

1.	2.	3.	4.	5.	Σ
2	3	3	3	3	14

Diszkrét matematika I. gyak.

1. ZH

2010. október 14.

E csoport

-
1. (2 pont) Legyen $A = \{\{\emptyset\}, \{0\}, 0, \{1\}\}$ és $B = P(\{1, 0\})$ két halmaz. Határozza meg a $B \setminus A$ halmaz elemeit!

Megoldás:

$$A = \{\{\emptyset\}, \{0\}, 0, \{1\}\}$$

$$B = \{\emptyset, \{1\}, \{0\}, \{1, 0\}\}$$

$$B \setminus A = \{\emptyset, \{1, 0\}\}$$

2. (3 pont) Legyen adott a következő három komplex szám:

$$z_1 = 4 - 2i, \quad z_2 = -5 - 3i, \quad z_3 = (2, 1).$$

Határozza meg a következő komplex számot kanonikus alakban:

$$\frac{z_1 \cdot (-z_2)}{\overline{z_3}}.$$

Megoldás:

$$-z_2 = 5 + 3i$$

$$z_1(-z_2) = (4 - 2i)(5 + 3i) = 20 + 12i - 10i - 6i^2 = 20 + 2i + 6 = 26 + 2i$$

$$\overline{z_3} = (2, -1) = 2 - i$$

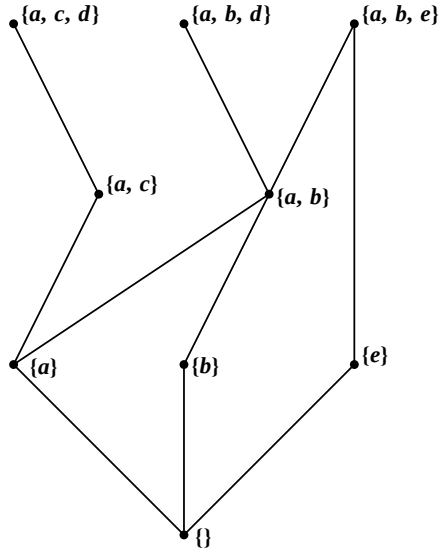
$$\frac{z_1(-z_2)}{\overline{z_3}} = \frac{26+2i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{52+26i+4i-2}{2^2-i^2} = \frac{50+30i}{5} = 10 + 6i$$

3. (3 pont) Legyen adott az

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagrammját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeket!

Megoldás:



- Maximális elemek:
 $\{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}$.
- Minimális elem: $\emptyset$.
- Legnagyobb elem: NINCS.
- Legkisebb elem: $\emptyset$.

4. (3 pont) Legyen adott a

$$\beta = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : 2 \mid 3a - b\} \subseteq \mathbb{Z}^2$$

reláció. Vizsgálja meg, hogy a β relációra az alábbiak közül mely tulajdonságok teljesülnek! Válaszait mindhárom esetben indokolja!

- dichotóm

Megoldás: Azt kell vizsgálni, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül-e, hogy $(a, b) \in \beta$ vagy $(b, a) \in \beta$. Nyilván NEM DICHOTÓM, könnyen találunk ellenpéldát: sem $(0, 1) \in \beta$ sem pedig $(1, 0) \in \beta$ nem teljesül.

- reflexív

Megoldás: Azt kell vizsgálni, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül-e, hogy $(a, a) \in \beta$. Nézzük meg! Legyen $a \in \mathbb{Z}$ tetszőleges: $(a, a) \in \beta \iff 2 \mid 3a - a \iff 2 \mid 2a$. Ez utóbbi nyilván teljesül, amiből a „visszafele” nyilak miatt következik, hogy $(a, a) \in \beta$, azaz β REFLEXÍV.

- tranzitív

Megoldás: Azt kell vizsgálni, hogy tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül-e, hogy $(a, b), (b, c) \in \beta$ -ből következik $(a, c) \in \beta$. Nézzük meg! Legyen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tetszőleges, melyekre $(a, b), (b, c) \in \beta$. Ekkor

$$(a, b) \in \beta \iff 2 \mid 3a - b \iff \exists k \in \mathbb{Z} : 2k = 3a - b \iff 3a = 2k + b \text{ és}$$

$$(b, c) \in \beta \iff 2 \mid 3b - c \iff \exists l \in \mathbb{Z} : 2l = 3b - c \iff c = 3b - 2l.$$

Vizsgáljuk meg, hogy teljesül-e, hogy $(a, c) \in \beta$:

$$(a, c) \in \beta \iff 2 \mid 3a - c \iff 2 \mid 2k + b - 3b + 2l \iff 2 \mid 2(k + l - b). \text{ Az utolsó oszthatóság nyilván teljesül, így megkapjuk, hogy } (a, c) \in \beta, \text{ azaz } \beta \text{ TRANZITÍV.}$$

5. (3 pont) Válaszoljon az alábbi kérdésekre!
(Pontozás: n darab helyes válasz $\mapsto \max\{0, n-1\}$ pont.)

- Az $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 2$ leképezés szürjektív?

Megoldás: A grafikonról azonnal látszik, hogy NEM, és például a -10 -nek biztos nincs őse $\mathbb{R}^+$ -ban.

- A $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2}{x} + 2$ leképezés bijektív?

Megoldás: A grafikonról azonnal látszik, hogy NEM, mivel nem szürjektív, az egyetlen elem, aminek nincs őse, az a 2. A leképezés egyébként injektív.

- A $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n$ pozitív osztóinak száma leképezés szürjektív?

Megoldás: Ezt nem érdemes ábrázolni, de rá lehet jönni, hogy IGEN, a leképezés szürjektív, például bármely $n \in \mathbb{N}$ -re $h(2^{n-1}) = n$, azaz bármely természetes számnak van őse.

- A $k: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $xk = |x+1| - 1$ leképezés injektív?

Megoldás: A grafikonról azonnal látszik, hogy IGEN, ugyanis a megadott indulási és érkezési halmazon, a leképezés az identikus leképezéssel egyezik meg, ami „nagyon” bijektív, és így természetesen injektív is.

-
- (+2 pont) *Bónusz kérdés:* Ilyet gyakorlaton nem csináltunk, de ha több időnk lett volna, csináltunk volna, és informatikusok lévén ilyen problémával könnyen szembekerülhetnek. Van egy programnyelvünk, amiben csak egyetlen véletlenszámgenerátor van, és ez csak a $[0, 1]$ intervallumból tud visszaadni egy valós számot. Mi viszont a dobókockát akarjuk számítógépen modellezni, ami csak az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ értékeket veheti fel, természetesen ezeket véletlenszerűen. Mindenképpen fel akarjuk használni a beépített generátort, mert nem akarunk új generátort írni. Adjunk meg egy olyan leképezést, ami megoldja a problémánkat! (Milyen tulajdonságai vannak, illetve nincsenek ennek a leképezésnek?)

Megoldás: Egy lehetséges leképezés a következő:

$$f: [0, 1] \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{ha } x \leq \frac{1}{6} \\ 2 & \text{ha } \frac{1}{6} < x \leq \frac{2}{6} \\ \vdots & \\ 5 & \text{ha } \frac{4}{6} < x \leq \frac{5}{6} \\ 6 & \text{ha } x > \frac{5}{6} \end{cases}.$$

Ábrázolás nélkül is könnyen látszik, hogy az f leképezés szürjektív, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazból minden elemnek van őse, viszont még véletlenül sem injektív, mert $f(0, 1) = f(0, 11)$ és $0, 1 \neq 0, 11$. Ezért az f leképezés nem bijekció, és nyilván a feladatban megadott halmazok között nem is tudunk megadni bijekciót, mert $|[0, 1]| = c$, $|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}| = 6$, és $c \neq 6$.

1.	2.	3.	4.	5.	Σ
3	3	3	3	2	14

Diszkrét matematika I. gyak.

1. ZH

2010. október 14.

F csoport

1. (3 pont) Legyen adott a következő három komplex szám:

$$z_1 = -8 + 2i, \quad z_2 = 1 + 2i, \quad z_3 = (3, -1).$$

Határozza meg a következő komplex számot kanonikus alakban:

$$\frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_3}.$$

Megoldás:

$$\overline{z_2} = 1 - 2i$$

$$z_1 \overline{z_2} = (-8 + 2i)(1 - 2i) = -8 + 16i + 2i - 4i^2 = -8 + 18i + 4 = -4 + 18i$$

$$\frac{z_1 \overline{z_2}}{z_3} = \frac{-4 + 18i}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{-12 - 4i + 54i - 18}{3^2 - i^2} = \frac{-30 + 50i}{10} = -3 + 5i$$

2. (3 pont) Legyen adott az

$$\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : 4 \mid 3a + b\} \subseteq \mathbb{Z}^2$$

reláció. Vizsgálja meg, hogy az α relációra az alábbiak közül mely tulajdonságok teljesülnek! Válaszait mindhárom esetben indokolja!

- reflexív

Megoldás: Azt kell vizsgálni, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül-e, hogy $(a, a) \in \alpha$. Nézzük meg, legyen $a \in \mathbb{Z}$ tetszőleges: $(a, a) \in \alpha \iff 4 \mid 3a + a \iff 4 \mid 4a$. Ez utóbbi nyilván minden esetben teljesül, amiből a „visszafele” nyílak miatt következik, hogy $(a, a) \in \alpha$, azaz α REFLEXÍV.

- tranzitív

Megoldás: Azt kell vizsgálni, hogy tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül-e, hogy $(a, b), (b, c) \in \alpha$ -ból következik $(a, c) \in \alpha$. Nézzük meg! Legyen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tetszőleges, melyekre $(a, b), (b, c) \in \alpha$. Ekkor

$$(a, b) \in \alpha \iff 4 \mid 3a + b \iff \exists k \in \mathbb{Z} : 4k = 3a + b \iff 3a = 4k - b \text{ és}$$

$$(b, c) \in \alpha \iff 4 \mid 3b + c \iff \exists l \in \mathbb{Z} : 4l = 3b + c \iff c = 4l - 3b.$$

Vizsgáljuk meg, hogy teljesül-e, hogy $(a, c) \in \alpha$:

$$(a, c) \in \alpha \iff 4 \mid 3a + c \iff 4 \mid 4k - b + 4l - 3b \iff 4 \mid 4(k + l - b). \text{ Az utolsó oszthatóság nyilván teljesül, így megkapjuk, hogy } (a, c) \in \alpha, \text{ azaz } \alpha \text{ TRANZITÍV.}$$

- dichotóm

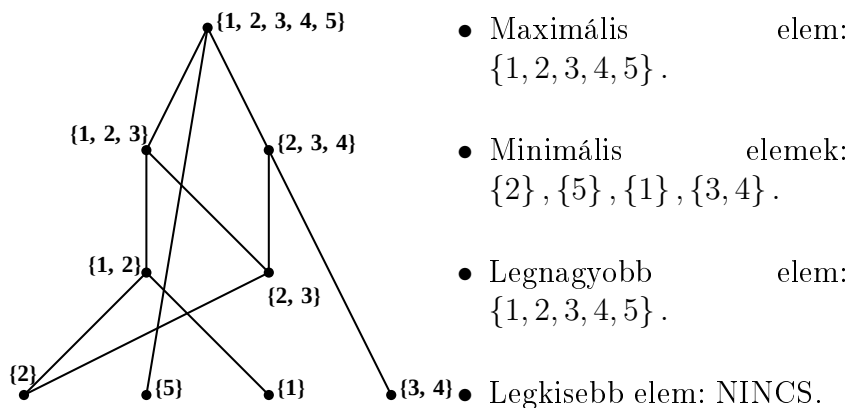
Megoldás: Azt kell vizsgálni, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül-e, hogy $(a, b) \in \alpha$ vagy $(b, a) \in \alpha$. Nyilván NEM DICHOTÓM, könnyen találunk ellenpéldát: sem $(0, 1) \in \alpha$ sem pedig $(1, 0) \in \alpha$ nem teljesül.

3. (3 pont) Legyen adott az

$$A = \{\{1\}, \{2\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

halmaz, és tekintsük az $(A; \subseteq)$ részbenrendezett halmazt. Adja meg ennek a Hasse-diagrammját, illetve határozza meg a legnagyobb, legkisebb, maximális és minimális elemeket!

Megoldás:



4. (3 pont) Válaszoljon az alábbi kérdésekre!

(Pontozás: n darab helyes válasz $\mapsto \max\{0, n - 1\}$ pont.)

- Az $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $xf = \frac{1}{3}x^2 - 2$ leképezés injektív?

Megoldás: A grafikonról azonnal látszik, hogy IGEN, de algebrailag is könnyen kihozható:
 $f(x_1) = f(x_2) \iff \frac{1}{3}x_1^2 - 2 = \frac{1}{3}x_2^2 - 2 \iff x_1^2 = x_2^2 \xrightarrow{x_1, x_2 > 0} x_1 = x_2$.

- A $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{3}{x} - 3$ leképezés szürjektív?

Megoldás: A grafikonról azonnal látszik, hogy NEM, az egyetlen elem, aminek nincs őse, az a -3 .

- A $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n$ pozitív osztóinak száma leképezés injektív?

Megoldás: Ezt nem érdemes ábrázolni, de könnyen rá lehet jönni, hogy h minden prímszámhoz a 2-t rendeli hozzá, ami pontosan azt jelenti, hogy NEM injektív.

- A $k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, $k(x) = 2x - 1$ leképezés bijektív?

Megoldás: Lehet ábrázolni, de a megszokott „vonalas” ábrázolás csal, ugyanis az indulási halmaz miatt a grafikon diszkrét (pontok alkotják). Injektívnek ugyan injektív, ez nem függ a halmazoktól, viszont NEM szürjektív. Vegyünk egy tetszőleges $y \in \mathbb{Q}$ elemet, és keressünk hozzá őst: $2x - 1 = y \iff x = \frac{y+1}{2}$. Ez azt jelenti, hogy a tetszőleges y racionális szám őse mindig $\frac{y+1}{2}$ alakú, ami még csak nem is mindig egész. Tehát például a páros egészeknek biztos nincs őse.

5. (2 pont) Legyen $A = \{a, \{b\}, \{a, b\}, \{\emptyset\}\}$ és $B = P(\{b, a\})$ két halmaz. Határozza meg az $A \setminus B$ halmaz elemeit!

Megoldás:

$$A = \{a, \{b\}, \{a, b\}, \{\emptyset\}\}$$

$$B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$A \setminus B = \{a, \{\emptyset\}\}$$

- (+2 pont) *Bónusz kérdés:* Ilyet gyakorlaton nem csináltunk, de ha több időnk lett volna, csináltunk volna, és informatikusok lévén ilyen problémával könnyen szembekerülhetnek. Van egy programnyelvünk, amiben csak egyetlen véletlenszámgenerátor van, és ez csak a $[0, 1]$ intervallumból tud visszaadni egy valós számot. Mi viszont a dobókockát akarjuk számítógépen modellezni, ami csak az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ értékeket veheti fel, természetesen ezeket véletlenszerűen. Mindenképpen fel akarjuk használni a beépített generátort, mert nem akarunk új generátort írni. Adjunk meg egy olyan leképezést, ami megoldja a problémánkat! (Milyen tulajdonságai vannak, illetve nincsenek ennek a leképezésnek?)

Megoldás: Egy lehetséges leképezés a következő:

$$f : [0, 1] \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{ha } x \leq \frac{1}{6} \\ 2 & \text{ha } \frac{1}{6} < x \leq \frac{2}{6} \\ \vdots & \\ 5 & \text{ha } \frac{4}{6} < x \leq \frac{5}{6} \\ 6 & \text{ha } x > \frac{5}{6} \end{cases}.$$

Ábrázolás nélkül is könnyen látszik, hogy az f leképezés szürjektív, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazból minden elemnek van ősképe, viszont még véletlenül sem injektív, mert $f(0, 1) = f(0, 11)$ és $0, 1 \neq 0, 11$. Ezért az f leképezés nem bijekció, és nyilván a feladatban megadott halmazok között nem is tudunk megadni bijekciót, mert $|[0, 1]| = c$, $|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}| = 6$, és $c \neq 6$.
