

9. GYAKORLAT

Predikátumkalkulus. Determinánsok.

1. Feladat. Formalizálja az alábbi predikátumkalkulusbeli ítéleteket a megadott individuumtartomány és predikátumjelek segítségével!

- „Van olyan torony, ami nem függőleges.”
 $U = \{\text{épületek}\}, T(x) : „x \text{ torony}”, F(x) : „x \text{ függőleges}”$
- „Nem mind arany, ami fénylik.”
 $U = \{\text{tárgyak}\}, A(x) : „x \text{ arany}”, F(x) : „x \text{ fénylik}”$
- „Minden anya nő, de nem minden nő anya.”
 $U = \{\text{emberek}\}, A(x) : „x \text{ anya}”, N(x) : „x \text{ nő}”$
- „Ki korán kel, aranyat lel.”
 $U = \{\text{emberek}\}, A(x) : „x \text{ aranyat lel}”, K(x) : „x \text{ korán kel}”$
- „Aki a kicsit nem becsüli, a nagyot nem érdemli.”
 $U = \{\text{emberek}\}, K(x) : „x \text{ megbecsüli a kicsit}”, M(x) : „x \text{ megérdemli a nagyot}”$
- „Nincsen rózsza tövis nélkül.”
 $U = \{\text{rózsák}\}, T(x) : „x\text{-nek van tövise}”$
 $U = \{\text{növények}\}, T(x) : „x\text{-nek van tövise}”, R(x) : „x \text{ rózsza}”$
- „Néhány hallgatónak nincs barátja.”
 $U = \{\text{emberek}\}, H(x) : „x \text{ hallgató}”, B(x, y) : „x \text{ az } y \text{ barátja}”$
- „Ha nem csak János becsületes, akkor mindenki becsületes.”
 $U = \{\text{emberek}\}, j : „János”, E(x, y) : „x \text{ és } y \text{ ugyanaz a személy}”, B(x) : „x \text{ becsületes}”$

2. Feladat. Formalizálja az alábbi predikátumkalkulusbeli ítéleteket úgy, hogy az individuumtartományt és a predikátumjeleket is adja meg!

- „Mindenkinek két szülője van.”
- „Ha egy szakács éhes, akkor főz magának.”
- „Van olyan ember, aki főz, de nem szakács.”
- „Vannak szerencsés milliomosok.”
- „Néhány hallgató megbukik Kalkulusból.”
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

3. Feladat. Határozza meg a következő formulák tagadásának azt az alakját, amelyben legfeljebb predikátumot tagadunk! („Vigyünk a $\neg$ jelet annyira hátra, amennyire csak lehet.”)

- $(\forall x) (B(x) \rightarrow J(x))$
- $(\exists x) (J(x) \wedge K(x))$
- $(\exists x) (B(x) \wedge (\exists y) (T(x, y)))$
- $(\forall x) ((B(x) \wedge (\exists y) T(x, y)) \rightarrow B(y))$
- $(\exists x) (T(x) \wedge \neg Z(x))$
- $(\forall x) (\exists y) (\neg A(x) \wedge \neg B(y))$
- $(\exists x) (\exists y) (D(x, y) \rightarrow (x = y))$

4. Feladat. Tautológiák-e az alábbi formulák?

1. $\neg (\forall x) (\exists y) B(x, y) \leftrightarrow (\exists x) (\forall y) (\neg B(x, y))$
2. $(\forall x) (\exists y) B(x, y) \leftrightarrow (\forall y) (\exists x) (B(y, x))$
3. $((\exists x) B(x) \wedge (\exists y) C(y)) \rightarrow (\exists x) (B(x) \wedge C(x))$

Megoldás:

1. Igen, mivel a jobb oldal logikailag ekvivalens a bal oldallal, csak a formális tagadás miatt más alakban vannak felírva.
2. A kvantorok után álló individuumváltozók a $\leftrightarrow$ jel két oldalán megfordíthatók, mert mindegyik kvantor szerepköre csak a $\leftrightarrow$ adott oldalára terjed ki. Így a $\leftrightarrow$ két oldalán megint két ekvivalens formula áll, tehát ez is tautológia.
3. Nem, mert abból, hogy van a csoportban egy szőke és egy tőle esetleg különböző kék szemű hallgató, még nem következik van szőke kék szemű hallgató is. (Ha a két oldal fordítva lenne, akkor tautológia lenne.)

5. Feladat. Határozza meg az alábbi determinánsok értékét!

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 9 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \\ -7 & -8 & 3 \end{vmatrix}$

6. Feladat. Oldja meg a következő egyenleteket!

1. $\begin{vmatrix} 3 & x \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$
2. $\begin{vmatrix} x & 4 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = 3$
3. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & x \\ -3 & -8 & 2 \end{vmatrix} = 14$
4. $\begin{vmatrix} x & 1 & 5 \\ -3 & 9 & 1 \\ 4 & x & -2 \end{vmatrix} = 0$
5. $\begin{vmatrix} x-3 & -1 & 4 \\ -4 & 3 & -1 \\ 0 & 6-x & -2 \end{vmatrix} = 0$

7. Feladat. Számolja ki az alábbi helyvektorok által kifeszített paralelogrammák és paralelepipedonok területét és térfogatát!

1. $v_1 = (4; 6), v_2 = (-5; 9)$
2. $v_1 = (-3; 0), v_2 = (11; 4)$
3. $v_1 = (2; 0; -4), v_2 = (1; 6; -9) v_3 = (3; -7; -2)$
4. $v_1 = (-6; 2; 3), v_2 = (0; -8; -2) v_3 = (1; 1; 7)$