Perspektív projektív 3-hálózatok

Bogya Norbert

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

Hallgatói Szeminárium

2014. szeptember 26.

Alapfogalmak

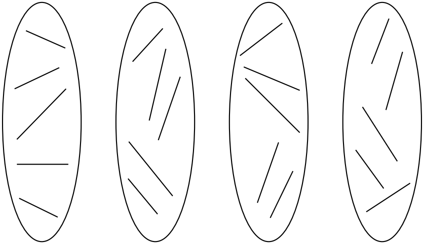
k-net

A k-net k darab páronként diszjunkt egyeneshalmaz úgy, hogy minden olyan pont, ami két halmazbeli egyenes metszéspontja, az pontosan egy egyenesre illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma n, akkor n-rendű k-netről beszélünk.

Alapfogalmak

k-net

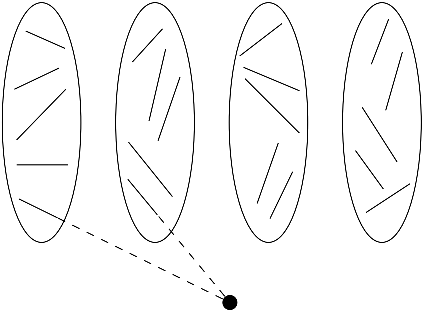
A k-net k darab páronként diszjunkt egyeneshalmaz úgy, hogy minden olyan pont, ami két halmazbeli egyenes metszéspontja, az pontosan egy egyenesre illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma n, akkor n-rendű k-netről beszélünk.



Alapfogalmak

k-net

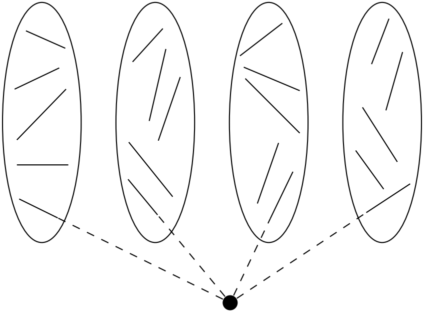
A k-net k darab páronként diszjunkt egyeneshalmaz úgy, hogy minden olyan pont, ami két halmazbeli egyenes metszéspontja, az pontosan egy egyenesre illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma n, akkor n-rendű k-netről beszélünk.



Alapfogalmak

k-net

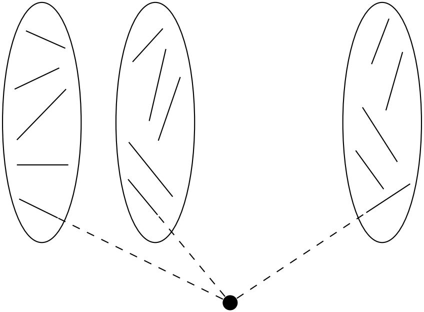
A k-net k darab páronként diszjunkt egyeneshalmaz úgy, hogy minden olyan pont, ami két halmazbeli egyenes metszéspontja, az pontosan egy egyenesre illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma n, akkor n-rendű k-netről beszélünk.



Alapfogalmak

k-net

A k-net k darab páronként diszjunkt egyeneshalmaz úgy, hogy minden olyan pont, ami két halmazbeli egyenes metszéspontja, az pontosan egy egyenesre illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma n, akkor n-rendű k-netről beszélünk.

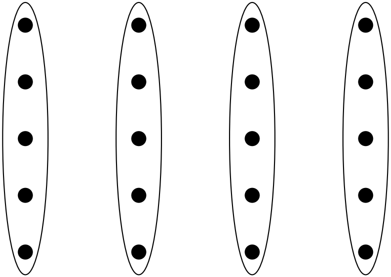


- Származtatott $(k-1)$-net.

Alapfogalmak

Duális k-net

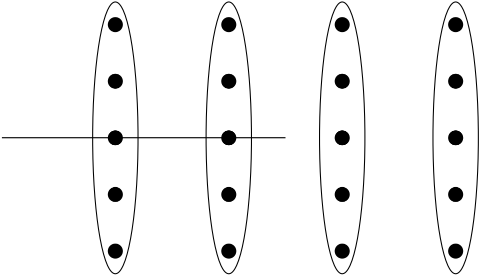
A duális k-net k darab páronként diszjunkt ponthalmaz úgy, hogy minden olyan egyenes, ami két halmazbeli pontra is illeszkedik, arra pontosan egy pont illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma n, akkor n-rendű duális k-netről beszélünk.



Alapfogalmak

Duális k-net

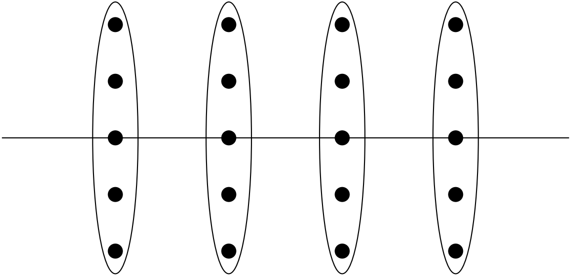
A duális k-net k darab páronként diszjunkt ponthalmaz úgy, hogy minden olyan egyenes, ami két halmazbeli pontra is illeszkedik, arra pontosan egy pont illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma n, akkor n-rendű duális k-netről beszélünk.



Alapfogalmak

Duális k-net

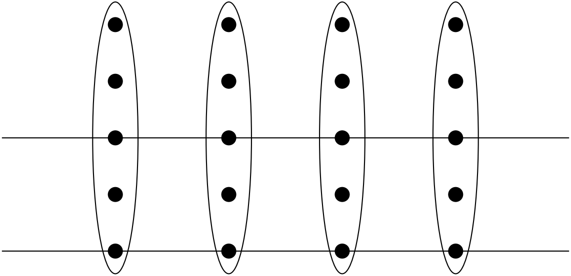
A duális k-net k darab páronként diszjunkt ponthalmaz úgy, hogy minden olyan egyenes, ami két halmazbeli pontra is illeszkedik, arra pontosan egy pont illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma n, akkor n-rendű duális k-netről beszélünk.



Alapfogalmak

Duális k-net

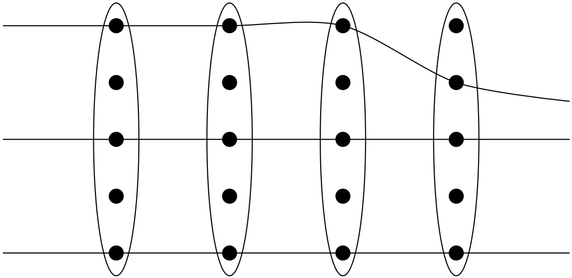
A duális k-net k darab páronként diszjunkt ponthalmaz úgy, hogy minden olyan egyenes, ami két halmazbeli pontra is illeszkedik, arra pontosan egy pont illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma n, akkor n-rendű duális k-netről beszélünk.



Alapfogalmak

Duális k-net

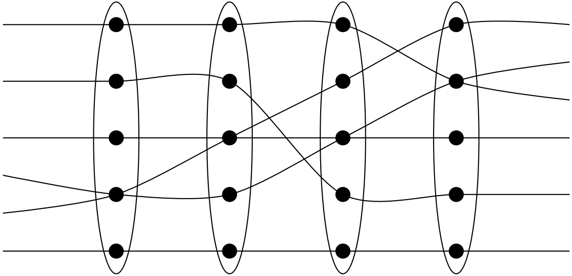
A duális k-net k darab páronként diszjunkt ponthalmaz úgy, hogy minden olyan egyenes, ami két halmazbeli pontra is illeszkedik, arra pontosan egy pont illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma n, akkor n-rendű duális k-netről beszélünk.



Alapfogalmak

Duális k-net

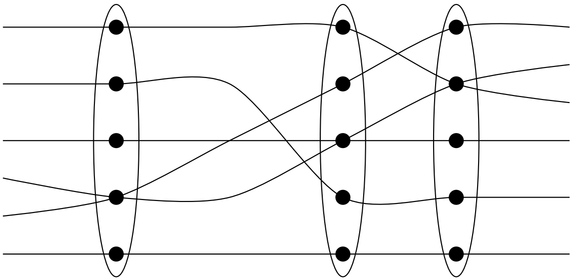
A duális k-net k darab páronként diszjunkt ponthalmaz úgy, hogy minden olyan egyenes, ami két halmazbeli pontra is illeszkedik, arra pontosan egy pont illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma n, akkor n-rendű duális k-netről beszélünk.



Alapfogalmak

Duális *k*-net

A duális k-net k darab páronként diszjunkt ponthalmaz úgy, hogy minden olyan egyenes, ami két halmazbeli pontra is illeszkedik, arra pontosan egy pont illeszkedik minden halmazból.
Ha a halmazok elemszáma n, akkor n-rendű duális k-netről beszélünk.



- Származtatott duális $(k-1)$-net.

Perspektív duális 3-net

- $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ ponthalmazok (komponensek)
- $|\Lambda_i| = n$

Perspektív duális 3-net

- $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ ponthalmazok (komponensek)
- $|\Lambda_i| = n$

C -re perspektív duális 3-net

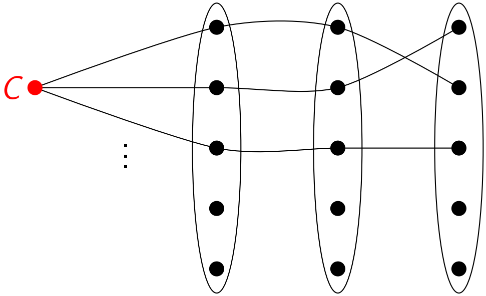
$C \notin \cup\Lambda_i$ és minden olyan egyenes, mely átmegy C-n és az egyik komponens egy pontján, akkor az összes komponens egy pontján is átmegy.

Perspektív duális 3-net

- $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ ponthalmazok (komponensek)
- $|\Lambda_i| = n$

C -re perspektív duális 3-net

$C \notin \cup\Lambda_i$ és minden olyan egyenes, mely átmegy C-n és az egyik komponens egy pontján, akkor az összes komponens egy pontján is átmegy.



Csoporttal koordinátázható 3-net $PG(2, \mathbb{K})$-ban

Egyenesosztályok: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.

Csoporttal koordinátázható 3-net PG$(2, \mathbb{K})$-ban

Egyenesosztályok: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.
Csoport: $G = (G, \cdot)$.

Csoporttal koordinátázható 3-net PG$(2,\mathbb{K})$-ban

Egyenesosztályok: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.
Csoport: $G = (G, \cdot)$.
Bijektív leképezések: $\alpha\colon G \to \mathcal{A}$, $\beta\colon G \to \mathcal{B}$, $\gamma\colon G \to \mathcal{C}$.

Csoporttal koordinátázható 3-net PG$(2, \mathbb{K})$-ban

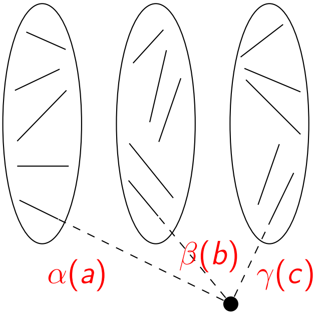
Egyenesosztályok: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.
Csoport: $G = (G, \cdot)$.
Bijektív leképezések: $\alpha\colon G \to \mathcal{A}$, $\beta\colon G \to \mathcal{B}$, $\gamma\colon G \to \mathcal{C}$.
A 3-net realizálja a G csoportot, ha bármely $a, b, c \in G$ esetén

$$a \cdot b = c \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(a), \beta(b), \gamma(c) \text{ egy pontban metszi egymást.}$$

Csoporttal koordinátázható 3-net PG$(2,\mathbb{K})$-ban

Egyenesosztályok: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.
Csoport: $G = (G, \cdot)$.
Bijektív leképezések: $\alpha\colon G \to \mathcal{A}$, $\beta\colon G \to \mathcal{B}$, $\gamma\colon G \to \mathcal{C}$.
A 3-net realizálja a G csoportot, ha bármely $a, b, c \in G$ esetén

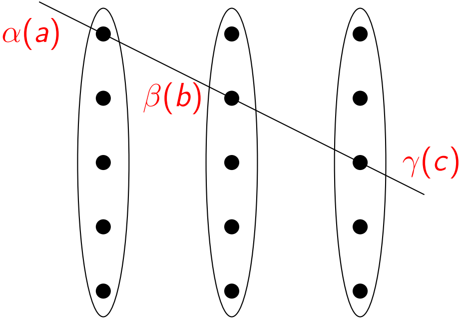
$$a \cdot b = c \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(a), \beta(b), \gamma(c) \text{ egy pontban metszi egymást.}$$



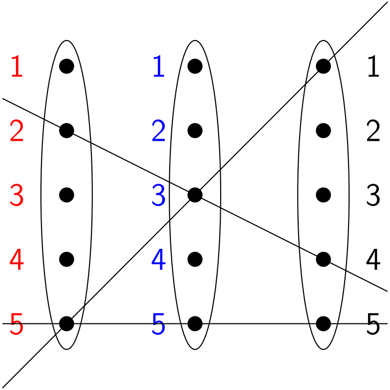
Csoporttal koordinátázható duális 3-net $PG(2, \mathbb{K})$-ban

Pontosztályok: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$.
Csoport: $G = (G, \cdot)$.
Bijektív leképezések: $\alpha\colon G \to \mathcal{A}$, $\beta\colon G \to \mathcal{B}$, $\gamma\colon G \to \mathcal{C}$.
A duális 3-net realizálja a G csoportot, ha bármely $a, b, c \in G$ esetén

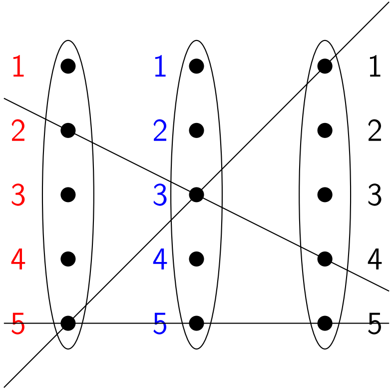
$$a \cdot b = c \iff \alpha(a), \beta(b), \gamma(c) \text{ kollineáris.}$$



$Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

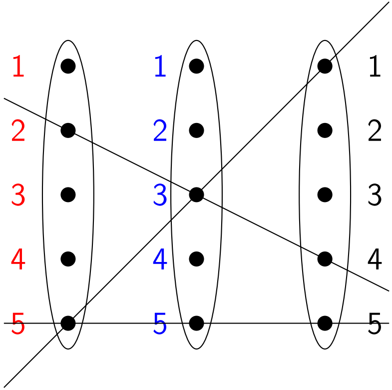


$Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$*$	1	2	3	4	5
1					
2			4		
3					
4					
5			1		5

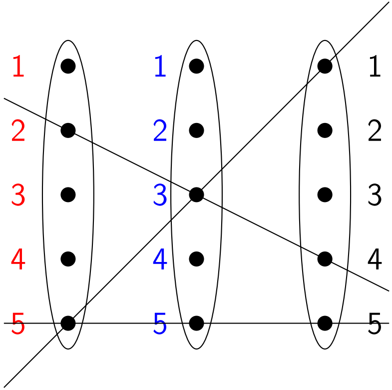
$Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$*$	1	2	3	4	5
1					
2			4		
3					
4					
5			1		5

Latin négyzet

$Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



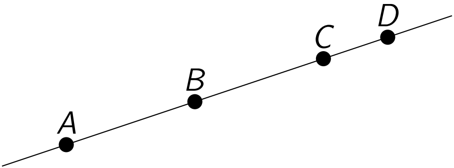
$*$	1	2	3	4	5
1					
2			4		
3					
4					
5			1		5

Latin négyzet

Latin négyzet $\longleftrightarrow$ $(Q, *)$ kvázicsoport.

A $(Q, *)$ kvázicsoport, ha tetszőleges $a, b \in Q$ elemek esetén az $a * x = b$ és $y * a = b$ egyenletek egyértelműen megoldhatók Q-ban.

Kettősviszony

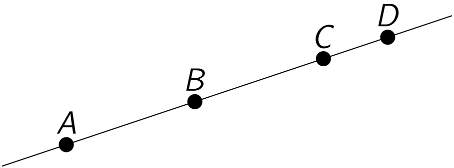


Definíció

Ha A, B, C, D egy egyenesre illeszkedő pontok, akkor

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{|AC|}{|CB|} : \frac{|AD|}{|DB|}.$$

Kettősviszony



Definíció

Ha A, B, C, D kollineáris pontok, akkor léteznek olyan $\lambda_i \neq 0 \neq \mu_i$ skalárok, hogy $\vec{C} = \lambda_1 \vec{A} + \mu_1 \vec{B}$ és $\vec{D} = \lambda_2 \vec{A} + \mu_2 \vec{B}$. Ekkor a rendezett A, B, C, D pontnégyes kettősviszonya

$$(ABCD) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}.$$

Kettősviszony

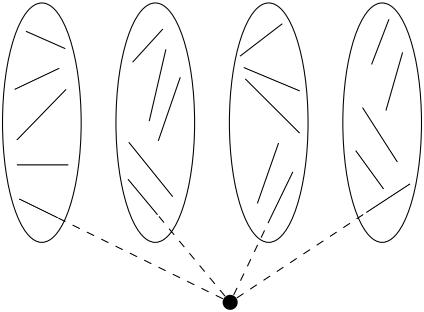
Tétel (Korchmáros, Nagy, Pace, 2013)

Egy $PG(2, \mathbb{K})$-beli 4-net kettősviszonya konstans.

Kettősviszony

Tétel (Korchmáros, Nagy, Pace, 2013)

Egy PG$(2, \mathbb{K})$-beli 4-net kettősviszonya konstans.



Kettősviszony

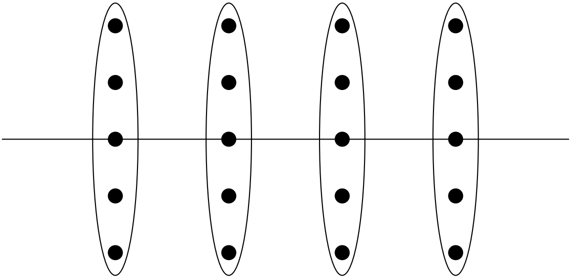
Tétel (Korchmáros, Nagy, Pace, 2013)

Duális 4-net kettősviszonya konstans, azaz minden olyan egyenesre, mely az összes komponenst metszi, a négy metszéspont kettősviszonya konstans.

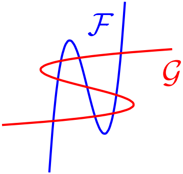
Kettősviszony

Tétel (Korchmáros, Nagy, Pace, 2013)

Duális 4-net kettősviszonya konstans, azaz minden olyan egyenesre, mely az összes komponenst metszi, a négy metszéspont kettősviszonya konstans.



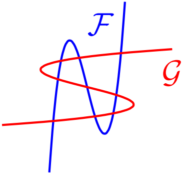
Kettősviszony



Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen F, G két n-edfokú homogén polinom olyan, hogy az $\mathcal{F}: F = 0$ és $\mathcal{G}: G = 0$ görbéknek n^2 különböző közös pontja van.

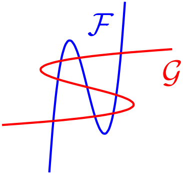
Kettősviszony



Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen F, G két n-edfokú homogén polinom olyan, hogy az $\mathcal{F}: F = 0$ és $\mathcal{G}: G = 0$ görbéknek n^2 különböző közös pontja van. Rögzítsük az $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ nemnulla skalárokat

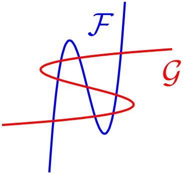
Kettősviszony



Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen F, G két n-edfokú homogén polinom olyan, hogy az $\mathcal{F}\colon F = 0$ és $\mathcal{G}\colon G = 0$ görbéknek n^2 különböző közös pontja van. Rögzítsük az $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ nemnulla skalárokat, és vegyük a $H = \alpha F + \beta G$ és $H' = \alpha' F + \beta' G$ polinomokat

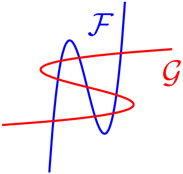
Kettősviszony



Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen F, G két n-edfokú homogén polinom olyan, hogy az $\mathcal{F}\colon F = 0$ és $\mathcal{G}\colon G = 0$ görbéknek n^2 különböző közös pontja van. Rögzítsük az $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ nemnulla skalárokat, és vegyük a $H = \alpha F + \beta G$ és $H' = \alpha' F + \beta' G$ polinomokat, és a megfelelő $\mathcal{H}\colon H = 0$ és $\mathcal{H}'\colon H' = 0$ görbéket.

Kettősviszony



Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen F, G két n-edfokú homogén polinom olyan, hogy az $\mathcal{F}: F = 0$ és $\mathcal{G}: G = 0$ görbéknek n^2 különböző közös pontja van. Rögzítsük az $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ nemnulla skalárokat, és vegyük a $H = \alpha F + \beta G$ és $H' = \alpha' F + \beta' G$ polinomokat, és a megfelelő $\mathcal{H}: H = 0$ és $\mathcal{H}': H' = 0$ görbéket. Ekkor minden $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ pontra a $t_P(\mathcal{F})$,$t_P(\mathcal{G})$,$t_P(\mathcal{H})$,$t_P(\mathcal{H}')$ érintők kettősviszonya

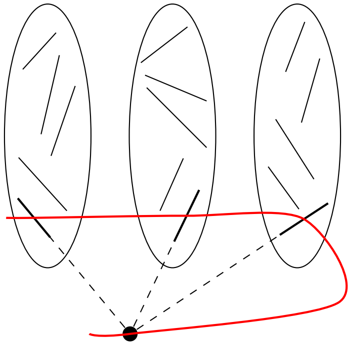
$$\kappa = \frac{\alpha\beta'}{\alpha'\beta}.$$

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ egy n-ed rendű 3-net $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$-ban. Tegyük fel, hogy ℓ transzverzális. Ekkor létezik egy olyan κ skalár, hogy minden $P \in \ell \cap \lambda$ ($P = m_1 \cap m_2 \cap m_3$, $m_1 \in \lambda_1$, $m_2 \in \lambda_2$, $m_3 \in \lambda_3$) pontra az ℓ, m_1, m_2, m_3 egyenesek kettős viszonya κ.

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ egy n-ed rendű 3-net $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$-ban. Tegyük fel, hogy ℓ transzverzális. Ekkor létezik egy olyan κ skalár, hogy minden $P \in \ell \cap \lambda$ ($P = m_1 \cap m_2 \cap m_3$, $m_1 \in \lambda_1$, $m_2 \in \lambda_2$, $m_3 \in \lambda_3$) pontra az ℓ, m_1, m_2, m_3 egyenesek kettős viszonya κ.

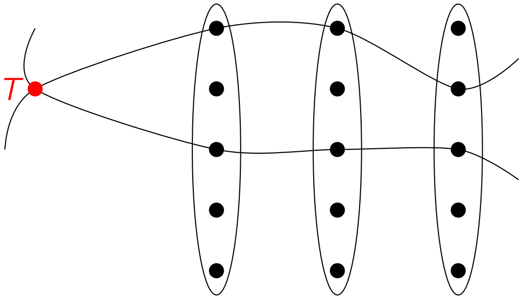


Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ egy *n*-ed rendű duális 3-net $PG(2, \mathbb{K})$-ban. Tegyük fel, hogy Λ perspektív a T pontra nézve. Ekkor létezik egy olyan κ skalár, hogy az összes T-n átmenő ℓ egyenes esetén a $T, \ell \cap \Lambda_1, \ell \cap \Lambda_2, \ell \cap \Lambda_3$ pontok kettősviszonya κ.

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ egy n-ed rendű duális 3-net $PG(2, \mathbb{K})$-ban. Tegyük fel, hogy Λ perspektív a T pontra nézve. Ekkor létezik egy olyan κ skalár, hogy az összes T-n átmenő ℓ egyenes esetén a $T, \ell \cap \Lambda_1, \ell \cap \Lambda_2, \ell \cap \Lambda_3$ pontok kettősviszonya κ.



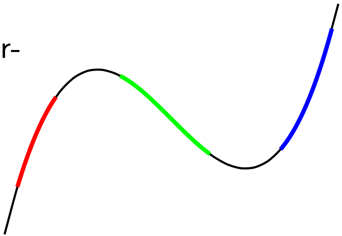
Duális 3-netek osztályozása

Duális 3-netek osztályozása

- **Algebrai**: a pontok egy köbös görbén vannak.

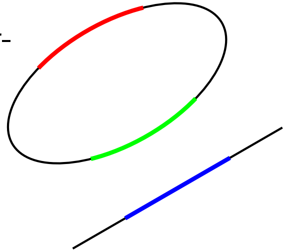
Duális 3-netek osztályozása

- **Algebrai**: a pontok egy köbös görbén vannak.
  - Tiszta algebrai



Duális 3-netek osztályozása

- **Algebrai**: a pontok egy köbös görbén vannak.
  - Tiszta algebrai
  - Kúpszelet-egyenes típusú

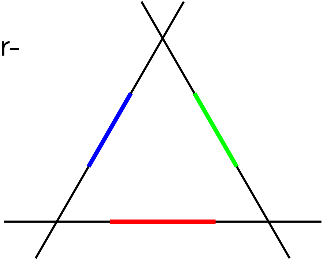


Duális 3-netek osztályozása

- **Algebrai**: a pontok egy köbös görbén vannak.
  - Tiszta algebrai
  - Kúpszelet-egyenes típusú
  - Reguláris
- **Reguláris**: a komponensei három egyenesen vannak.

Duális 3-netek osztályozása

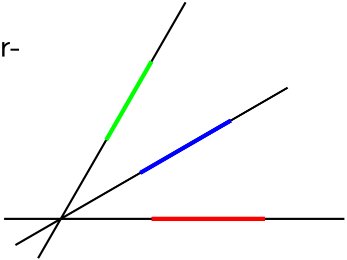
- **Algebrai**: a pontok egy köbös görbén vannak.
  - Tiszta algebrai
  - Kúpszelet-egyenes típusú
  - Reguláris



- **Reguláris**: a komponensei három egyenesen vannak.
  - **Trianguláris**: a három egyenes háromszöget alkot.

Duális 3-netek osztályozása

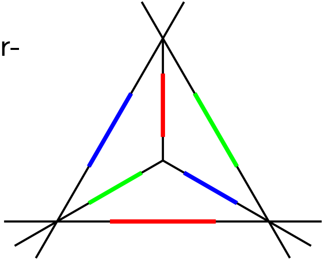
- **Algebrai**: a pontok egy köbös görbén vannak.
  - Tiszta algebrai
  - Kúpszelet-egyenes típusú
  - Reguláris



- **Reguláris**: a komponensei három egyenesen vannak.
  - **Trianguláris**: a három egyenes háromszöget alkot.
  - **Sugársor típusú**: a három egyenes egy pontra illeszkedik.

Duális 3-netek osztályozása

- **Algebrai**: a pontok egy köbös görbén vannak.
  - Tiszta algebrai
  - Kúpszelet-egyenes típusú
  - Reguláris



- **Reguláris**: a komponensei három egyenesen vannak.
  - **Trianguláris**: a három egyenes háromszöget alkot.
  - **Sugársor típusú**: a három egyenes egy pontra illeszkedik.
- **Tetraéder típusú**: a pontjai egy nemelfajuló négyszög oldalain és átlóin helyezkednek el.

Korábbi klasszifikációs tétel

Tétel

Legyen $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ egy $n \geq 4$ rendű, G csoportot realizáló duális 3-net a $p \geq 0$ karakterisztikájú algebrailag zárt $\mathbb{K}$ tests feletti $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$ projektív síkban. Ha $p = 0$ vagy $p > n$, akkor pontosan az egyik teljesül az alábbiak közül:

(i) G ciklikus vagy két ciklikus csoport direkt szorzata és Λ algebrai;

(ii) G diédercsoport és Λ tetraéder típusú;

(iii) G a kvaterniócsoport;

(iv) G rendje 12 és izomorf az A_4 csoporttal;

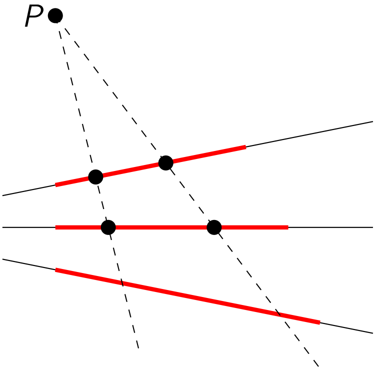
(v) G rendje 24 és izomorf az S_4 csoporttal;

(vi) G rendje 60 és izomorf az A_5 csoporttal.

Trianguláris és tetraéder típusú duális 3-netek

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

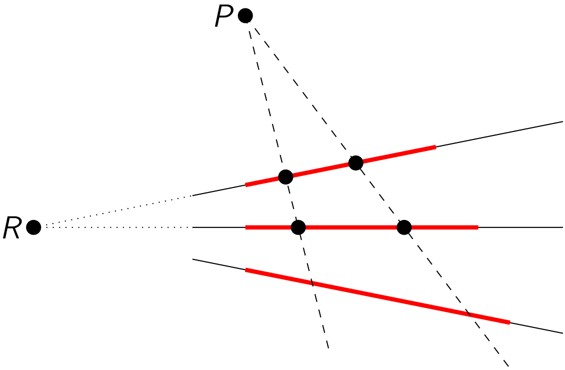
Minden reguláris perspektív duális 3-net sugársor alakú.



Trianguláris és tetraéder típusú duális 3-netek

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

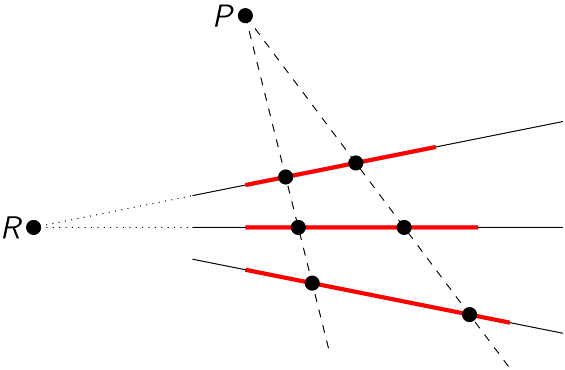
Minden reguláris perspektív duális 3-net sugársor alakú.



Trianguláris és tetraéder típusú duális 3-netek

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

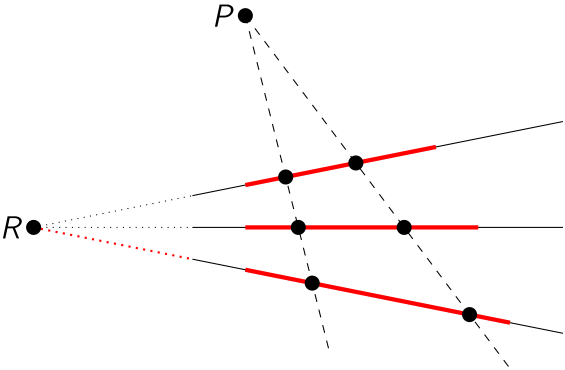
Minden reguláris perspektív duális 3-net sugársor alakú.



Trianguláris és tetraéder típusú duális 3-netek

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Minden reguláris perspektív duális 3-net sugársor alakú.



Sugársor alakú duális 3-net nulla karakterisztika fölött **nem létezik**.

Pozitív karakterisztika esetén is csak akkor, ha a karakterisztika osztója a duális 3-net rendjének.

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Nulla karakterisztikájú test felett nem létezik reguláris perspektív duális 3-net. Ez olyan pozitív karakterisztikára is igaz, ha a duális 3-net rendje kisebb, mint a karakterisztika.

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Nulla karakterisztikájú test felett nem létezik perspektív tetraéder típusú duális 3-net. Ez olyan pozitív karakterisztikára is igaz, ha a duális 3-net rendje kisebb, mint a karakterisztika.

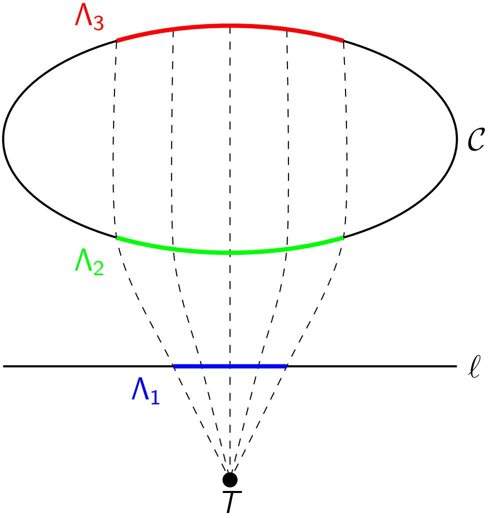
Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Nulla karakterisztikájú test felett nem létezik perspektív tetraéder típusú duális 3-net. Ez olyan pozitív karakterisztikára is igaz, ha a duális 3-net rendje kisebb, mint a karakterisztika.

Következmény (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\mathbb{K}$ egy nulla vagy n-nél nagyobb karakterisztikájú algebrailag zárt test. Ekkor nincs olyan n-rendű duális 4-net $\mathrm{PG}(2,\mathbb{K})$-ban, melynek a származtatott duális 3-nete trianguláris, vagy tetraéder típusú.

Kúpszelet-egyenes típusú duális 3-net



Proj. koord. rendszer: $T = (0, 0, 1)$, ℓ: $Z = 0$, $\mathcal{C}$: $XY = Z^2$.
Megmutatható, hogy Λ-nak van egységgyökös paraméterezése:

$$\Lambda_2 = \{(c, c^{-1}), (c\xi, c^{-1}\xi^{-1}), \ldots, (c\xi^{n-1}, c^{-1}\xi^{-n+1})\},$$

ahol $c \in \mathbb{K}^*$ és ξ egy n-edik egységgyök.
Az u: $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ perspektivitás Λ_2-t elviszi Λ_3-ba:

$$\Lambda_3 = \{(-c, -c^{-1}), (-c\xi, -c^{-1}\xi^{-1}), \ldots, (-c\xi^{n-1}, -c^{-1}\xi^{-n+1})\}.$$

Ha n páros, akkor $\xi^{n/2} = -1$. Így n páratlan, és

$$\Lambda_1 = \{(c^{-2}), (c^{-2}\xi), \ldots, (c^{-2}\xi^{n-1})\}.$$

Proj. koord. rendszer: $T = (0,0,1)$, $\ell\colon Z = 0$, $\mathcal{C}\colon XY = Z^2$.
Megmutatható, hogy Λ-nak van egységgyökös paraméterezése:

$$\Lambda_2 = \{(c, c^{-1}), (c\xi, c^{-1}\xi^{-1}), \ldots, (c\xi^{n-1}, c^{-1}\xi^{-n+1})\},$$

ahol $c \in \mathbb{K}^*$ és ξ egy n-edik egységgyök.
Az $u\colon (x,y) \mapsto (-x,-y)$ perspektivitás Λ_2-t elviszi Λ_3-ba:

$$\Lambda_3 = \{(-c, -c^{-1}), (-c\xi, -c^{-1}\xi^{-1}), \ldots, (-c\xi^{n-1}, -c^{-1}\xi^{-n+1})\}.$$

Ha n páros, akkor $\xi^{n/2} = -1$. Így n páratlan, és

$$\Lambda_1 = \{(c^{-2}), (c^{-2}\xi), \ldots, (c^{-2}\xi^{n-1})\}.$$

Lemma

Páratlan n esetén a fenti kúpszelet-egyenes típusú duális 3-net perspektív T-re.

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\mathbb{K}$ nulla vagy n-nél nagyobb karakterisztikájú algebrailag zárt test. Ekkor minden $\mathrm{PG}(2,\mathbb{K})$-beli perspektív n-rendű kúpszelet-egyenes típusú duális 3-net projektíven ekvivalens az előző oldalon mutatott duális 3-nettel.

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\mathbb{K}$ nulla vagy n-nél nagyobb karakterisztikájú algebrailag zárt test. Ekkor minden $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$-beli perspektív n-rendű kúpszelet-egyenes típusú duális 3-net projektíven ekvivalens az előző oldalon mutatott duális 3-nettel.

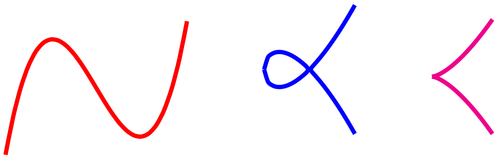
Következmény (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\mathbb{K}$ nulla vagy n-nél nagyobb karakterisztikájú algebrailag zárt test. Ekkor nem létezik olyan n-rendű duális 4-net $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$-ban, melynek származtatott duális 3-nete kúpszelet-egyenes típusú.

Tiszta algebrai duális 3-net

$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ egy Γ irreducibilis köbös görbén helyezkedik el.
Feltétel: $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \notin \{2, 3\}$.

Γ alakja	Infl. pontok	Kanonikus alak
nemszinguláris	9	$Y^2 = X(X-1)(X-c)$
masni	3	$Y^2 = X^3$
csúcsos	1	$Y^2 = X^3 + X^2$



j-invariáns

j-invariáns

Ha a Γ köbös görbe $Y^2 = X(X-1)(X-c)$ alakban adható meg, akkor a görbe j-invariánsa

$$j(\Gamma) = 2^8 \frac{(c^2 - c + 1)^3}{c^2(c-1)^2}.$$

A j-invariáns projektív ekvivalencia erejéig egyértelműen meghatározza az elliptikus görbéket.

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen Γ egy irreducibilis köbös görbe $\mathrm{PG}(2,\mathbb{K})$-ban, ahol $\mathbb{K}$ egy alg. zárt test és $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \notin \{2,3\}$. Legyenek a $P_i, Q_i, R_i \in \Gamma$ $(i = 1,\dots,7)$ páronként különböző nemszinguláris pontok úgy, hogy rögzített i-re a P_i, Q_i, R_i pontok kollineárisak. Tegyük fel, hogy $T \notin \Gamma$, illetve T, P_i, Q_i, R_i kollineáris, valamint a $(TP_iQ_iR_i)$ kettősviszony konstans κ. Ekkor $j(\Gamma) = 0$.

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen Γ egy irreducibilis köbös görbe $\mathrm{PG}(2,\mathbb{K})$-ban, ahol $\mathbb{K}$ egy alg. zárt test és $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \notin \{2,3\}$. Legyenek a $P_i, Q_i, R_i \in \Gamma$ $(i = 1,\ldots,7)$ páronként különböző nemszinguláris pontok úgy, hogy rögzített i-re a P_i, Q_i, R_i pontok kollineárisak. Tegyük fel, hogy $T \notin \Gamma$, illetve T, P_i, Q_i, R_i kollineáris, valamint a $(TP_iQ_iR_i)$ kettősviszony konstans κ. Ekkor $j(\Gamma) = 0$.

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Az előző feltételek mellett

(i) a projektív koordináta-rendszer megválasztható úgy, hogy $\Gamma\colon X^3 + Y^3 = 1$ és $T = (0,0)$,

(ii) létezik egy 3-adrendű perspektivitás a T középponttal, ami Γ-ra invariáns,

(iii) κ az $X^2 - X + 1$ valamelyik gyöke.

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\mathbb{K}$ egy alg. zárt test úgy, hogy $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \notin \{2, 3\}$. Legyen $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2\Lambda_3)$ legalább 7-edrendű duális 3-net, ami egy irreducibilis Γ görbén fekszik. Ha Γ szinguláris, vagy nemszinguláris és $j(\Gamma) \neq 0$, akkor Λ nem perspektív. Ha $j(\Gamma) = 0$, akkor legfeljebb három pont létezik, melyre nézve Λ perspektív.

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\mathbb{K}$ egy alg. zárt test úgy, hogy $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \notin \{2, 3\}$. Legyen $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2\Lambda_3)$ legalább 7-edrendű duális 3-net, ami egy irreducibilis Γ görbén fekszik. Ha Γ szinguláris, vagy nemszinguláris és $j(\Gamma) \neq 0$, akkor Λ nem perspektív. Ha $j(\Gamma) = 0$, akkor legfeljebb három pont létezik, melyre nézve Λ perspektív.

Következmény (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen $\mathbb{K}$ egy alg. zárt test úgy, hogy $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \notin \{2, 3\}$. Ekkor nem létezik olyan legalább 7-rendű duális 4-net, melynek származtatott duális 3-nete köbös görbén fekszik.

Összefoglaló tétel

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen Λ egy csoporttal koordinátázott n-rendű duális 3-net. Tegyük fel, hogy Λ a $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$-ba van ágyazva egy olyan $\mathbb{K}$ test felett, melyre $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$ vagy $\mathrm{char}(\mathbb{K}) > n$. Ha Λ perspektív és $n \neq 8$, akkor a következő két eset lehetséges.

(i) Λ egyik komponense egy egyenesen, a másik két komponense pedig egy nemszinguláris kúpszeleten fekszik.

(ii) Λ egy nemszinguláris $\mathcal{C}$ harmadrendű görbén fekszik, melyre $j(\mathcal{C}) = 0$. Ekkor Λ legfeljebb három pontra perspektív.

Összefoglaló tétel

Tétel (B., Korchmáros, Nagy, 2014)

Legyen Λ egy csoporttal koordinátázott n-rendű duális 3-net. Tegyük fel, hogy Λ a $\mathrm{PG}(2,\mathbb{K})$-ba van ágyazva egy olyan $\mathbb{K}$ test felett, melyre $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$ vagy $\mathrm{char}(\mathbb{K}) > n$. Ha Λ perspektív és $n \neq 8$, akkor a következő két eset lehetséges.

(i) Λ egyik komponense egy egyenesen, a másik két komponense pedig egy nemszinguláris kúpszeleten fekszik.

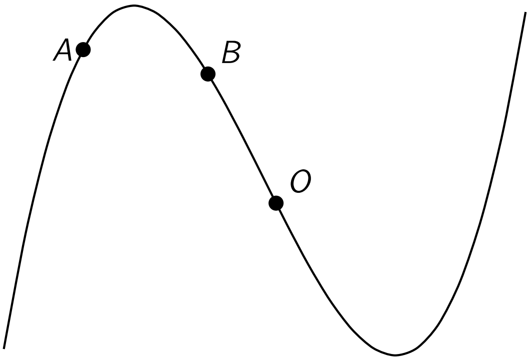
(ii) Λ egy nemszinguláris $\mathcal{C}$ harmadrendű görbén fekszik, melyre $j(\mathcal{C}) = 0$. Ekkor Λ legfeljebb három pontra perspektív.

Köszönöm a figyelmet!

Cubic curve

Addition on cubic curve

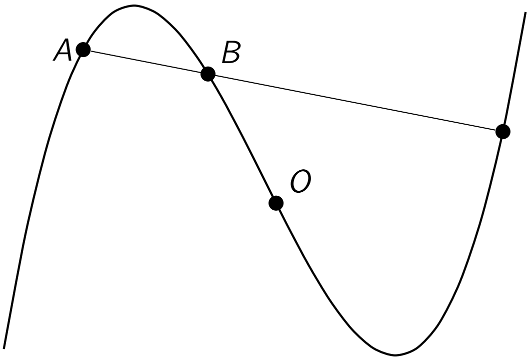
Let Γ be a cubic curve and let Γ^* be the set of its smooth points. Let $O \in \Gamma^*$ be a fixed point. In this case we can define the sum of $A, B \in \Gamma^*$ points:



Cubic curve

Addition on cubic curve

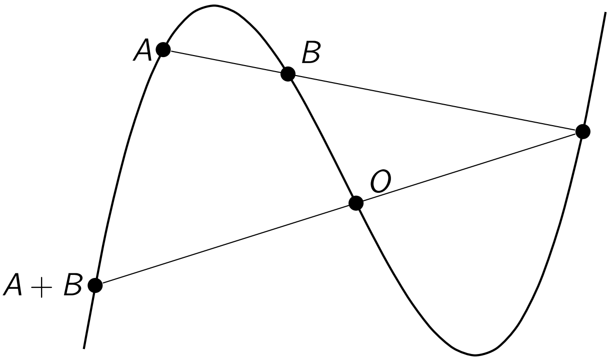
Let Γ be a cubic curve and let Γ^* be the set of its smooth points. Let $O \in \Gamma^*$ be a fixed point. In this case we can define the sum of $A, B \in \Gamma^*$ points:



Cubic curve

Addition on cubic curve

Let Γ be a cubic curve and let Γ^* be the set of its smooth points. Let $O \in \Gamma^*$ be a fixed point. In this case we can define the sum of $A, B \in \Gamma^*$ points:



Cubic curve

Theorem

Let Γ be a cubic curve and let Γ^* be the set of its smooth points. Let $O \in \Gamma^*$ be a fixed point. Then $(\Gamma^*, +, O)$ is an abelian group.

Theorem

1. If $\Gamma\colon\ Y = X^3$, then $(\Gamma^*, +) \cong (K, +)$.
2. If $\Gamma\colon\ Y^2 = X^3$, then $(\Gamma^*, +) \cong (K, +)$.
3. If $\Gamma\colon\ Y^2 = X^3 + X^2$, then $(\Gamma^*, +) \cong (K^*, \cdot)$.

Classification theorem

Theorem

In $\mathrm{PG}(2, \mathbb{K})$ defined over an algebraically closed field $\mathbb{K}$ of characteristic $p \geq 0$, let $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ be a dual 3-net of order $n \geq 4$ which realizes a group G. If either $p = 0$ or $p > n$ then one of the following holds.

(i) G is cyclic or direct product of two cyclic groups and Λ is algebraic.

(ii) G is dihedral and Λ is of tetrahedron type.

(iii) G is the quaternion group of order 8.

(iv) G has order 12 and is isomorphic to A_4.

(v) G has order 24 and is isomorphic to S_4.

(vi) G has order 60 and is isomorphic to A_5.