

$$((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$$

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

## 6. feladat

Tautológiák-e az alábbi formulák?

- $(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y))) \leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)))$
- $((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$

## 6. kérdés

### 6. feladat

Tautológiák-e az alábbi formulák?

- $(\neg(\exists x)(\exists y)(\neg A(x) \vee \neg B(y))) \leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(A(x) \wedge B(y)))$
- $((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$

### Hint

Az egyik predikátum-, a másik ítéletkalkulusbeli formula.

### Megoldás

- Tautológia: a  $\leftrightarrow$  két oldalán egymással ekvivalens formulák állnak. (Ugyanaz a tagadás, más formában.)
- Ha nincs jobb ötlet: igazságtábla, és megnézni, hogy mindenhol igaz jön-e ki. NEM.

## 7. kérdés

(7) Legyen  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$  és  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ ,  $x \mapsto (x - 1, x + 1)$ . Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

|                         |                                    |                                      |                                    |                                 |                         |
|-------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|-------------------------|
| <input type="radio"/> ? | $f$ injektív <input type="radio"/> | $g$ szürjektív <input type="radio"/> | $g$ injektív <input type="radio"/> | egyik sem <input type="radio"/> | <input type="radio"/> ? |
|-------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|-------------------------|

## 7. feladat

Legyen  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$  és  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ ,  $x \mapsto (x - 1, x + 1)$ . Melyek az igaz kijelentések az alábbiak közül?

$f$  injektív,       $g$  szürjektív,       $g$  injektív,      egyik sem

## 7. kérdés

### 7. feladat

Legyen  $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$  és  
 $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ ,  $x \mapsto (x - 1, x + 1)$ . Melyek az igaz kijelentések az  
alábbiak közül?

$f$  injektív,       $g$  szürjektív,       $g$  injektív,      egyik sem

### Megoldás

- $f$  nem injektív. Ellenpélda:  $(1, 4) \mapsto 5$ ,  $(2, 3) \mapsto 5$  DE  $(1, 4) \neq (2, 3)$ .
- $g$  nem szürjektív. A  $(0, 0)$ -nak nincs őse.
- $g$  injektív. Definíció szerint könnyen kijön.

## 8. kérdés

(8) Legyen  $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$ ,  $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$  és  $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$ , és persze  $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$ . Melyek lineárisan függők az alábbi vektorrendszerek közül?

|                                                   |                                                   |                                          |                                                   |                                 |                         |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------|-------------------------|
| <input type="radio"/> $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ | <input type="radio"/> $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ | <input type="radio"/> $\vec{a}, \vec{b}$ | <input type="radio"/> $\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ | <input type="radio"/> egyik sem | <input type="radio"/> ? |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------|-------------------------|

## 8. feladat

Legyen  $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$ ,  $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$  és  $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$ , és persze  $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$ . Melyek lineárisan függők az alábbi vektorrendszerek közül?

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ,  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ,  $\vec{a}, \vec{b}$ ,  $\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ , egyik sem

## 8. kérdés

### 8. feladat

Legyen  $\vec{a} = (-3, 0, 1, 2)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2, 0, 0)$ ,  $\vec{c} = (-2, -2, 1, 2)$   
és  $\vec{d} = (1, 2, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$ , és persze  $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$ . Melyek  
lineárisan függők az alábbi vektorrendszerek közül?  
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ,  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ,  $\vec{a}, \vec{b}$ ,  $\vec{0}, \vec{a}, \vec{d}$ , egyik sem

### Hint

Standard feladat, nincs szükség segítségre.

### Megoldás

- Lineárisan függő.
- Lineárisan független.
- Lineárisan független.
- Lineárisan függő.

## 9. kérdés

(9) Legyen  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$ ,  $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$  és  $\mathcal{E} = \{\mathcal{P}(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$ . A téglalapban felsoroltak közül melyek osztályozásai az  $A$  halmaznak?

|   |               |                       |               |                       |               |                       |           |                       |   |
|---|---------------|-----------------------|---------------|-----------------------|---------------|-----------------------|-----------|-----------------------|---|
| ? | $\mathcal{C}$ | <input type="radio"/> | $\mathcal{D}$ | <input type="radio"/> | $\mathcal{E}$ | <input type="radio"/> | egyik sem | <input type="radio"/> | ? |
|---|---------------|-----------------------|---------------|-----------------------|---------------|-----------------------|-----------|-----------------------|---|

## 9. feladat

Legyen  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$ ,  
 $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$  és  $\mathcal{E} = \{\mathcal{P}(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$ . A  
 téglalapban felsoroltak közül, melyek osztályozásai az  $A$  halmaznak?

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| $\mathcal{C}$ | $\mathcal{D}$ | $\mathcal{E}$ |
|---------------|---------------|---------------|



## 9. kérdés

### 9. feladat

Legyen  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $\mathcal{C} = \{\{2\}, A \setminus \{2\}\}$ ,  
 $\mathcal{D} = \{\{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}\}$  és  $\mathcal{E} = \{\mathcal{P}(\emptyset), \{1\}, \{3, 4\}\}$ . A  
téglalapban felsoroltak közül, melyek osztályozásai az  $A$  halmaznak?

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| $\mathcal{C}$ | $\mathcal{D}$ | $\mathcal{E}$ |
|---------------|---------------|---------------|

### Hint

Mi a osztályozás?

### Megoldás

- $\mathcal{C}$  osztályozás
- $\mathcal{D}$  nem osztályozás (a 2-es két blokkban szerepel)
- $\mathcal{E}$  nem osztályozás (a 2-es biztos nem szerepel egy blokkban sem)

## 10. kérdés

(10) Hány olyan eleme van a  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix inverzének (a kilenc közül), amelyik egész szám?

Pontosabban, az  $A^{-1}$ -ben hány helyen van egész szám? (Tehát ha egy szám több helyen is fellép, akkor többször számoljuk.) Ha nem létezik az  $A^{-1}$ , akkor az „egyéb” lehetőséget jelölje meg.

|   |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |       |                       |   |
|---|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|-------|-----------------------|---|
| ! | 1 | <input type="radio"/> | 2 | <input type="radio"/> | 3 | <input type="radio"/> | 4 | <input type="radio"/> | 7 | <input type="radio"/> | 8 | <input type="radio"/> | 9 | <input type="radio"/> | egyéb | <input type="radio"/> | ! |
|---|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|-------|-----------------------|---|

## 10. feladat

Hány olyan eleme van a  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix inverzének (a kilenc közül), amelyik egész szám? Pontosabban, az  $A^{-1}$ -ben hány helyen van egész szám? (Tehát ha egy szám több helyen is fellép, akkor többször számoljuk.) Ha nem létezik az  $A^{-1}$ , akkor az „egyéb” lehetőséget jelölje meg.

## 10. kérdés

### 10. feladat

Hány olyan eleme van a  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix inverzének (a kilenc közül), amelyek

egész szám? Pontosabban, az  $A^{-1}$ -ben hány helyen van egész szám? (Tehát ha egy szám több helyen is fellép, akkor többször számoljuk.) Ha nem létezik az  $A^{-1}$ , akkor az „egyéb” lehetőséget jelölje meg.

### Megoldás

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

# Tartalom

- 1 Teljes feladatsor #1
- 2 Teljes feladatsor #2
- 3 Teljes feladatsor #3
- 4 Válogatott feladatok

## 1. kérdés

(1) Legyen  $U$  egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek  $A, B, C$  az  $U$  tetszőleges részhalmazai. Igazak-e szükségképpen az alábbi egyenlőségek?

$$A \times \overline{A} = \emptyset$$

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

$$A \triangle A = A$$

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

## 1. feladat

Legyen  $U$  egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek  $A, B, C$  az  $U$  tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

- $A \times \overline{A} = \emptyset$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $A \triangle A = A$

# 1. kérdés

## 1. feladat

Legyen  $U$  egy tetszőleges alaphalmaz (más szóval univerzum), és legyenek  $A, B, C$  az  $U$  tetszőleges részhalmazai. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi egyenlőségek?

- $A \times \overline{A} = \emptyset$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $A \triangle A = A$

## Megoldás

- Hamis. Triviális.
- Igaz: a metszet disztributív az unióra nézve. (Fordítva is igaz.)
- Hamis:  $A \triangle A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$ .

## 2. kérdés

(2) Legyen  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\begin{aligned}\alpha : A \rightarrow A, (x, y) &\mapsto (y, x), & \beta : A \rightarrow A, (x, y) &\mapsto (x^3, -y), \\ \gamma : A \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) &\mapsto x + y, & \delta : \mathbb{Z} \rightarrow A, x &\mapsto (x, -x).\end{aligned}$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

|   |          |                       |         |                       |          |                       |          |                       |           |                       |   |
|---|----------|-----------------------|---------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|-----------------------|-----------|-----------------------|---|
| ? | $\alpha$ | <input type="radio"/> | $\beta$ | <input type="radio"/> | $\gamma$ | <input type="radio"/> | $\delta$ | <input type="radio"/> | egyik sem | <input type="radio"/> | ? |
|---|----------|-----------------------|---------|-----------------------|----------|-----------------------|----------|-----------------------|-----------|-----------------------|---|

## 2. feladat

Legyen  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\begin{aligned}\alpha : A \rightarrow A, (x, y) &\mapsto (y, x), & \beta : A \rightarrow A, (x, y) &\mapsto (x^3, -y), \\ \gamma : A \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) &\mapsto x + y, & \delta : \mathbb{Z} \rightarrow A, x &\mapsto (x, -x).\end{aligned}$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

## 2. kérdés

### 2. feladat

Legyen  $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , és tekintsük az alábbi leképezéseket:

$$\begin{aligned}\alpha : A \rightarrow A, (x, y) &\mapsto (y, x), & \beta : A \rightarrow A, (x, y) &\mapsto (x^3, -y), \\ \gamma : A \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) &\mapsto x + y, & \delta : \mathbb{Z} \rightarrow A, x &\mapsto (x, -x).\end{aligned}$$

Melyek injektívek ezen leképezések közül?

### Megoldás

- $\alpha$  injektív. Definíció szerint könnyen kijön.
- $\beta$  injektív. Definíció szerint könnyen kijön.
- $\gamma$  nem injektív. Ellenpélda:  $(2, 3) \mapsto 5$ ,  $(1, 4) \mapsto 5$  DE  $(2, 3) \neq (1, 4)$ .
- $\delta$  injektív. Definíció szerint könnyen kijön.



## 3. kérdés

(3) Legyen  $\mathcal{C} = \{\{1, 5, 6\}, \{0, 4\}, X\}$ . Minek kell választanunk az  $X$  halmazt az alábbi téglalapban felsoroltak közül, hogy  $\mathcal{C}$  osztályozás legyen a  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  halmazon?

|   |             |         |                    |            |               |           |   |
|---|-------------|---------|--------------------|------------|---------------|-----------|---|
| ! | $\emptyset$ | $\{2\}$ | $\{\emptyset, 3\}$ | $\{2, 3\}$ | $\{3, 4, 5\}$ | egyik sem | ! |
|---|-------------|---------|--------------------|------------|---------------|-----------|---|

## 3. feladat

Legyen  $\mathcal{C} = \{\{1, 5, 6\}, \{0, 4\}, X\}$ . Minek kell választanunk az  $X$  halmazt az alábbi téglalapban felsoroltak közül, hogy  $\mathcal{C}$  osztályozás legyen a  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  halmazon?

|                    |            |
|--------------------|------------|
| $\emptyset$        | $\{2\}$    |
| $\{\emptyset, 3\}$ | $\{2, 3\}$ |
| $\{3, 4, 5\}$      | egyik sem  |

### 3. kérdés

#### 3. feladat

Legyen  $\mathcal{C} = \{\{1, 5, 6\}, \{0, 4\}, X\}$ . Minek kell választanunk az  $X$  halmazt az alábbi téglalapban felsoroltak közül, hogy  $\mathcal{C}$  osztályozás legyen a  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  halmazon?

|                    |            |
|--------------------|------------|
| $\emptyset$        | $\{2\}$    |
| $\{\emptyset, 3\}$ | $\{2, 3\}$ |
| $\{3, 4, 5\}$      | egyik sem  |

#### Hint

Csak annyit kell tudni, hogy mi az osztályozás.

#### Megoldás

Triviális:  $\{2, 3\}$ .

## 4. kérdés

(4) Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$  a  $\mathbb{Z}^2$  halmazon

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$  a  $\mathbb{Z}$  halmazon

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$  a  $\mathbb{Z}$  halmazon

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

## 4. feladat

Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

- $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$  a  $\mathbb{Z}^2$  halmazon
- $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$  a  $\mathbb{Z}^2$  halmazon
- $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$  a  $\mathbb{Z}^2$  halmazon

## 4. kérdés

### 4. feladat

Igaz-e az alábbi relációk esetén, hogy a kérdéses reláció részbenrendezés?

- $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2\}$  a  $\mathbb{Z}^2$  halmazon
- $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 = y^2\}$  a  $\mathbb{Z}^2$  halmazon
- $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^3 = y^3\}$  a  $\mathbb{Z}^2$  halmazon

### Megoldás

- Nem, mivel nem antiszimmetrikus. Ellenpélda:  $((-1, 1), (-2, 2))$  és  $((-2, 2), (-1, 1))$  is benne van, de  $(-1, 1) \neq (-2, 2)$ .
- Nem, mivel nem antiszimmetrikus. Ellenpélda:  $(-2, 2)$  és  $(2, -2)$  is benne van, de  $-2 \neq 2$ .
- Igen részbenrendezés.

## 5. kérdés

(5) Legyen  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$ . Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

|                          |     |                          |                       |                          |                     |                          |              |                          |                                   |                          |           |                          |                          |
|--------------------------|-----|--------------------------|-----------------------|--------------------------|---------------------|--------------------------|--------------|--------------------------|-----------------------------------|--------------------------|-----------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | $S$ | <input type="checkbox"/> | $S \times \mathbb{N}$ | <input type="checkbox"/> | $S \cup \mathbb{Z}$ | <input type="checkbox"/> | $\mathbb{R}$ | <input type="checkbox"/> | $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ | <input type="checkbox"/> | egyik sem | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-----|--------------------------|-----------------------|--------------------------|---------------------|--------------------------|--------------|--------------------------|-----------------------------------|--------------------------|-----------|--------------------------|--------------------------|

## 5. feladat

Legyen  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$ . Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

|                          |     |                          |                       |                          |                     |                          |              |                          |                                   |                          |           |
|--------------------------|-----|--------------------------|-----------------------|--------------------------|---------------------|--------------------------|--------------|--------------------------|-----------------------------------|--------------------------|-----------|
| <input type="checkbox"/> | $S$ | <input type="checkbox"/> | $S \times \mathbb{N}$ | <input type="checkbox"/> | $S \cup \mathbb{Z}$ | <input type="checkbox"/> | $\mathbb{R}$ | <input type="checkbox"/> | $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ | <input type="checkbox"/> | egyik sem |
|--------------------------|-----|--------------------------|-----------------------|--------------------------|---------------------|--------------------------|--------------|--------------------------|-----------------------------------|--------------------------|-----------|

## 5. kérdés

### 5. feladat

Legyen  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}$ . Az alábbi halmazok közül ikszelje be a megszámlálhatóan végteleneket!

|     |                       |                     |              |                                   |           |
|-----|-----------------------|---------------------|--------------|-----------------------------------|-----------|
| $S$ | $S \times \mathbb{N}$ | $S \cup \mathbb{Z}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ | egyik sem |
|-----|-----------------------|---------------------|--------------|-----------------------------------|-----------|

### Hint

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0, |\mathbb{R}| = c$$

### Megoldás

- $|S| = \aleph_0$
- $|S \times \mathbb{N}| = \max\{\aleph_0, \aleph_0\} = \aleph_0$
- $|S \cup \mathbb{Z}| = \dots = \aleph_0$
- $|\mathbb{R}| = c$
- $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}| = c$

## 6. kérdés

(6) Hány  $\vee$  (diszjunciójel) kell az

$$A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunció tagjainak száma.)

|   |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |
|---|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|
| ! | 0 | <input type="radio"/> | 1 | <input type="radio"/> | 2 | <input type="radio"/> | 3 | <input type="radio"/> | 4 | <input type="radio"/> | 5 | <input type="radio"/> | 6 | <input type="radio"/> | 7 | <input type="radio"/> | 8 | <input type="radio"/> | ! |
|---|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|

## 6. feladat

Hány  $\vee$  (diszjunciójel) kell az

$$A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$$

formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunció tagjainak száma.)

## 6. kérdés

### 6. feladat

Hány  $\vee$  (diszjunkciójel) kell az  $A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$  formula teljes diszjunktív normálformájának felírásához? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak száma.)

### Megoldás

| $A$ | $\rightarrow$ | $(B$ | $\leftrightarrow$ | $C)$ |
|-----|---------------|------|-------------------|------|
| $i$ | $i$           | $i$  | $i$               | $i$  |
| $i$ | $h$           | $i$  | $h$               | $h$  |
| $i$ | $h$           | $h$  | $h$               | $i$  |
| $i$ | $i$           | $h$  | $i$               | $h$  |
| $h$ | $i$           | $i$  | $i$               | $i$  |
| $h$ | $i$           | $i$  | $h$               | $h$  |
| $h$ | $i$           | $h$  | $h$               | $i$  |
| $h$ | $i$           | $h$  | $i$               | $h$  |

$\Rightarrow$  6 „igaz-sor”

$\Rightarrow$  6 tag

$\Rightarrow$  5  $\vee$ -jel



## 7. kérdés

(7) Melyik a  $(\forall x)((\exists y)B(y) \rightarrow (\forall z)A(x, z))$  formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$F : (\forall x)((\forall z)A(x, z) \rightarrow (\exists y)B(y))$$

$$G : (\exists x)((\forall y)(\neg B(y)) \rightarrow (\exists z)(\neg A(x, z)))$$

$$H : (\exists x)((\exists y)B(y) \wedge (\exists z)(\neg A(x, z))).$$

|   |                         |                         |                         |                                 |   |
|---|-------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|---|
| ! | <input type="radio"/> F | <input type="radio"/> G | <input type="radio"/> H | <input type="radio"/> egyik sem | ! |
|---|-------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|---|

## 7. feladat

Melyik a  $(\forall x)((\exists y) B(y) \rightarrow (\forall z) A(x, z))$  formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$F : (\forall x)((\forall z) A(x, z) \rightarrow (\exists y) B(y))$$

$$G : (\exists x)((\forall y)(\neg B(y)) \rightarrow (\exists z)(\neg A(x, z)))$$

$$H : (\exists x)((\exists y) B(y) \wedge (\exists z)(\neg A(x, z)))$$

## 7. kérdés

### 7. feladat

Melyik a  $(\forall x) ((\exists y) B(y) \rightarrow (\forall z) A(x, z))$  formula negáltjával ekvivalens formula az alábbiak közül?

$$F : (\forall x) ((\forall z) A(x, z) \rightarrow (\exists y) B(y))$$

$$G : (\exists x) ((\forall y) (\neg B(y)) \rightarrow (\exists z) (\neg A(x, z)))$$

$$H : (\exists x) ((\exists y) B(y) \wedge (\exists z) (\neg A(x, z)))$$

Hint

MELYIK...

Megoldás

H

## 8. kérdés

(8) Mennyi a  $t$  paraméter értéke, ha az  $\mathbb{R}^3$ -beli

$$(1, 1, 2), (2, 1, t), (1, 2, 1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

|   |   |   |   |   |   |    |    |    |       |   |
|---|---|---|---|---|---|----|----|----|-------|---|
| ! | 0 | 1 | 3 | 5 | 7 | -1 | -3 | -5 | egyéb | ! |
|---|---|---|---|---|---|----|----|----|-------|---|

## 8. feladat

Mennyi a  $t$  paraméter értéke, ha az  $\mathbb{R}^3$ -beli

$$(1, 1, 2), (2, 1, t), (1, 2, 1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

## 8. kérdés

### 8. feladat

Mennyi a  $t$  paraméter értéke, ha az  $\mathbb{R}^3$ -beli

$$(1, 1, 2), (2, 1, t), (1, 2, 1)$$

vektorrendszer lineárisan függő?

### Hint

Determináns vagy Gauss-elimináció?

### Megoldás

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & t \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & t-4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & t-4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - t + 4 = 5 - t$$

$$5 - t = 0 \iff t = 5$$

## 9. kérdés

(9) Legyen  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  egy vektorrendszer az  $\mathbb{R}^5$  vektortérben. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi állítások (a „lin.” a „lineárisan” rövidítése)?

Ha  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  lin. független, akkor  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \neq \vec{0}$ .

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

Ha  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  lin. függő, akkor van olyan  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , hogy  $\vec{v}_3 = \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2$ .

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

Ha  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  lin. függő, akkor  $\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1$  is lin. függő.

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

## 9. feladat

Legyen  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  egy vektorrendszer az  $\mathbb{R}^5$  vektortérben. Igazak-e **szükségképpen** az alábbi állítások (a „lin.” a „lineárisan” rövidítése)?

- Ha  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  lin. független, akkor  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \neq \vec{0}$ .
- Ha  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  lin. függő, akkor van olyan  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , hogy  $\vec{v}_3 = \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2$ .
- Ha  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  lin. függő, akkor  $\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1$  is lin. függő.

## 9. kérdés

### 9. feladat

Legyen  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  egy vektorrendszer az  $\mathbb{R}^5$  vektortérben. Igazak-e szükségképpen az alábbi állítások (a „lin.” a „lineárisan” rövidítése)?

- Ha  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  lin. független, akkor  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \neq \vec{0}$ .
- Ha  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  lin. függő, akkor van olyan  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , hogy  $\vec{v}_3 = \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2$ .
- Ha  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  lin. függő, akkor  $\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1$  is lin. függő.

### Megoldás

- Igaz.
- Nem igaz.
- Igaz.

## 10. kérdés

(10) Legyen  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Melyik a  $C^{-1}$  mátrix legnagyobb abszolút értékű eleme?

|   |    |                       |   |                       |   |                       |   |                       |     |                       |    |                       |    |                       |                 |                       |       |                       |   |
|---|----|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|-----|-----------------------|----|-----------------------|----|-----------------------|-----------------|-----------------------|-------|-----------------------|---|
| ! | -2 | <input type="radio"/> | 1 | <input type="radio"/> | 2 | <input type="radio"/> | 3 | <input type="radio"/> | -12 | <input type="radio"/> | -7 | <input type="radio"/> | -4 | <input type="radio"/> | $-\frac{17}{2}$ | <input type="radio"/> | egyéb | <input type="radio"/> | ! |
|---|----|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|-----|-----------------------|----|-----------------------|----|-----------------------|-----------------|-----------------------|-------|-----------------------|---|

## 10. feladat

Legyen  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Melyik a  $C^{-1}$  mátrix legnagyobb abszolút értékű eleme?

## 10. feladat

Legyen  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Melyik a  $C^{-1}$  mátrix legnagyobb abszolút értékű eleme?

## Megoldás

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$



# Tartalom

- 1 Teljes feladatsor #1
- 2 Teljes feladatsor #2
- 3 Teljes feladatsor #3
- 4 Válogatott feladatok

## 1. kérdés

(8) Alteret alkotnak-e  $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 1\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 = 23\}$$

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

## 1. feladat

Alteret alkotnak-e  $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 1\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 = 23\}$

# 1. kérdés

## 1. feladat

Alteret alkotnak-e  $\mathbb{R}^2$ -ben az alábbi részhalmazok?

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 1\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 = 23\}$

## Megoldás

- Nem, mert nincs benne a nullvektor.
- Igen. Minden homogén egyenlet(rendszer) megoldásai alteret alkotnak.
- Nem, mert nincs benne a nullvektor.

## 2. kérdés

(6) Melyik lesz sajátértéke a valós  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$  mátrixnak az alábbiak közül?

|                         |                                    |                            |                           |                           |                            |                           |                           |                                   |                                 |                         |
|-------------------------|------------------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|-------------------------|
| <input type="radio"/> ? | <input type="radio"/> $-\sqrt{17}$ | <input type="radio"/> $-2$ | <input type="radio"/> $0$ | <input type="radio"/> $1$ | <input type="radio"/> $-1$ | <input type="radio"/> $2$ | <input type="radio"/> $7$ | <input type="radio"/> $\sqrt{17}$ | <input type="radio"/> egyik sem | <input type="radio"/> ? |
|-------------------------|------------------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|-------------------------|

## 2. feladat

Melyik lesz a sajátértéke a valós  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$  mátrixnak az alábbiak közül?

## 2. kérdés

### 2. feladat

Melyik lesz a sajátértéke a valós  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$  mátrixnak az alábbiak közül?

### Hint

Főátlóból kivonok  $x$ -et, veszem az így kapott mátrix determinánsát, ami egy polinom, és ezen polinom gyökei a sajátértékek.

### Megoldás

$$\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix} = (1-x)(6-x) - 3 \cdot 2 = x^2 - 7x$$

$$x^2 - 7x = 0 \iff x = 0 \text{ vagy } x = 7$$

## 3. kérdés

(7) Az alábbi

$$A : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xfygz = xgyfxgz \wedge xgyfz = xfzgyfz)$$

$$B : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzfg = xygxzgf \wedge xyfzg = xzgyzgf)$$

$$C : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzgf = xyfxzfg \wedge xygzf = xzfyzfg)$$

formulák közül melyik az, amelyik azt fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az  $f$  kétváltozós művelet disztributív a  $g$  kétváltozós műveletre?

|   |                         |                         |                         |                                 |   |
|---|-------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|---|
| ! | A <input type="radio"/> | B <input type="radio"/> | C <input type="radio"/> | egyik sem <input type="radio"/> | ! |
|---|-------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|---|

## 3. feladat

Az alábbi

$$A : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xfygz = xgyfxgz \wedge xgyfz = xfzgyfz)$$

$$B : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzfg = xygxzgf \wedge xyfzg = xzgyzgf)$$

$$C : (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xyzgf = xyfxzfg \wedge xygzf = xzfyzfg)$$

formulák közül melyik az, amelyik azt fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az  $f$  kétváltozós művelet disztributív a  $g$  kétváltozós műveletre?

### 3. kérdés

#### 3. feladat

Az alábbi

$$A : (\forall x) (\forall y) (\forall z) (xfgz = xgyfxgz \wedge xgyfz = xfgzyfz)$$

$$B : (\forall x) (\forall y) (\forall z) (xyzfg = xygxzgf \wedge xyfzg = xzgyzgf)$$

$$C : (\forall x) (\forall y) (\forall z) (xyzgf = xyfxzfg \wedge xygzf = xzfyzfg)$$

formulák közül melyik az, amelyik azt fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az  $f$  kétváltozós művelet disztributív a  $g$  kétváltozós műveletre?

#### Hint

- MELYIK...?
- Lengyel jelölés = prefix ábrázolás
- Használjunk konkrét  $f$  és  $g$ -t, például szorzás és összeadás.

### 3. kérdés

#### 3. feladat'

Melyik formula fejezi ki **fordított lengyel jelölésben**, hogy az  $f$  kétváltozós művelet disztributív a  $g$  kétváltozós műveletre?

#### Megoldás

- Infix ábrázolás:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$xf(ygz) = (xfy)g(xfz)$$

- Postfix ábrázolás:

$$xyz + \cdot = xy \cdot xz \cdot +$$

$$xyzgf = xyfxzfg$$

- Ez már elég. A válasz a  $C$  formula.



## 4. kérdés

(3) Hány  $\vee$  (diszjunkció jel) van az  $A \rightarrow (B \vee (\neg C))$  teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma!)

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |       |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|---|
| ! | 0 | ○ | 1 | ○ | 2 | ○ | 3 | ○ | 4 | ○ | 5 | ○ | 6 | ○ | 7 | ○ | egyéb | ○ | ! |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|---|

## 4. feladat

Hány  $\vee$  (diszjunkció jel) van az  $A \rightarrow (B \vee (\neg C))$  teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma!)

## 4. kérdés

### 4. feladat

Hány  $\vee$  (diszjunkció jel) van az  $A \rightarrow (B \vee (\neg C))$  teljes diszjunktív normálformájában? (Vigyázat, eggyel kevesebb, mint a diszjunkció tagjainak a száma!)

### Hint

Nem kell felírni a TDNF-et!

### Megoldás

$$A \rightarrow (B \vee (\neg C)) \equiv h$$

$$A \equiv i \text{ ÉS } (B \vee (\neg C)) \equiv h$$

$$A \equiv i \text{ ÉS } B \equiv h \text{ és } \neg C \equiv h$$

$$A \equiv i \text{ ÉS } B \equiv h \text{ és } C \equiv i$$

1 kiértékelésre hamis  $\implies$  7 kiértékelésre igaz  $\implies$  7 diszjunkciós tag  $\implies$  6 darab  $\vee$  jel

## 5. kérdés

(6) Igazak-e az alábbiak:

$\mathbb{R} \times \mathbb{N}$  megszámlálhatóan végtelen.

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$  a legkisebb végtelen számosság.

$|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$ .

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |

## 5. feladat

Igazak-e az alábbiak?

- $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$  megszámlálhatóan végtelen.
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$  a legkisebb végtelen számosság.
- $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$ .

### 5. feladat

Igazak-e az alábbiak?

- $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$  megszámlálhatóan végtelen.
- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$  a legkisebb végtelen számosság.
- $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$ .

### Megoldás

- Hamis:  $|\mathbb{R} \times \mathbb{N}| = \max\{c, \aleph_0\} = c$ .
- Igaz.
- Igaz, az indoklás ugyanaz, mint az elsőnél.

## 6. kérdés

(8) Legyen  $\vec{a} = (3, 2, 0, 1)$ ,  $\vec{b} = (-1, 1, 2, 1)$ ,  $\vec{v} = (12, 3, -6, 0) \in \mathbb{R}^4$ . Írjuk fel a  $\vec{v}$  vektort  $\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$  alakban ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ). Melyik a  $\lambda + \mu$  szám (tehát a két együttható összege) az alábbiak közül?

|   |   |   |   |    |   |    |    |    |       |   |
|---|---|---|---|----|---|----|----|----|-------|---|
| ! | 1 | 2 | 3 | -1 | 0 | -2 | -3 | -5 | egyéb | ! |
|---|---|---|---|----|---|----|----|----|-------|---|

## 6. feladat

Legyen  $\vec{a} = (3, 2, 0, 1)$ ,  $\vec{b} = (-1, 1, 2, 1)$ ,  
 $\vec{v} = (12, 3, -6, 0) \in \mathbb{R}^4$ . Írjuk fel a  $\vec{v}$  vektort  $\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$   
 alakban ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ). Melyik a  $\lambda + \mu$  szám (tehát a két együttható  
 összege) az alábbiak közül?

## 6. kérdés

### 6. feladat

Legyen  $\vec{a} = (3, 2, 0, 1)$ ,  $\vec{b} = (-1, 1, 2, 1)$ ,  $\vec{v} = (12, 3, -6, 0) \in \mathbb{R}^4$ . Írjuk fel a  $\vec{v}$  vektort  $\vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$  alakban ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ). Melyik a  $\lambda + \mu$  szám (tehát a két együttható összege) az alábbiak közül?

### Hint

Standard módszer vs. gondolkozzunk vs. vegyük észre.

### Megoldás

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & | & 12 \\ 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & | & -6 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & | & -6 \\ 3 & -1 & | & 12 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 2 & | & -6 \\ 0 & -4 & | & 12 \end{pmatrix} \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

## 7. kérdés

(8) Legyen  $A := \{0, 1, \dots, 8\}$ ,  $\alpha := \{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\} \subseteq A^2$ ,  $\beta := \alpha^{-1}\alpha$  és  $\gamma := A^2 \setminus \beta$ . Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az  $A$  halmazon definiált  $\gamma$  reláció?

|   |            |                       |                  |                       |          |                       |           |                       |   |
|---|------------|-----------------------|------------------|-----------------------|----------|-----------------------|-----------|-----------------------|---|
| ? | transzítív | <input type="radio"/> | antiszimmetrikus | <input type="radio"/> | dichotom | <input type="radio"/> | egyik sem | <input type="radio"/> | ? |
|---|------------|-----------------------|------------------|-----------------------|----------|-----------------------|-----------|-----------------------|---|

## 7. feladat

Legyen  $A = \{0, 1, \dots, 8\}$ ,  $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\} \subseteq A^2$ ,  $\beta = \alpha^{-1}\alpha$  és  $\gamma = A^2 \setminus \beta$ . Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az  $A$  halmazon definiált  $\gamma$  reláció?

|            |                  |          |           |
|------------|------------------|----------|-----------|
| transzítív | antiszimmetrikus | dichotóm | egyik sem |
|------------|------------------|----------|-----------|

## 7. kérdés

### 7. feladat

Legyen  $A = \{0, 1, \dots, 8\}$ ,  $\alpha = \{(x, y) \in A^2 : |x - y| < 6\} \subseteq A^2$ ,  $\beta = \alpha^{-1}\alpha$  és  $\gamma = A^2 \setminus \beta$ . Az alábbiak közül mely tulajdonságokkal rendelkezik az  $A$  halmazon definiált  $\gamma$  reláció?

|           |                  |          |           |
|-----------|------------------|----------|-----------|
| tranzitív | antiszimmetrikus | dichotóm | egyik sem |
|-----------|------------------|----------|-----------|

### Hint

Legalább az alaphalmaz véges.

### Megoldás

- $\alpha =$  „legfeljebb 5 távolságra vannak”
- $\alpha^{-1} = \alpha$
- $\beta =$  „legfeljebb 10 távolságra vannak”  $= A^2$
- $\gamma = \emptyset$

$\implies \gamma$  tranzitív, antiszimmetrikus, nem dichotóm.



## 8.kérdés

(9) Az  $X$  mátrixról annyit tudunk, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Melyik  $X$  az alábbi mátrixok közül?

|   |                                                  |         |                                                  |         |                                                  |         |                                                    |         |                                                |         |           |         |   |
|---|--------------------------------------------------|---------|--------------------------------------------------|---------|--------------------------------------------------|---------|----------------------------------------------------|---------|------------------------------------------------|---------|-----------|---------|---|
| ! | $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ | $\circ$ | $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ | $\circ$ | $\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ | $\circ$ | $\begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ | $\circ$ | $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ | $\circ$ | egyik sem | $\circ$ | ! |
|---|--------------------------------------------------|---------|--------------------------------------------------|---------|--------------------------------------------------|---------|----------------------------------------------------|---------|------------------------------------------------|---------|-----------|---------|---|

## 8.feladat

Az  $X$  mátrixról annyit tudunk, hogy

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ . Melyik  $X$  az alábbi mátrixok közül?

## 8. kérdés

### 8. feladat

Az  $X$  mátrixról annyit tudunk, hogy

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ . Melyik  $X$  az alábbi mátrixok közül?

### Hint

Találomra el is kezdhethünk behelyettesíteni.

### Megoldás

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 9. kérdés

(1) Legyen  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $\alpha = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \subseteq A^2$  és  $\beta = \{(0, 2)\} \subseteq A^2$ . Melyik az  $\alpha\beta$  reláció az alábbiak közül?

|   |       |                        |             |          |         |           |   |
|---|-------|------------------------|-------------|----------|---------|-----------|---|
| ! | $A^2$ | $A^2 \setminus \alpha$ | $\emptyset$ | $\alpha$ | $\beta$ | egyik sem | ! |
|---|-------|------------------------|-------------|----------|---------|-----------|---|

## 9. feladat

Legyen  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $\alpha = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \subseteq A^2$  és  $\beta = \{(0, 2)\} \subseteq A^2$ . Melyik az  $\alpha\beta$  reláció az alábbiak közül?

|       |                        |             |          |         |           |
|-------|------------------------|-------------|----------|---------|-----------|
| $A^2$ | $A^2 \setminus \alpha$ | $\emptyset$ | $\alpha$ | $\beta$ | egyik sem |
|-------|------------------------|-------------|----------|---------|-----------|

## 9. kérdés

### 9. feladat

Legyen  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $\alpha = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \subseteq A^2$  és  $\beta = \{(0, 2)\} \subseteq A^2$ . Melyik az  $\alpha\beta$  reláció az alábbiak közül?

|       |                        |             |          |         |           |
|-------|------------------------|-------------|----------|---------|-----------|
| $A^2$ | $A^2 \setminus \alpha$ | $\emptyset$ | $\alpha$ | $\beta$ | egyik sem |
|-------|------------------------|-------------|----------|---------|-----------|

### Hint

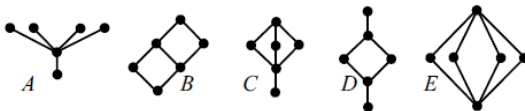
Relációszorzás „=” egymás utáni végrehajtás.

### Megoldás

$\emptyset$

## 10. kérdés

(4) Az alábbi részbenrendezett halmazok közül melyiknek van legkisebb eleme?



|   |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |   |                       |                |                       |   |
|---|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|----------------|-----------------------|---|
| ? | A | <input type="radio"/> | B | <input type="radio"/> | C | <input type="radio"/> | D | <input type="radio"/> | E | <input type="radio"/> | egyiknek sincs | <input type="radio"/> | ? |
|---|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|---|-----------------------|----------------|-----------------------|---|

## 10. feladat

Az alábbi részbenrendezett halmazok közül melyiknek van legkisebb eleme?

## Megoldás

Mindnek van.

## 11. kérdés

(6) Legyen

$$\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \\ x - 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

$$\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 1.$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

|                                              |                                           |                                             |                                                |                          |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\alpha$ szürjektív | <input type="checkbox"/> $\beta$ injektív | <input type="checkbox"/> $\beta$ szürjektív | <input type="checkbox"/> az előzőek egyike sem | <input type="checkbox"/> |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------|

## 11. feladat

Legyen

$$\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \\ x - 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

$$\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 1.$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

|                                                |                                           |                                             |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\alpha$ szürjektív   | <input type="checkbox"/> $\beta$ injektív | <input type="checkbox"/> $\beta$ szürjektív |
| <input type="checkbox"/> az előzőek egyike sem |                                           |                                             |

# 11. kérdés

## 11. feladat

Legyen

$$\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \\ x - 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases},$$

$$\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto x + 1.$$

Az alábbi kijelentések közül ikszeljük be az igazakat.

|                       |                  |                    |
|-----------------------|------------------|--------------------|
| $\alpha$ szürjektív   | $\beta$ injektív | $\beta$ szürjektív |
| az előzőek egyike sem |                  |                    |

## Megoldás

- $\alpha$  szürjektív, mert az  $x$  tetszőleges természetes szám őse (például) az  $x + 1$  szám.
- $\beta$  injektív, mert ha  $x + 1 = y + 1$ , akkor  $x = y$ .
- $\beta$  nem szürjektív, mivel az 1-nek nincs őse.

## 12. kérdés

(7) Legyen  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto (x^2 + 5, x^2 + 1)$ , és  $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(x, y) \mapsto x - y$ . Igazak-e az alábbiak:

„ $\varphi\psi$  szürjektív.”

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

„ $\varphi$  injektív.”

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

„ $\psi$  szürjektív.”

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

## 12. feladat

Legyen  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto (x^2 + 5, x^2 + 1)$ , és  $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(x, y) \mapsto x - y$ . Igazak-e az alábbiak:

- „ $\varphi\psi$  szürjektív.”
- „ $\varphi$  injektív.”
- „ $\psi$  szürjektív.”



## 12. kérdés

### 12. feladat

Legyen  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto (x^2 + 5, x^2 + 1)$ , és  $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(x, y) \mapsto x - y$ . Igazak-e az alábbiak:

- „ $\varphi\psi$  szürjektív.”
- „ $\varphi$  injektív.”
- „ $\psi$  szürjektív.”

### Megoldás

- $\varphi$  injektív, mert „koordinátánként” injektív.
- $\psi$  szürjektív, mert egy negatív  $x$  egész szám őse például a  $(0, |x|)$  számpár, pozitív egész  $x$  esetén az őse például  $(x, 0)$ , és a nullának is végtelen sok őse van.
- $\varphi\psi$  nem szürjektív. Nem létezik olyan  $x \in \mathbb{N}$ , melyre  $x(\varphi\psi) = 0$ .