

Név:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ
3	2	3	3	3	14

Diszkrét matematika I. gyak.

2. ZH

2010. december 9.

K csoport

-
1. (3 pont) Lineárisan független-e az alábbi $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ vektorrendszer:

$$\underline{u} = (5; 1; -1), \quad \underline{v} = (-2; -3; 1), \quad \underline{w} = (6; -4; 0)?$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} \\ = -(8 + 18) - (-20 - 6) = -26 + 26 = 0.$$

A determináns nulla, ezért a három vektor lineárisan függő.

-
2. (2 pont) Az alábbi (a)-(i) formulák közül melyik formalizálja az alábbi predikátumkalkulusbeli állítást:

„Minden politikus hazudik.”

Individuumtartomány: $U = \{\text{emberek}\}$.

Predikátumjelek: $P(x)$: „ x politikus”, $H(x)$: „ x hazudik”.

Az (a)-(i) formulák közül melyek ekvivalensek a formula **negáltjával**?

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $(\forall x) (P(x) \wedge H(x))$ | (d) $(\exists x) (\neg P(x) \rightarrow H(x))$ | (g) $(\forall x) (P(x) \rightarrow H(x))$ |
| (b) $(\exists x) (P(x) \wedge \neg H(x))$ | (e) $(\forall x) (\neg P(x) \rightarrow \neg H(x))$ | (h) $(\exists x) (H(x) \rightarrow P(x))$ |
| (c) $(\forall x) \neg (P(x) \rightarrow H(x))$ | (f) $(\exists x) \neg (P(x) \rightarrow H(x))$ | (i) $(\exists x) (\neg H(x) \rightarrow \neg P(x))$ |

Megoldás:

- $(\forall x) (P(x) \rightarrow H(x)) \equiv (g)$
 - $\neg (\forall x) (P(x) \rightarrow H(x)) \equiv (\exists x) \neg (P(x) \rightarrow H(x)) \equiv (f)$
 $\equiv (\exists x) (P(x) \wedge \neg H(x)) \equiv (b)$
-

3. (3 pont) Végezze el az

$$AC, \quad AB + C^{-1}, \quad 2(B^{-1}) - C^T$$

mátrixműveletek közül azokat, amelyek elvégezhetőek, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}!$$

Ha valamelyik nem végezhető el, akkor azt is jelölje valahogy, például húzza át, vagy inkább külön írja le!

Megoldás:

•

$$A = A_{3 \times 2}, C = C_{2 \times 2} \implies$$

$$\begin{aligned} AC = AC_{3 \times 2} &= \begin{pmatrix} \langle (1; 1), (0; 1) \rangle & \langle (1; 1), (5; 3) \rangle \\ \langle (0; 2), (0; 1) \rangle & \langle (0; 2), (5; 3) \rangle \\ \langle (3; -4), (0; 1) \rangle & \langle (3; -4), (5; 3) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad A = A_{3 \times 2}, B = B_{2 \times 2} \implies AB = AB_{3 \times 2}$$

$$C = C_{2 \times 2} \implies C^{-1} = C_{2 \times 2}^{-1}$$

A méreteltérés miatt az összeadás nincs értelmezve.

$$\bullet \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \implies 2(B^{-1}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2(B^{-1}) - C^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. (3 pont) Határozza meg a $(-7; -2; 6)$ és $(-3; 1; 8)$ térbeli vektorok vektoriális szorzatát!

Megoldás:

$$\begin{aligned} (-7; -2; 6) \times (-3; 1; 8) &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -7 & -2 & 6 \\ -3 & 1 & 8 \end{vmatrix} \\ &= \underline{i} \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} -7 & 6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \underline{i}(-16 - 6) - \underline{j}(-56 + 18) + \underline{k}(-7 - 6) \\ &= -22\underline{i} + 38\underline{j} - 13\underline{k} = (-22; 38; -13) \end{aligned}$$

5. (3 pont) Adott a térben három helyvektor:

$$\underline{a} = (-1; -3; 7), \quad \underline{b} = (-2; 9; -5), \quad \underline{c} = (-1; 10; 2).$$

Mekkora annak a paralelepipedonnak a térfogata, amelynek egyik csúcsa az origó és az ebből kiinduló oldalvektorai pedig $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$?

Megoldás:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & -3 & 7 \\ -2 & 9 & -5 \\ -1 & 10 & 2 \end{vmatrix} &= 3 \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 3(-4 - 5) + 9(-2 + 7) - 10(5 + 14) \\ &= -27 + 45 - 190 = -172 \end{aligned}$$

Ebből a térfogat: $V_{\text{paralelepipedon}} = |-172| = 172$.

Név:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ
3	2	3	3	3	14

Diszkrét matematika I. gyak.

2. ZH

2010. december 9.

L csoport

-
1. (3 pont) Határozza meg a $(2; -7; -8)$ és $(1; -2; 4)$ térbeli vektorok vektoriális szorzatát!

Megoldás:

$$\begin{aligned}(2, -7, -8) \times (1, -2, 4) &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -7 & -8 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= \underline{i} \begin{vmatrix} -7 & -8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \underline{i}(-28 - 16) - \underline{j}(8 + 8) + \underline{k}(-4 + 7) \\ &= -44\underline{i} - 16\underline{j} + 3\underline{k} = (-44; -16; 3)\end{aligned}$$

-
2. (2 pont) Az alábbi (a)-(i) formulák közül melyik formalizálja az alábbi predikátumkalkulusbeli állítást:

„Minden bíró korrupt.”

Individuumtartomány: $U = \{\text{emberek}\}$.

Predikátumjelek: $B(x)$: „ x bíró”, $K(x)$: „ x korrupt”.

Az (a)-(i) formulák közül melyek ekvivalensek a formula **negáltjával**?

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $(\exists x) \neg (B(x) \rightarrow K(x))$ | (d) $(\forall x) (B(x) \wedge K(x))$ | (g) $(\exists x) (\neg B(x) \rightarrow K(x))$ |
| (b) $(\exists x) (K(x) \rightarrow B(x))$ | (e) $(\exists x) (\neg K(x) \rightarrow \neg B(x))$ | (h) $(\forall x) (B(x) \rightarrow K(x))$ |
| (c) $(\forall x) (\neg B(x) \rightarrow \neg K(x))$ | (f) $(\forall x) \neg (B(x) \rightarrow K(x))$ | (i) $(\exists x) (B(x) \wedge \neg K(x))$ |

Megoldás:

- $(\forall x) (B(x) \rightarrow K(x)) \equiv (h)$
 - $\neg (\forall x) (B(x) \rightarrow K(x)) \equiv (\exists x) \neg (B(x) \rightarrow K(x)) \equiv (a)$
 $\equiv (\exists x) (B(x) \wedge \neg K(x)) \equiv (i)$
-

3. (3 pont) Adott a térben három helyvektor:

$$\underline{a} = (-1; -2; 6), \quad \underline{b} = (2; -3; 1), \quad \underline{c} = (-8; -5; 3).$$

Mekkora annak a paralelepipedonnak a térfogata, amelynek egyik csúcsa az origó és az ebből kiinduló oldalvektorai pedig $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$?

Megoldás:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & -5 & 3 \end{vmatrix} &= -8 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= -8(-2 + 18) + 5(-1 - 12) + 3(3 + 4) \\ &= -128 - 65 + 21 = -172 \end{aligned}$$

Ebből a térfogat: $V_{\text{paralelepipedon}} = |-172| = 172$.

4. (3 pont) Végezze el a

$$3(A^{-1}) - C^T, \quad AB, \quad AC + B^T$$

mátrixműveletek közül azokat, amelyek elvégezhetőek, ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}!$$

Ha valamelyik nem végezhető el, akkor azt is jelölje valahogy, például húzza át, vagy inkább külön írja le!

Megoldás:

- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \implies 3(A^{-1}) = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3(A^{-1}) - C^T = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$$

-

$$A = A_{2 \times 2}, B = B_{2 \times 3} \implies$$

$$\begin{aligned} AB = AB_{2 \times 3} &= \begin{pmatrix} \langle (2; -1), (1; 0) \rangle & \langle (2; -1), (1; 2) \rangle & \langle (2; -1), (-4; 3) \rangle \\ \langle (-5; 3), (1; 0) \rangle & \langle (-5; 3), (1; 2) \rangle & \langle (-5; 3), (-4; 3) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -11 \\ -5 & 1 & 29 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $A = A_{2 \times 2}, C = C_{2 \times 2} \implies AC = AC_{2 \times 2}$

$$B = B_{2 \times 3} \implies B^T = B_{3 \times 2}^T$$

A méreteltérés miatt az összeadás nincs értelmezve.

5. (3 pont) Lineárisan független-e az alábbi $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ vektorrendszer:

$$\underline{u} = (6; -1; 2), \quad \underline{v} = (0; 2; 1), \quad \underline{w} = (-5; -2; -3)?$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -3 \end{vmatrix} &= 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 6(-6 + 2) - 5(-1 - 4) = -24 + 25 = 1. \end{aligned}$$

A determináns 1, ezért a három vektor lineárisan független.
