

10. GYAKORLAT

Mátrixműveletek és inverz.

1. Mátrixműveletek

1. Definíció. Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ és $B = (b_{ij})_{m \times n}$ két T számtest feletti $(m \times n)$ -es mátrix. Ekkor

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} \text{ és } cA = (ca_{ij})_{m \times n}.$$

2. Észrevétel. Csak azonos méretű mátrixokat lehet összeadni.

3. Példa. $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 9 & 2 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ -8 & 10 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \end{pmatrix}, \quad (-2) \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ 6 & -2 & -14 \\ -4 & -4 & -18 \end{pmatrix}$$

4. Definíció. Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ és $B = (b_{ij})_{n \times k}$ két T számtest feletti mátrix. Ekkor

$$AB = \left(\sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj} \right)_{m \times k}.$$

5. Észrevétel. Két mátrix csak akkor szorozható össze, ha az első mátrix oszlopainak száma megegyezik a második mátrix sorainak számával.

6. Észrevétel. AB általában nem egyezik meg BA -val, sőt még lehet, hogy a méretük miatt nincs is értelmezve.

7. Példa. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Az AB mátrix (2×2) -es méretű lesz. A számolást végezzük úgy hogy az A megfelelő sorvektorait szorozzuk össze skalárisan B megfelelő oszlopvektorával. A skaláris szorzás a következőt jelenti:

$$\langle (a, b, c, d), (e, f, g, h) \rangle = ae + bf + cg + dh.$$

Tehát AB megkapható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle (2, -3, 5), (6, 2, -3) \rangle & \langle (2, -3, 5), (-1, -2, 0) \rangle \\ \langle (1, 0, 8), (6, 2, -3) \rangle & \langle (1, 0, 8), (-1, -2, 0) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 - 6 - 15 & -2 + 6 + 0 \\ 6 + 0 - 24 & -1 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -18 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. Példa. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -9 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \\ -5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle (5, 4, -2), (-1, 0, -5) \rangle & \langle (5, 4, -2), (-2, 8, 7) \rangle & \langle (5, 4, -2), (3, 3, 9) \rangle \\ \langle (-9, 4, 6), (-1, 0, -5) \rangle & \langle (-9, 4, 6), (-2, 8, 7) \rangle & \langle (-9, 4, 6), (3, 3, 9) \rangle \\ \langle (3, 1, -2), (-1, 0, -5) \rangle & \langle (3, 1, -2), (-2, 8, 7) \rangle & \langle (3, 1, -2), (3, 3, 9) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 + 0 + 10 & -10 + 32 - 14 & 15 + 12 - 18 \\ 9 + 0 - 30 & 18 + 32 + 42 & -27 + 12 + 54 \\ -3 + 0 + 10 & -6 + 8 - 14 & 9 + 3 - 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -21 & 92 & 39 \\ 7 & -12 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9. Definíció. Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ egy T számtest feletti $(m \times n)$ -es mátrix. Ekkor

$$A^T = (a_{ji})_{n \times m}.$$

10. Példa. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 8 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

11. Tétel. *Műveletek tulajdonságai.*

Legyenek A, B, C egy tetszőleges T test feletti mátrixok, és $c, d \in T$ skalárok. Ekkor

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(c + d)A = cA + dA$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $c(AB) = (cA)B$
- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = c(A^T)$

2. Inverz

2.1. Tétel szerint

12. Tétel. *Tetszőleges $A = (a_{ij})_{n \times n}$ négyzetes mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha $\det(A) \neq 0$. Ha van inverze, akkor pontosan egy van, és erre érvényes az alábbi képlet:*

$$A^{-1} = \frac{(A_{ji})_{n \times n}}{\det(A)}.$$

13. Példa. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$$\det(A) = 3 + 4 - 2 - 4 = 1$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{(1+1)} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2, & A_{12} &= (-1)^{(1+2)} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -(4 - 3) = -1, \\ A_{13} &= (-1)^{(1+3)} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1, & A_{21} &= (-1)^{(2+1)} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -(4 - 4) = 0, \\ A_{22} &= (-1)^{(2+2)} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 0 - 2 = -2, & A_{23} &= (-1)^{(2+3)} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -(0 - 1) = 1, \\ A_{31} &= (-1)^{(3+1)} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1, & A_{32} &= (-1)^{(3+2)} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -(0 - 2) = 2, \\ A_{33} &= (-1)^{(3+3)} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 - 1 = -1. \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2. Gauss-Jordan-elemináció

14. Definíció. Egy adott M mátrix esetén a sorvektorrendszer elemi átalakításain az alábbiakat értjük:

- két sor cseréje,
- egy sor megszorozása egy nemnulla konstanssal,
- egyik sor konstansszorosának hozzáadása egy másik sorhoz.

15. Tétel. *Ha A egy $n \times n$ -es négyzetes mátrix, E pedig az $n \times n$ -es egységmátrix, akkor tekintsük a $B = (A \mid E)$ mátrixot. Az A mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a sorvektorrendszer elemi átalakításainak sorozatával a B mátrix $(E \mid C)$ alakra hozható. Ekkor $A^{-1} = C$.*

16. Példa. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(2)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(1) 1. és 2. sor cseréje.

(2) 3. sorból kivonom az 1.-t.

$$\xrightarrow{(3)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(4)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(5)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

(3) 1. sorból kivonom a 2.-at.

(4) 3. sorból kivonom az 2.-at.

(5) 3. sor megszorozása (-1) -gyel.

$$\xrightarrow{(6)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline -2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{(7)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline -2 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(6) 1. sorból kivonom a 3.-at.

(7) 2. sorhoz hozzáadom a 3. sor (-2) -szeresét.