

## 4. GYAKORLAT

Részbenrendezés, Hasse-diagram;  
leképezések tulajdonságai.

### Elméleti összefoglaló

A továbbiakban legyen  $A$  és  $B$  két halmaz, és vezessük be a következő definíciókat.

**RELÁCIÓ:**  $A \times A$  részhalmazai, azaz  $\alpha$  reláció, ha  $\alpha \subseteq A \times A (= A^2)$ .

**MEGFELELTETÉS:**  $A \times B$  részhalmazai, azaz  $\alpha$  megfeleltetés, ha  $\alpha \subseteq A \times B$ .

**LEKÉPEZÉS:** az  $\alpha \subseteq A \times B$  megfeleltetést akkor nevezzük leképezésnek, ha BÁRMELY  $a \in A$ -ra LÉTEZIK **pontosan egy** olyan  $b \in B$ , amelyre  $(a, b) \in \alpha$ .

A továbbiakban az  $f : A \rightarrow B$  leképezés legyen rögzített, és definiáljuk a leképezések tulajdonságait:

1.  $f$  **INJEKTÍV**, ha BÁRMELY  $a_1, a_2 \in A$ -ra teljesül, hogy ha  $a_1 f = a_2 f$ , akkor  $a_1 = a_2$ .

Más szóval: különböző elemek képe különböző.

Például, legyen  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto |n - 3| + 1$  egy leképezés. Vizsgáljuk meg, hogy injektív-e: tegyük fel, hogy  $|n - 3| + 1 = |m - 3| + 1$ . Ez ekvivalens azzal, hogy  $|n - 3| = |m - 3|$ , vagyis  $n - 3 = \pm(m - 3)$ . Két eset van:  $n - 3 = m - 3$ , vagy  $n - 3 = 3 - m$ . Az első esetben azt kapjuk, hogy  $n = m$ , és ezt kell kapnunk, ahhoz hogy injektív legyen, de meg kell vizsgálni a másik esetet is. A második eset azzal ekvivalens, hogy  $n + m = 6$ , azaz  $m = 6 - n$ . Ez azt jelenti, hogy  $g(n) = g(6 - n)$ , természetesen csak akkor, ha  $6 - n \in \mathbb{N}$ . De van olyan (elégg) kicsi  $n \in \mathbb{N}$ , amelyre még  $6 - n \in \mathbb{N}$ , például  $n = 5$ . Ekkor azt kaptuk, hogy  $g(5) = g(1)$ , viszont  $5 \neq 1$ , tehát a  $g$  leképezés NEM injektív.

1. *Megjegyzés:* ha már egy ELLENPÉLDÁT találunk, akkor a tulajdonság meg van löve.

2. *Megjegyzés:* ábrázolás + vízszintes vonal teszt..

2.  $f$  **SZÜRJEKTÍV**, ha BÁRMELY  $b \in B$ -hez LÉTEZIK olyan  $a \in A$ , amelyre  $f(a) = b$ .

Más szóval: minden  $B$ -beli elemnek van őse  $A$ -ban.

Példaképp vizsgáljuk az előbbi  $g$  leképezést. Rögzítünk egy tetszőleges  $y \in \mathbb{N}$  számot, és keresünk hozzá egy megfelelő  $n \in \mathbb{N}$  számot, amelyre  $g(n) = y$ . Keressük az  $n$  számot a következő egyenlet megoldásaként:  $|n - 3| + 1 = y$ . Ez azzal ekvivalens, hogy  $|n - 3| = y - 1$ . Nekünk nem az összes olyan szám kell, aminek a képe  $y$ , elég csak egyet találnunk, ezért elhagyhatjuk az abszolútérték jelet. Ekkor azt kapjuk, hogy  $n - 3 = y - 1$ , azaz  $n = y + 2$ . Mit kaptunk? Azt hogy BÁRMELY  $y \in \mathbb{N}$  számra teljesül, hogy  $g(y + 2) = y$ . Tehát minden  $y$ -hoz található ő, ezért a leképezés szürjektív.

3. *Megjegyzés:* lásd 2. Megjegyzés.

3.  $f$  **BIJEKTÍV**, ha injektív ÉS szürjektív.

A fenti  $g$  leképezés nyilván NEM bijektív, mivel nem injektív.

## Feladatok

**1. Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy a következő relációk részbenrendezések-e (esetleg rendezések-e)?

- $\alpha = \{(a, b) : a \leq b\} \subseteq \mathbb{N}^2$
- $\beta = \{(a, b) : a^2 \leq b^2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- $\gamma = \{(a, b) : a^2 + 2b \leq b^2 + 2a\} \subseteq \mathbb{N}^2$
- Ez a típusú feladat tulajdonképpen az előző óra anyaga, tehát az előző feladasorban is találhatók hasonló feladatok.

**2. Feladat.** Adja meg a következő részben rendezett halmazok  $[(A, \leq)]$  Hasse-diagramját! Keresse meg a maximális, minimális, legnagyobb és legkisebb elemeket!

- $(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{3, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 2, 3\}\}, \subseteq)$
- $(\{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}, |)$
- $(\{48 \text{ pozitív osztói}\}, |)$
- $(\{1, 3, 4, 6, 9\}, \leq)$

**3. Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezéseknek milyen tulajdonságai vannak! Ha a leképezés bijektív, adjuk meg az inverzét is (mivel tudjuk, hogy ilyenkor létezik)!

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - |x|$
- $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n \text{ pozitív osztóinak száma}$
- $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, xh = (x + 2)^2 - 4$
- $\alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0, (x, y) \mapsto |x - y|$
- $\beta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2, (x, y) \mapsto (x^2, -y)$
- A harmadik teszten egy leképezésnek csak egy tulajdonságára kérdezzünk rá, viszont gyakorlásképp az összes többi is megadható.
- További gyakorló feladatok találhatók természetesen a régebbi vizsgákban, illetve a Kátai-Urbán Kamilla honlapjáról elérhető feladatsorokban.