

5. GYAKORLAT

Komplex számok.

Elméleti összefoglaló

Legyen $z \in \mathbb{C}$, $z = (a, b)$ egy komplex szám.

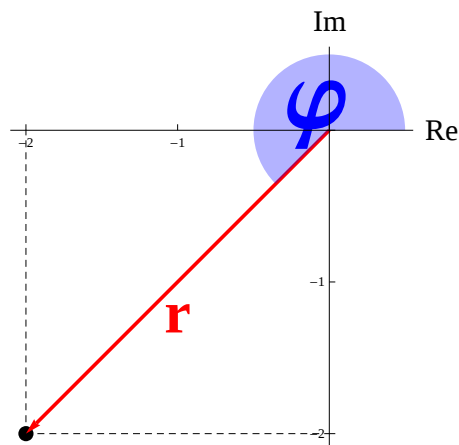
Ekkor a z **kanonikus alakja** a következő:

$$z = a + b \cdot i.$$

A z komplex szám **trigonometrikus alakja**:

$$z = r (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)),$$

ahol $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, és $\varphi = \arccos\left(\frac{a}{r}\right) = \arcsin\left(\frac{b}{r}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.



A továbbiakban legyenek z_1 és z_2 a következő alakú komplex számok:

$$z_1 = a + bi, \quad z_2 = c + di.$$

- **Összeadás:** $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
- **Ellentett:** $-z_1 = -a - bi$.
- **Kivonás:** $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a - c) + (b - d)i$.
- **Szorzás:** $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- **Konjugált:** $\overline{z_1} = a - bi$.
- **Abszolútérték:** $|z_1| = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- **Osztás:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

Példa

$$z_1 = (1, -1), \quad z_2 = (-4, 5)$$

- **Kanonikus alak:** $z_1 = 1 - i, \quad z_2 = -4 + 5i$.
- **Trigonometrikus alak:** $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$.
- **Műveletek:**

Összeadás: $z_1 + z_2 = (1 - 4) + (-1 + 5)i = -3 + 4i$.

Ellentett: $-z_2 = 4 - 5i$.

Kivonás: $z_2 - z_1 = (-4 - 1) + (5 - (-1))i = -5 + 6i$.

Szorzás: $z_1 z_2 = (1 - i)(-4 + 5i) = -4 + 5i + 4i + 5 = 1 + 9i$.

Konjugált: $\overline{z_1} = 1 + i$.

Abszolútérték: $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Osztás: $\frac{z_2}{z_1} = \frac{-4+5i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-4-4i+5i-5}{1^2-i^2} = \frac{-9+i}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}i$.

Feladatok

1. Feladat. Írj fel magadtól komplex számokat, és maceráld őket a tanult műveletekkel! Ellenőrzésként használhatod a honlapomra felrakott Wolfram Alphát, ahova egyszerűen be kell írni a kanonikus alakot, és közé a műveleteket. Érdekes a kanonikus alakokat zárójelbe tenni, például itt egy input sor:

$$(2+9*i)*(4-10*i)$$

2. Feladat. További gyakorló feladatok találhatók természetesen a régebbi vizsgákban, illetve a Kátai-Urbán Kamilla honlapjáról elérhető feladatsorokban.