

9,5. GYAKORLAT

A determináns kiszámításának különböző módjai
példákon keresztül.

A determináns rendkívül fontos a lineáris algebrában, így egy determináns kiszámítása mindenkinek rutinfeladatnak kell, hogy legyen!

1. Sarrus-szabály

Egy (2×2) -es mátrix determinánsának kiszámítására, maga a Sarrus-szabály a definíció:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (\text{főátló elemeinek szorzata}) - (\text{mellékátló elemeinek szorzata}) \\ = ad - bc.$$

A (3×3) -as mátrix determinánsa hasonlóan számítható, egy kis kis eltéréssel. Itt nem csak a főátlóval, és a mellékátlóval kell számolni, hanem a velük párhuzamos „átlókkal” is. Segítség képpen a determináns után odaírhatjuk az első két oszlopát, hogy jobban lássuk a párhuzamosságot:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} \searrow & & \searrow \\ & \searrow & \\ & & \searrow \end{matrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} & \swarrow & \\ & & \swarrow \\ & \swarrow & \end{matrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}.$$

A determináns a következőképp áll össze. A főátlóban és a vele párhuzamos átlókban lévő elemek szorzatát adjuk össze, és ebből vonjuk ki a mellékátlóban, és a vele párhuzamos átlóban lévő elemek szorzatát. Tehát a következőt kell csinálni:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Nézzük meg ezt egy konkrét példán keresztül:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 \cdot (-5) \cdot 1) + (2 \cdot 1 \cdot (-8)) + ((-4) \cdot (-2) \cdot 2) \\ - ((-4) \cdot (-5) \cdot (-8)) - (2 \cdot (-2) \cdot 1) - (3 \cdot 1 \cdot 2) \\ = -15 - 16 + 16 + 160 + 4 - 6 = 143$$

1. *Észrevétel.* Maga a számolási algoritmus nem bonyolult, de ennél a módszernél viszonylag nagy az elszámolás veszélye.
2. *Észrevétel.* Ez a módszer csak (2×2) -es és (3×3) -as determinánsok kiszámolására használható, nagyobb méretre nem működik.

2. Sor/oszlop szerinti kifejtés (Kifejtési tétel)

Emlékezzünk arra, hogy sor/oszlop szerinti kifejtésnél gondolnunk kell a mátrixhoz tartozó „sakktáblára”, ami előjeleket tartalmaz, felváltva, a bal felső sarok mindig „+”, és ettől váltakozik az előjel jobbra és lefelé:

+	-	+	...
-	+	-	...
+	-	+	...
⋮	⋮	⋮	⋱

Kiválasztjuk a determináns tetszőleges sorát vagy oszlopát, ami szerint a kifejtést el akarjuk végezni. Legyen ez először például az **első oszlop**. A determináns értéke a következőképpen adódik: a kiválasztott sor elemeit megszorozzuk a sakktáblában neki megfelelő előjellel, majd megszorozzuk annak a maradék determinánsnak az értékével, amit úgy kapunk, hogy az eredeti determinánsból töröljük az elem sorát és oszlopát. A példán rögtön látszik, hogy mit kell csinálni:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-8) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

A módszer lényege, hogy egy $(n \times n)$ méretű determinánst vissza tudunk vezetni $(n-1) \times (n-1)$ -es determinánsokra. Folytassuk az (1) egyenlőséget, mivel a (2×2) -es determinánsok értéke már könnye számolható:

$$\begin{aligned} (1) &= 3 \cdot ((-5) \cdot 1 - 1 \cdot 2) + 2 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot 2) - 8 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot (-5)) \\ &= 3 \cdot (-7) + 2 \cdot 10 - 8 \cdot (-18) = -21 + 20 + 144 = 143. \end{aligned}$$

Gyakorlás képpen végezzük el a determináns kifejtését a **második sora** szerint is:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot 2) - 5 \cdot (3 \cdot 1 - (-4) \cdot (-8)) - 1 \cdot (3 \cdot 2 - 2 \cdot (-8)) \\ &= 2 \cdot 10 - 5 \cdot (-29) - 1 \cdot 22 = 20 + 145 - 22 = 143. \end{aligned}$$

3. *Észrevétel.* Ez a módszer tetszőleges méretű determinánsokra is működik, szemben a Sarrus-szabállyal, ami csak (2×2) -es és (3×3) -as mátrixokra alkalmazható.

4. *Észrevétel.* Ha van a mátrix elemei között nulla, akkor érdemes lehet olyan sort, vagy oszlopot választani a kifejtéshez, amiben minél több nulla van.

5. *Észrevétel.* Dolgozatokban érdemes ezt alkalmazni, mert elszámolási hiba esetén még esetleg lehet részpontot adni, míg a Sarrus-szabálynál ez kevésbé lehetséges.

3. Elemi átalakítások

6. *Észrevétel.* Ez a módszer talán a leggyorsabb, viszont koránt sem olyan algoritmikus, mint az előző kettő. Csak azoknak ajánlom megtanulni, akik biztosak abban, hogy ez a módszer nem fogja összezavarni az eddig megtanultakat.

Tétel. *Determinánsokra vonatkozó alapvető tulajdonságok.*

1. A determináns előjelet vált, ha két sorát megcseréljük.
2. Ha a determináns valamelyik sora nulla, akkor a determináns értéke nulla.
3. A determináns értéke nulla, van van két azonos sora.
4. Ha a determináns egy sorában minden elemet ugyanazzal a konstanssal megszorunk, vagy elosztunk, akkor a determináns értéke is ezzel a konstanssal szorozódik, vagy osztódik.
5. A determináns nulla, ha az egyik sora egy másik sor valamely konstans-szorosa.
6. A determináns értéke nem változik, ha valamelyik sorhoz hozzáadjuk egy másik sor konstans-szorosát.
7. Dualitási elv: az 1. – 6. állításokban a „sor” szó kicserélhető az „oszlop” szóra.

Ezekkel a műveletekkel gyorsan ki tudjuk számítani a determinánst, mert megtudjuk növelni a determinánsban szereplő nullák számát.

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{(1)} \left| \begin{array}{ccc} 3 & 2 & -4 \\ 6 & -7 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{(2)} \left| \begin{array}{ccc} -29 & 10 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \end{array} \right| \\ \xrightarrow{(3)} 1 \cdot \left| \begin{array}{cc} -29 & 10 \\ 6 & -7 \end{array} \right| \xrightarrow{(4)} (-7) \cdot (-29) - 6 \cdot 10 = 143. \end{array}$$

- (1) : A 2. sorhoz hozzáadtam a 3. sor (-1) -szeresét, azaz alkalmaztam a Tétel 6. állítását.
- (2) : Az 1. sorhoz hozzáadtam a 3. sor 4-szeresét, azaz alkalmaztam a Tétel 6. állítását.
- (3) : Kifejtettem a determináns a 3. oszlopa szerint.
- (4) : Sarrus-szabállyal megkaptam a végső eredményt.

7. *Észrevétel.* Még egyszer hangsúlyozom, hogy nem kell ezt a módszert alkalmazni, mert kis mátrixok esetében a Sarrus-szabály sokkal gyorsabb, a kifejtéses módszert pedig könnyebb ellenőrizni.

4. Kiegészítés

- Wolfram Alpha / Wolfram Mathematica: `Det[{{3, 2, -4},{-2, -5, 1},{-8, 2, 1}}]`
- Maple: `LinearAlgebra[Determinant](Matrix([[3,2,-4],[-2,-5,1],[-8,2,1]]))`;
- Matlab: `det([3 2 -4;-2 -5 1;-8 2 1])`
- Matek.hu