

11. GYAKORLAT

Lineáris egyenletrendszerek, Gauss-elimináció,
lineáris függetlenség.

1. Lineáris egyenletrendszerek

1. Definíció. Lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer felírható a következő formában is: $A\underline{x} = \underline{b}$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Az egyenletrendszer bővített mátrixa: $\left(A \mid \underline{b} \right)$.

2. Definíció. Egyenletrendszer elemi átalakításai (bővített mátrix elemi átalakításai):

1. Két egyenletet (sort) felcserélünk.
2. Egy egyenletet (sort) megszorozunk egy tetszőleges nemnulla skalárral.
3. Valamelyik egyenlethez (sorhoz) hozzáadjuk egy másik egyenlet (sor) skalárszorosát.
4. Ha az egyik egyenletben minden együtttható és a jobb oldali konstans is nulla, akkor az egyenletet elhagyjuk. (A csupa nulla sort elhagyjuk.)

3. Definíció. Egyenletrendszer bővített mátrixának lépcsős alakja:

1. Nincs csupa nulla sor.
2. Minden sor első nemnulla eleme 1.
3. Minden sor első nemnulla eleme hátrább van, mint a fölötte álló sor első nemnulla eleme.

4. Tétel (Gauss-elimináció). *Bármely nem azonosan nulla bővített mátrixú egyenletrendszer lépcsős alakra hozható.*

5. Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 1 \\ -x + y - 2z &= 1 \\ x - 2y + z &= 2 \\ 2x + 2y - 3z &= 4 \end{aligned} !$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(7)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

(1) : 1. és 3. sor cseréje.

(2) : A 2. sorhoz hozzáadjuk az 1. sort.

(3) : A 3. sorhoz hozzáadjuk az 1. sor (-2)-szeresét. A 4. sorhoz hozzáadjuk az 1. sor (-2)-szeresét.

(4) : A 2. sort megszorozzuk (-1)-gyel.

(5) : A 3. sorhoz hozzáadjuk a 2. sor (-7)-szeresét. A 4. sorhoz hozzáadjuk a 2. sor (-6)-szorosát.

(6) : A 4. sorból levonjuk a 3. sort.

(7) : Elhagyjuk a 4. sort.

Megoldás visszafejtése:

$$1. -11z = 18 \implies z = -\frac{18}{11}$$

$$2. y + z = -3 \implies y - \frac{18}{11} = -3 \implies y = -3 + \frac{18}{11} = -\frac{15}{11}$$

$$3. x - 2y + z = 2 \implies x - 2\left(-\frac{15}{11}\right) + \left(-\frac{18}{11}\right) = 2 \implies x = 2 + \frac{18}{11} - \frac{30}{11} = \frac{10}{11}$$

Megkaptuk az egyenletrendszer egyetlen megoldását.

6. Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rrrrr}
x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\
5x & + & 6y & + & 7z & = & 8 \\
9x & + & 10y & + & 11z & = & 12 \\
13x & + & 14y & + & 15z & = & 16
\end{array} !$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

(1) : Az 1. sor (-5)-szörösét hozzáadom a 2. sorhoz. Az 1. sor (-9)-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz. Az 1. sor (-13)-szorosát hozzáadom a 4. sorhoz.

(2) : A 2. sort elosztom (-4)-gyel. A 3. sort elosztom (-8)-cal. A 4. sort elosztom (-12)-vel.

(3) : A 3. sorból kivonom a 2. sort. A 4. sorból kivonom a 2. sort. Mivel csupa nulla sorokat kapunk, el is hagyjuk azokat.

Megoldás visszafejtése:

$$1. y + 2z = 3 \implies y = 3 - 2z$$

$$2. x + 2y + 3z = 4 \implies x = 4 - 3z - 2y = 4 - 3z - 2(3 - 2z) = 4 - 3z - 6 + 4z = -2 + z$$

Megkaptuk az egyenletrendszer végtelen sok megoldását, mivel a z ismeretlen szabad ismeretlen, azaz értéke tetszőlegesen megválasztható.

7. Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rrrrr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 4x & + & 4y & + & 5z & = & 6 \\ 7x & + & 7y & + & 8z & = & 10 \end{array} !$$

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

(1) : Az 1. sor (-4)-szeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz. Az 1. sor (-7)-szeresét hozzáadjuk a 3. sorhoz.

(2) : A második sort elosztom (-3)-mal.

(3) : A 3. sorhoz hozzáadom a 2. sor 6-szorosát.

Megoldás visszafejtése:

1. $0 = 1 \implies$ Ellentmondás.

Azt kaptuk, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása.

8. Tétel. *Bármely lineáris egyenletrendszernek 0, 1 vagy végtelen sok megoldása van.*

1.1. Lineáris függetlenség

9. Példa. Lineárisan függő-e az alábbi három vektor:

$$a = (-3; 0; 1; 2), \quad b = (-1; 2; 0; 0), \quad c = (-2; -2; 1; 2)?$$

Ez determináns számolással nem dönthető el, tehát definíció szerint meg kell oldani a

$$\lambda_1(-3; 0; 1; 2) + \lambda_2(-1; 2; 0; 0) + \lambda_3(-2; -2; 1; 2) = (0; 0; 0; 0)$$

vektoregyenletet, azaz a

$$\begin{array}{rrrrr} -3\lambda_1 & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszert.

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

(1) : Az 1. és 3. sort megcseréljük.

(2) : Az 1. sor 3-szorosát hozzáadom a 3. sorhoz. Az 1. sor (-2)-szeresét hozzáadom a 4. sorhoz.

(3) : A 2. sort osztom 2-vel. A 3. sort szorzom (-1)-gyel. A 4. csupa nulla sort elhagyom.

(4) : A 4. sorból kivonom a 3. sort. Elhagyom a 4. csupa nulla sort.

Megoldás visszafejtése:

1. $\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \implies \lambda_2 = \lambda_3$

2. $\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \implies \lambda_1 = -\lambda_3$

Megkaptuk az egyenletrendszer végtelen sok megoldását, mivel a λ_3 ismeretlen szabad ismeretlen, azaz értéke tetszőlegesen megválasztható. A vektorrendszer akkor lenne lineárisan független, ha csak a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ megoldás létezne, de mivel λ_3 -at tetszőlegesen választhatjuk, így a vektorrendszer lineárisan függő.

10. Példa. Lineárisan függő-e az alábbi három vektor:

$$a = (-1; 2; 0; 0), \quad b = (-2; -2; 1; 2), \quad c = (1; 2; 1; 2)?$$

Ez determináns számolással nem dönthető el, tehát definíció szerint meg kell oldani a

$$\lambda_1(-1; 2; 0; 0) + \lambda_2(-2; -2; 1; 2) + \lambda_3(1; 2; 1; 2) = (0; 0; 0; 0)$$

vektoregyenletet, azaz a

$$\begin{array}{rrrrrr} -\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Megoldás visszafejtése:

1. $10\lambda_3 = 0 \implies \lambda_3 = 0$
2. $\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \implies \lambda_2 = 0$
3. $\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \implies \lambda_1 = 0$

Megkaptuk az egyenletrendszer egyetlen megoldását. A vektorrendszer lineárisan független, mert csak a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ megoldás létezik, így a vektorrendszer lineárisan független.