

3. GYAKORLAT

Kiegészítés a gyakorlat anyagához.

Ismétlés

1. Feladat. Legyen α a következő reláció: $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 2 \mid x^2 + y^2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Milyen tulajdonságok teljesülnek az α relációra?

Megoldás:

1. *Reflexivitás:* Azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x \in \mathbb{Z}$ -re teljesül-e, hogy $(x, x) \in \alpha$, azaz hogy $2 \mid x^2 + x^2$. Ez nyilván teljesül, mert $x^2 + x^2 = 2x^2$, ami nyilván páros, ezért minden valós szám α -relációjában áll egymással.
2. *Szimmetria:* Azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x, y \in \mathbb{Z}$ -re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \alpha$ -ból következik-e feltétel nélkül, hogy $(y, x) \in \alpha$. Ez nyilván teljesül, mert $(x, y) \in \alpha \iff 2 \mid x^2 + y^2 \iff 2 \mid y^2 + x^2 \iff (y, x) \in \alpha$, azaz α szimmetrikus.
3. *Tranzitivitás:* Azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x, y, z \in \mathbb{Z}$ -re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \alpha$ -ból és $(y, z) \in \alpha$ -ból következik-e feltétel nélkül, hogy $(x, z) \in \alpha$. Nézzük meg:
 $(x, y) \in \alpha \iff 2 \mid x^2 + y^2 \iff x^2 + y^2 = 2k \ (k \in \mathbb{Z}) \iff x^2 = 2k - y^2$
 $(y, z) \in \alpha \iff 2 \mid y^2 + z^2 \iff y^2 + z^2 = 2l \ (l \in \mathbb{Z}) \iff z^2 = 2l - y^2$
Behelyettesítünk: $x^2 + z^2 = 2k + 2l - 2y^2 = 2(k + l - y^2) = 2m$, ahol $m \in \mathbb{Z}$.
Így megkaptuk, hogy $2 \mid x^2 + z^2$, azaz $(x, z) \in \alpha$, vagy a reláció tranzitív.
4. Mind a három fenti tulajdonság teljesül, ezért a reláció *ekvivalencia*(reláció).
5. *Antiszimmetria:* Azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x, y \in \mathbb{Z}$ -re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \alpha$ -ból és $(y, x) \in \alpha$ -ból következik-e feltétel nélkül, hogy $x = y$. Rendkívül könnyen tudunk ellenpéldát találni, például $(2, 4) \in \alpha$, $(4, 2) \in \alpha$ és $2 \neq 4$.
6. Mivel az antiszimmetria nem teljesül, így α nem *részenrendezés*, és ezért már *rendezés* sem lehet, de azért nézzük meg az utolsó tulajdonságot is.
7. *Dichotómia:* Most azt kell vizsgálni, hogy BÁRMELY $x, y \in \mathbb{Z}$ -re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$. Nyilván egy páratlan-páros kombináció sem így, sem amúgy nincs benne a relációban, és így megint könnyen találtunk ellenpéldát (egyszerre végtelen sokat is).

Osztályozás

Definíció: Legyen A egy tetszőleges halmaz. Ekkor a $\mathcal{C}$ halmazt osztályozásnak nevezzük, ha

1. $\mathcal{C} \subseteq P(A)$,
2. BÁRMELY $X \in \mathcal{C}$ -re $X \neq \emptyset$,
3. BÁRMELY $X, Y \in \mathcal{C}$ -re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$, és
4. $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$.

$\mathcal{C}$ elemeit osztályoknak nevezzük.

Példa: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{3, 5\}\}$.

$\mathcal{C}$ osztályozás, mert minden A -beli elem szerepel pontosan egy osztályban, és egyik osztály sem üres.

Ekvivalencia - Osztályozás

Tétel: Egy A halmaz feletti $\mathcal{C}$ osztályozás meghatároz egy ekvivalenciát a következő módon:

$$\rho_{\mathcal{C}} = \{(a, b) \in A^2 : \exists X \in \mathcal{C}, \text{ hogy } a, b \in X\}.$$

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az egy osztályban lévő elemek egymással mindenhogyan relációban vannak.

Példa: Az előző példában szereplő osztályozáshoz felírható reláció:

$$\rho_{\mathcal{C}} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (4, 4), (3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}.$$

Tétel: Ha ρ ekvivalencia az A halmazon, akkor az $A/\rho = \{b\rho^* : b \in A\}$ halmaz osztályozás A -n, ahol $b\rho^* = \{c \in A : (b, c) \in \rho\}$.

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy egy relációhoz felírható egy olyan osztályozás, amelyben az egymással relációban lévő elemek ugyanabban az osztályban vannak.

Mire jó ez? Mindig áttérhetünk ekvivalenciáról osztályozásra, illetve osztályozásról ekvivalenciára, és úgy dolgozhatunk, amelyekkel nekünk kényelmesebb.

2. Feladat. Térjünk vissza az Ismétlés c. részben bemutatott α relációra, amiről beláttuk, hogy ekvivalencia. Ekkor nyilván van egy hozzá tartozó osztályozás. Adjuk ezt meg.

Megoldás:

Keressünk egymással relációban álló számokat: $(0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 4), (2, 6), \dots \in \alpha$. Nyilván végtelen sok van, de az azért látszik, hogy a páros számok a páros számokkal relációban vannak, ezért nyilván egy osztályban vannak. Mivel osztályozást keresünk, így a páratlan számokat is kell valahova tennünk. Könnyen rájöhettünk, hogy a páratlan számok relációban állnak a páratlan számokkal, ugyanis páratlan számok négyzete szintén páratlan, és két páratlan szám összege már páros, ezért teljesül a reláció. Így már van két osztályunk, a páros számok, és a páratlan számok osztálya. Most már csak azt kell belátni, hogy páratlan szám nem állhat relációban páros számmal. Ez pedig könnyű, mert páros szám négyzete páros, páratlané páratlan, és egy páros és egy páratlan szám összege páratlan, ami nyilván nem osztható kettővel, így nem teljesülhet a reláció.

Tehát a keresett $\mathcal{C}_\alpha$ osztályozás a következő: $\mathcal{C}_\alpha = \{\{\text{páros egész számok}\}, \{\text{páratlan egész számok}\}\}$.