Játékok matematikája

Kártyázzunk véges geometriával

Bogya Norbert

Bolyai Intézet

Eötvös esték & Mat. Műhely, 2016

Tartalom


DOBBLE
ASMODEE

Kérdések

- Hogy tudunk ilyen kártyákat konstruálni?
- 8 helyett más számú ábrával is működik?
- Ha igen, akármennyivel?
- (Hány kártya van a Dobble-ben?)

Tartalom

Problémák

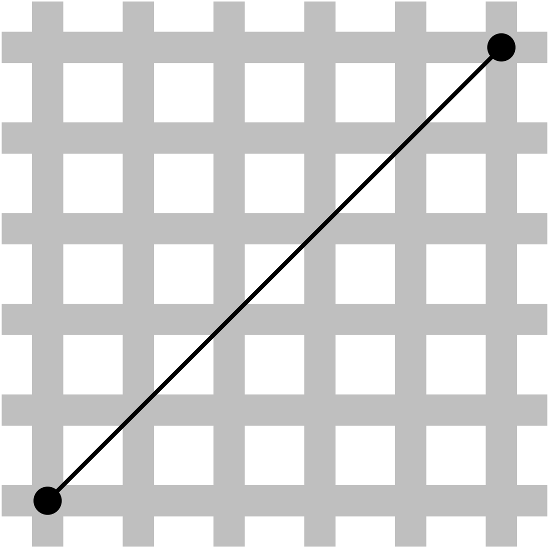
Mi történik a végtelenben?

Mi az a távolság?

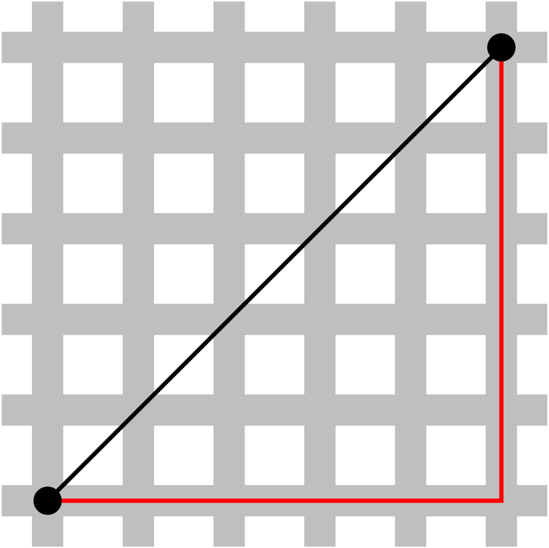
Mi a kör?

Milyen is a párhuzamos?

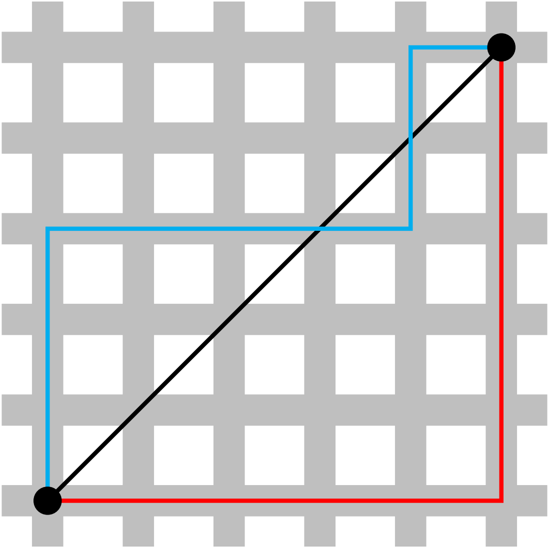
Távolság



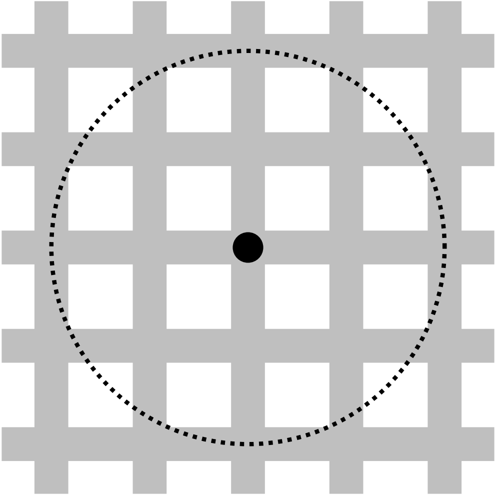
Távolság



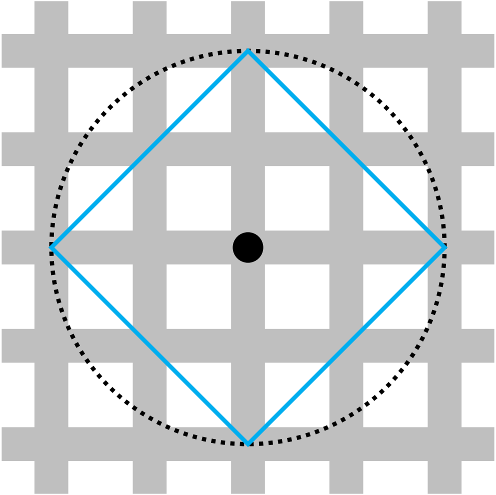
Távolság



Kör



Kör



Affin geometria

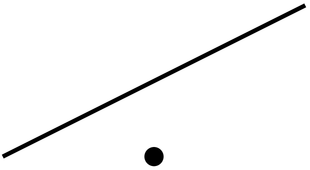
Alapfogalmak: pont, egyenes, illeszkedés.

- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
- Létezik legalább három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- Párhuzamossági axióma

Affin geometria

Alapfogalmak: pont, egyenes, illeszkedés.

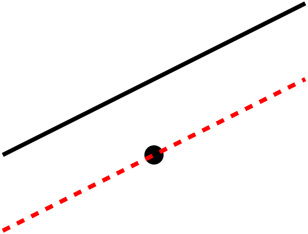
- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
- Létezik legalább három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- **Párhuzamossági axióma**



Affin geometria

Alapfogalmak: pont, egyenes, illeszkedés.

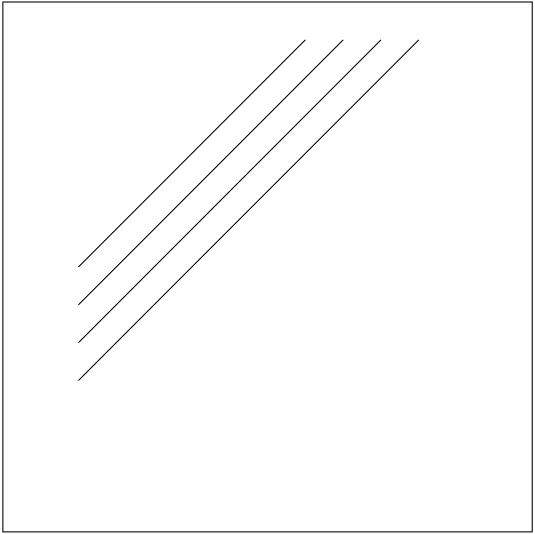
- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
- Létezik legalább három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- Párhuzamossági axióma



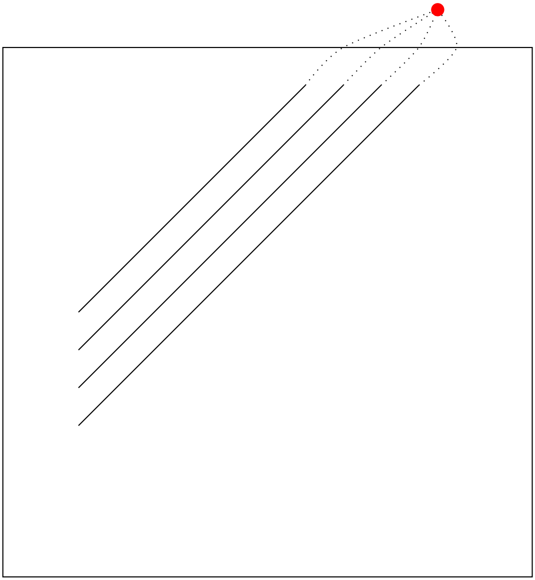
Párhuzamosság

Projektív sík

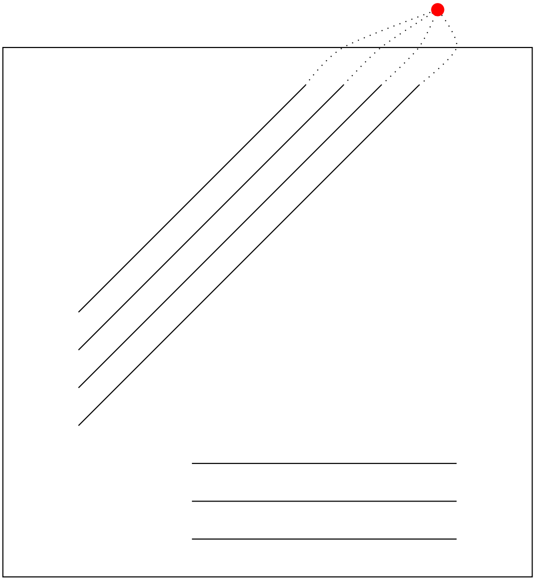
Projektív sík



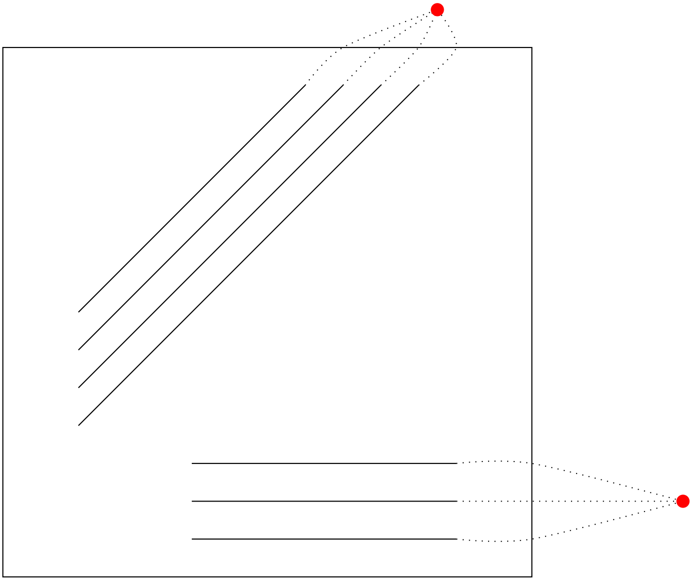
Projektív sík



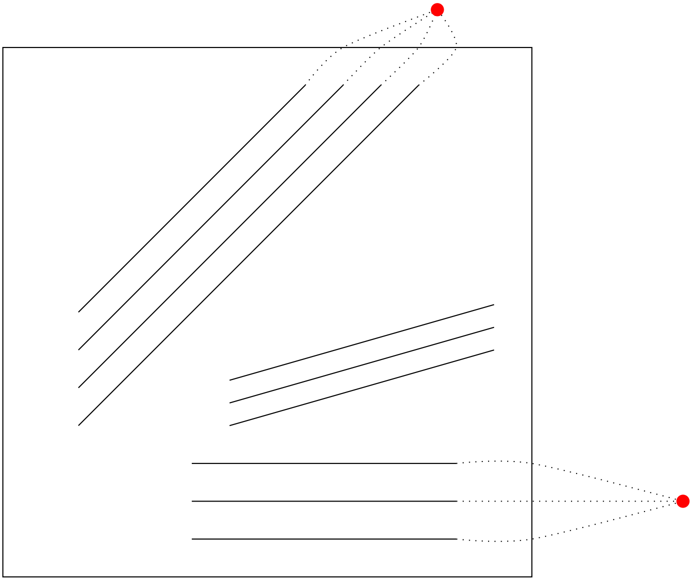
Projektív sík



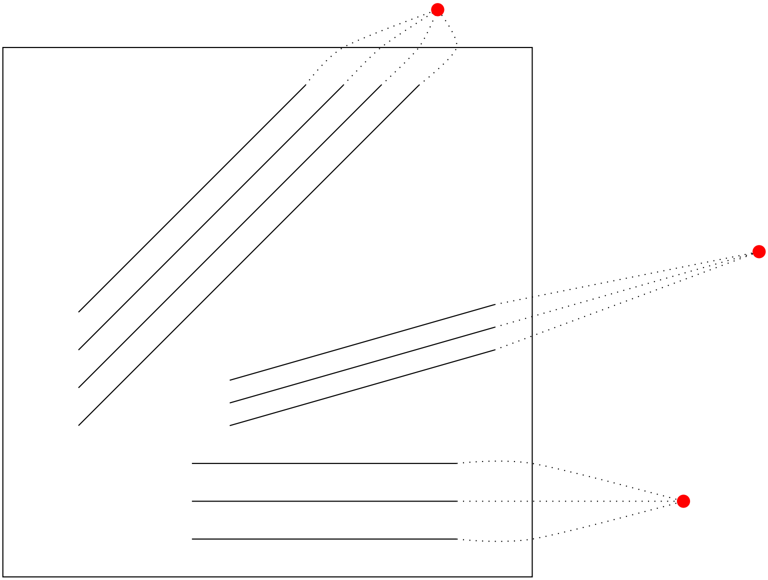
Projektív sík



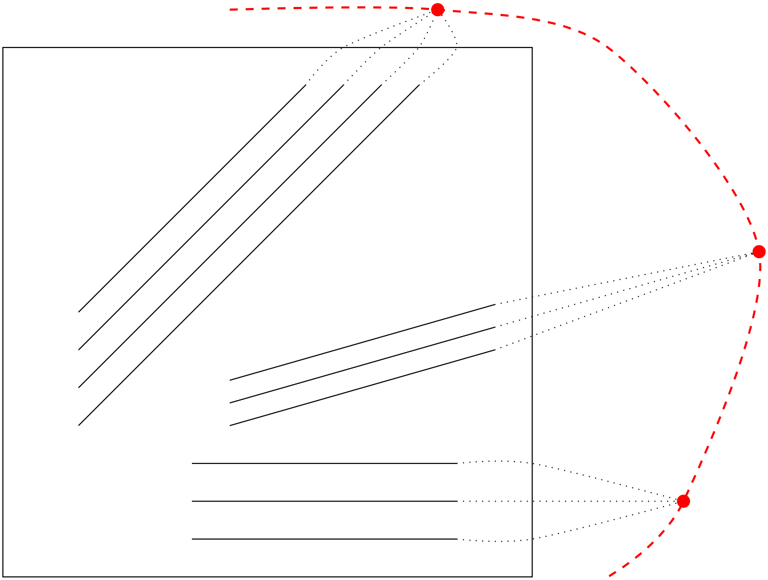
Projektív sík



Projektív sík



Projektív sík



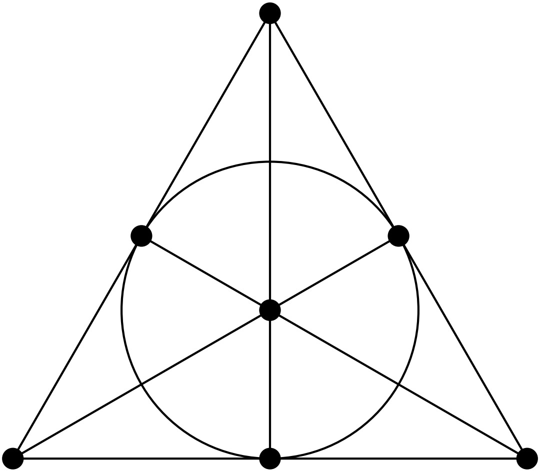
Projektív sík

- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Minden egyenesre legalább három különböző pont illeszkedik.
- Létezik legalább három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- ~~Párhuzamossági axióma~~

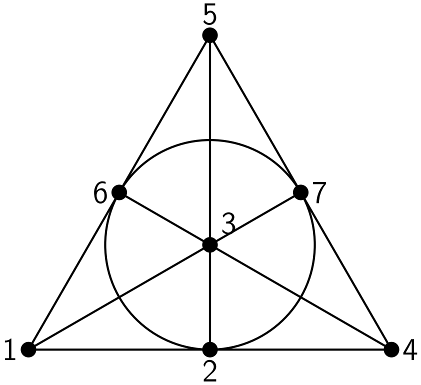
Helyette:

Bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást.

Fano-sík

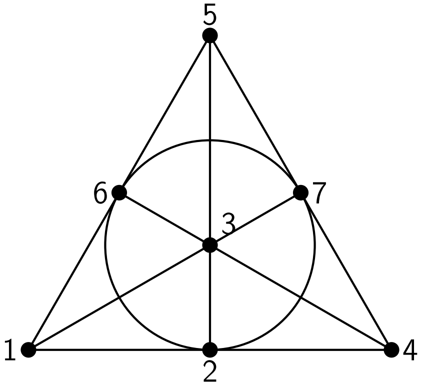


Fano-sík



Ponthalmaz: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

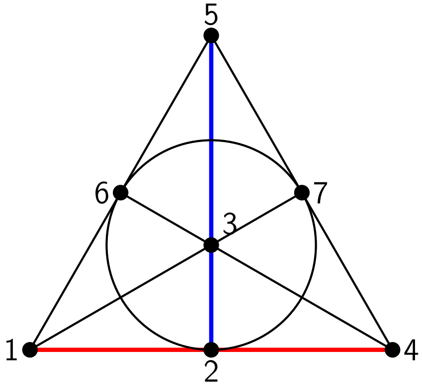
Fano-sík



Ponthalmaz: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
Egyenesek:

$$\{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{2, 6, 7\}\}$$

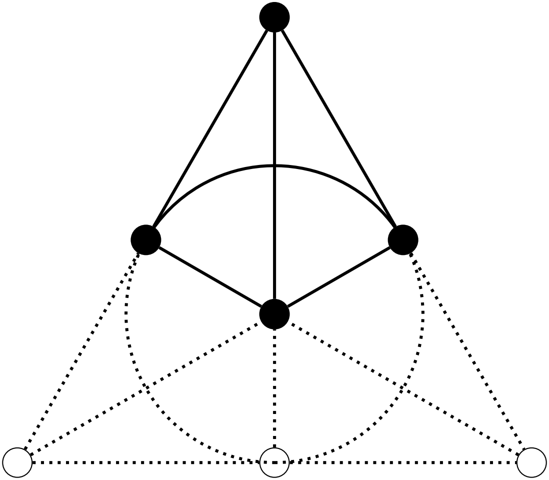
Fano-sík



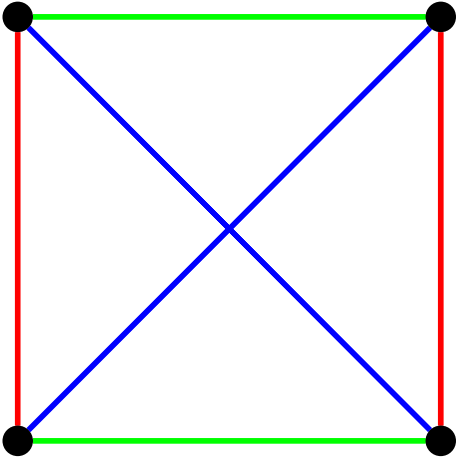
Ponthalmaz: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
Egyenesek:

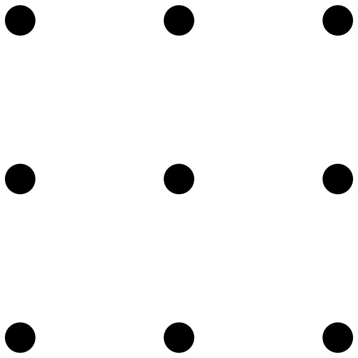
$$\{\{1,2,4\},\{1,3,7\},\{1,5,6\},\{2,3,5\},\{3,4,6\},\{4,5,7\},\{2,6,7\}\}$$

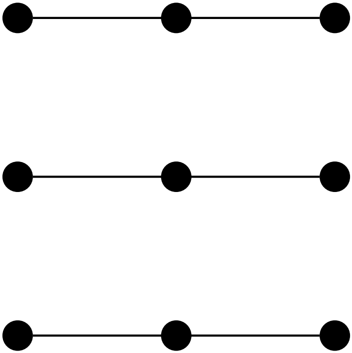
Fano-sík

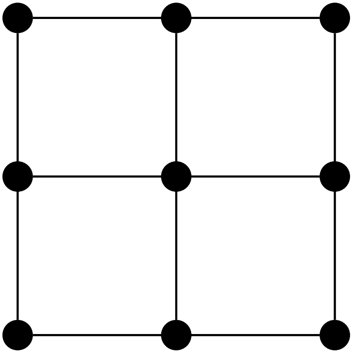


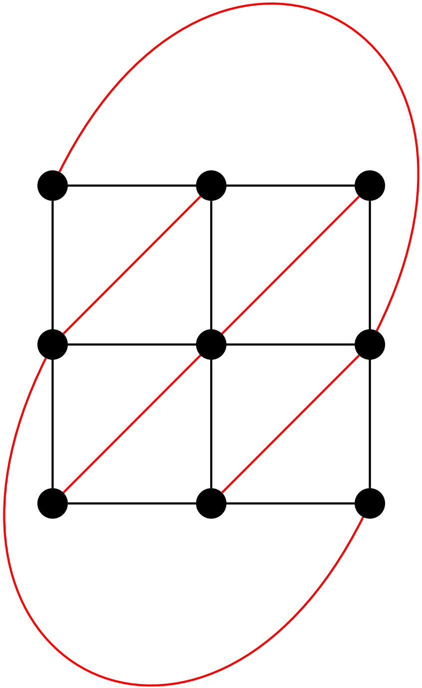
Véges affin geometria

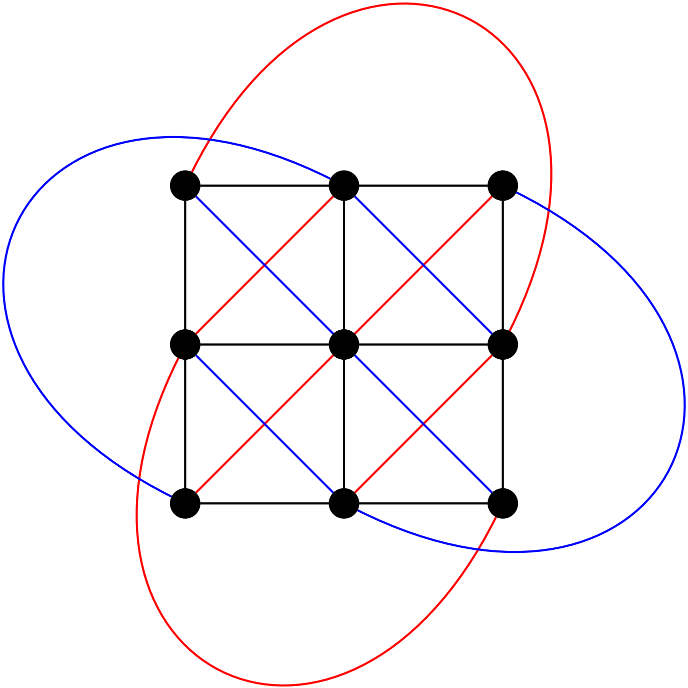


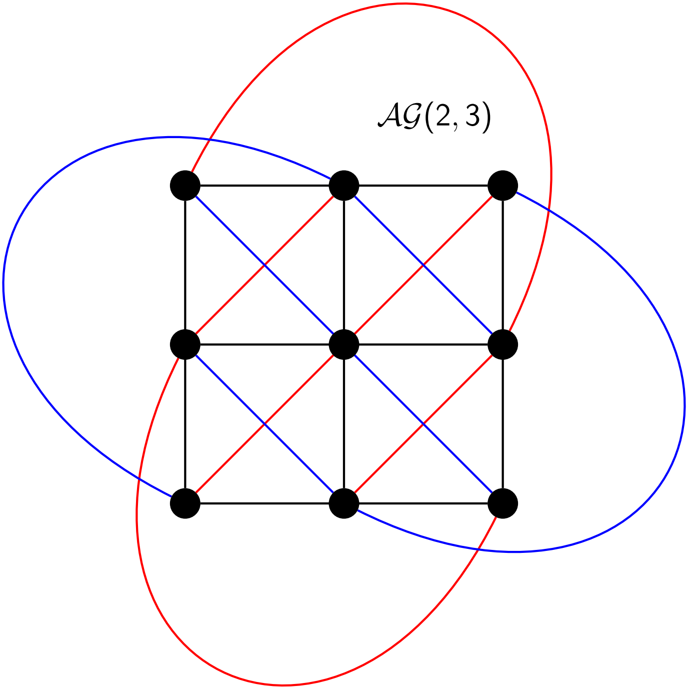











$\mathcal{AG}(2,3)$

Tartalom

Kérdések

- Hogy tudunk ilyen kártyákat konstruálni?
- 8 helyett más számú ábrával is működik?
- Ha igen, akármennyivel?
- (Hány kártya van a Dobble-ben?)

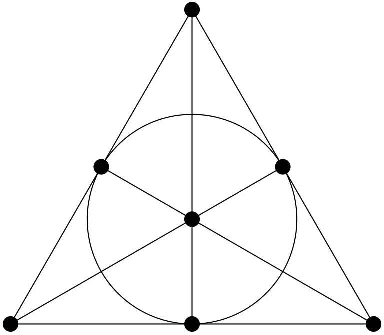
Hogy tudunk ilyen kártyákat konstruálni?

Hogy tudunk ilyen kártyákat konstruálni?

A válasz egyszerű: véges projektív síkok.

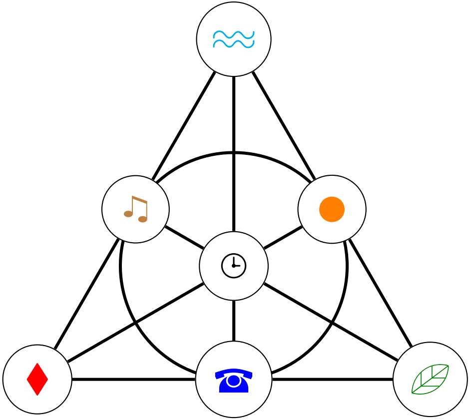
Hogy tudunk ilyen kártyákat konstruálni?

A válasz egyszerű: véges projektív síkok.

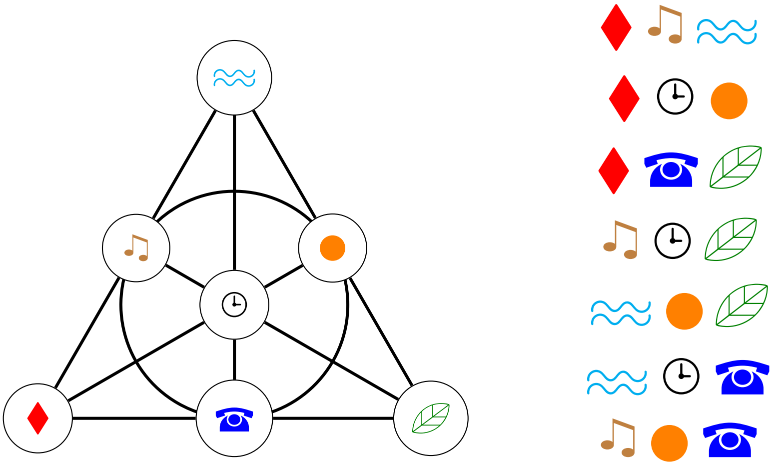


- Pont = ábra
- Egyenes = kártya
- Bármely két kártyán pontosan egy közös ábra van.
- Bármely két különböző ábra pontosan egy kártyán szerepel egyszerre.

8 ábra helyett lehet más is?



8 ábra helyett lehet más is?



Akármennyi ábrával működik?

Nem.

Projektív sík rendje	Ábraszám/kártya	
n	$n+1$	
2	3	1
3	4	1
4	5	1
5	6	1
6	7	nem létezik
7	8	1
8	9	1
9	10	4
10	11	nem létezik

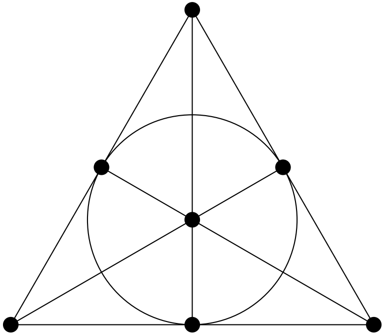
Hány kártya van a Dobble-ben?

Hány kártya van a Dobble-ben?

A válasz egyszerű: 55. (Megszámoljuk.)

Hány kártya van a Dobble-ben?

A válasz egyszerű: 55. (Megszámoljuk.)



- 7 pont
- 7 egyenes
- minden egyenesen 3 pont van
- minden pontra 3 egyenes illeszkedik

Hány kártya van a Dobble-ben?

Tétel

Ha a véges projektív síknak van olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik, akkor

(1) a sík minden egyenesén $n+1$ pont van;

(2) a sík minden pontján $n+1$ egyenes megy át;

(3) a sík összesen n^2+n+1 pontot és

(4) összesen n^2+n+1 egyenest tartalmaz.

Hány kártya van a Dobble-ben?

Tétel

Ha a véges projektív síknak van olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik, akkor

(1) a sík minden egyenesén $n+1$ pont van;

(2) a sík minden pontján $n+1$ egyenes megy át;

(3) a sík összesen n^2+n+1 pontot és

(4) összesen n^2+n+1 egyenest tartalmaz.

8 ábra van egy kártyán = minden egyenes 8 pontot tartalmaz

Hány kártya van a Dobble-ben?

Tétel

Ha a véges projektív síknak van olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik, akkor

(1) a sík minden egyenesén $n+1$ pont van;

(2) a sík minden pontján $n+1$ egyenes megy át;

(3) a sík összesen n^2+n+1 pontot és

(4) összesen n^2+n+1 egyenest tartalmaz.

8 ábra van egy kártyán = minden egyenes 8 pontot tartalmaz

Ekkor $n=7$.

Hány kártya van a Dobble-ben?

Tétel

Ha a véges projektív síknak van olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik, akkor

(1) a sík minden egyenesén $n+1$ pont van;

(2) a sík minden pontján $n+1$ egyenes megy át;

(3) a sík összesen n^2+n+1 pontot és

(4) összesen n^2+n+1 egyenest tartalmaz.

8 ábra van egy kártyán = minden egyenes 8 pontot tartalmaz
Ekkor $n=7$. Ekkor az egyenesek (kártyák) száma $7^2+7+1=57$.

Hány kártya van a Dobble-ben?

8 ábra van egy kártyán = minden egyenes 8 pontot tartalmaz

Ekkor $n = 7$. Ekkor az egyenesek (kártyák) száma $7^2 + 7 + 1 = 57$.

Hány kártya van a Dobble-ben?

8 ábra van egy kártyán = minden egyenes 8 pontot tartalmaz

Ekkor $n = 7$. Ekkor az egyenesek (kártyák) száma $7^2 + 7 + 1 = 57$.

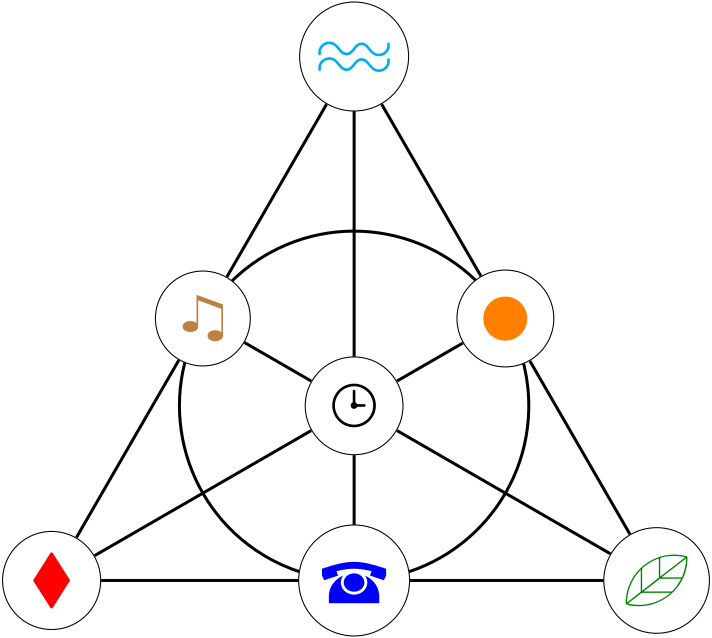
„A válasz egyszerű: 55.”

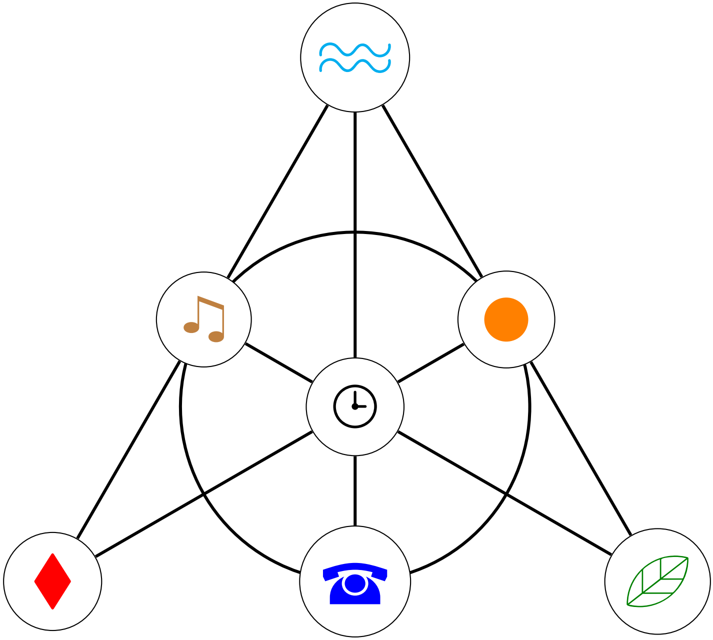
Hány kártya van a Dobble-ben?

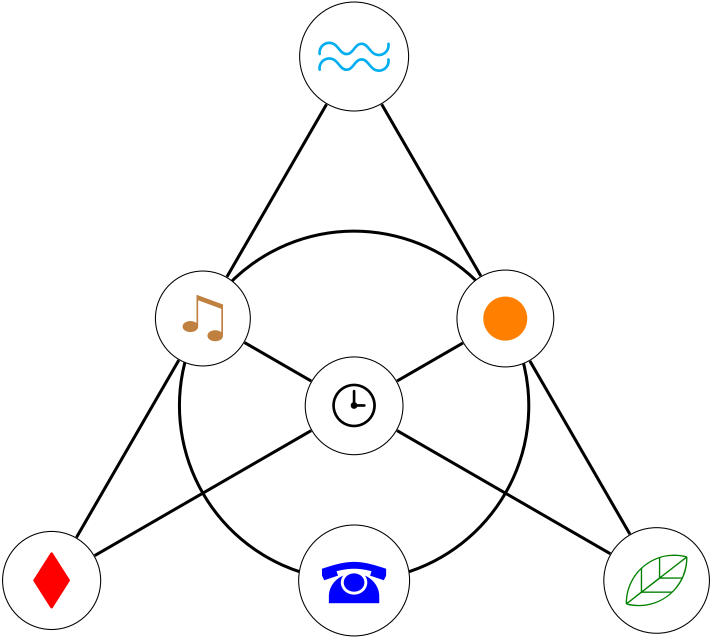
8 ábra van egy kártyán = minden egyenes 8 pontot tartalmaz

Ekkor $n = 7$. Ekkor az egyenesek (kártyák) száma $7^2 + 7 + 1 = 57$.

„A válasz egyszerű: 55.”







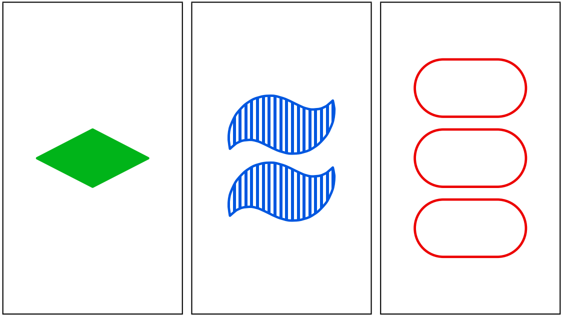
Tartalom

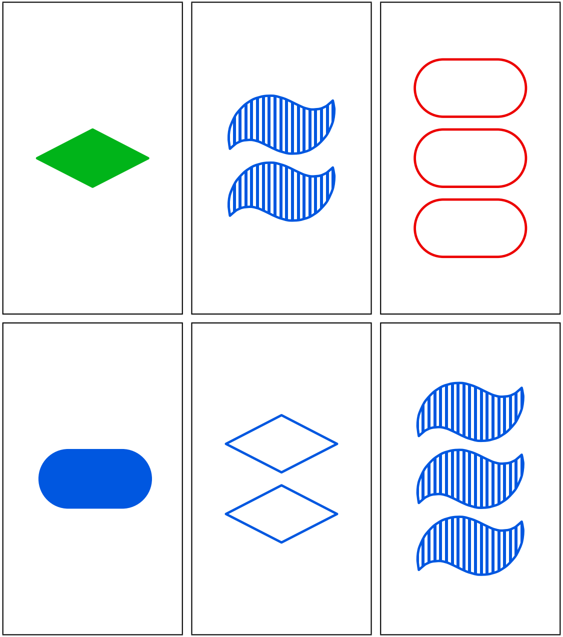
SET

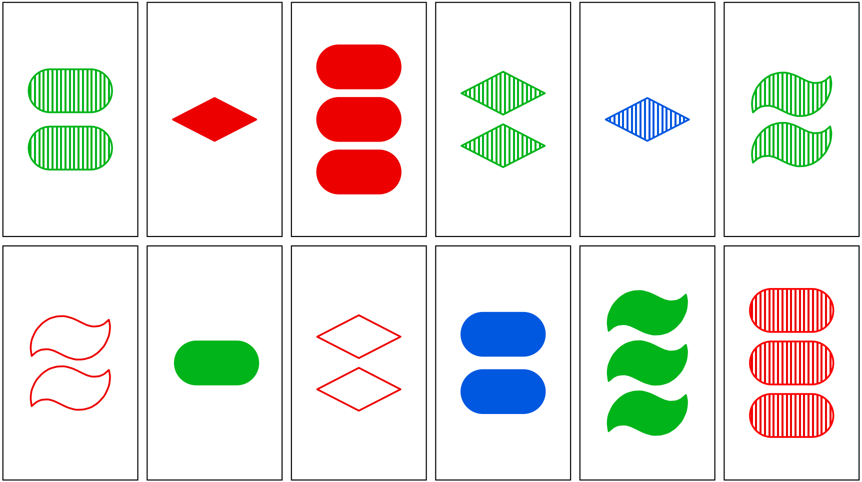
Van 81 különböző kártya:

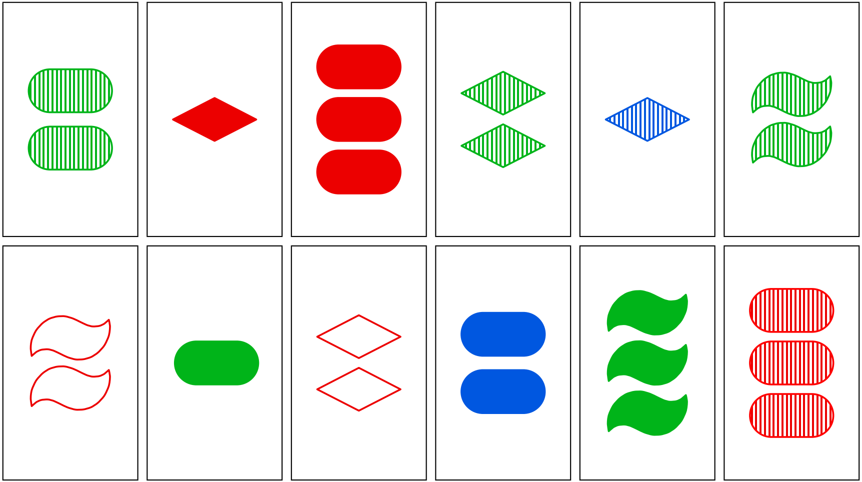
Jellemző	Változatok		
Szám	1	2	3
Szín	piros	zöld	kék
Minta	üres	tele	csíkos
Alak	ellipszis	rombusz	hullám

Három lap együtt **SET**-et alkot, ha a fenti jellemzők mindegyike vagy **teljesen egyforma**, vagy **teljesen különböző**.



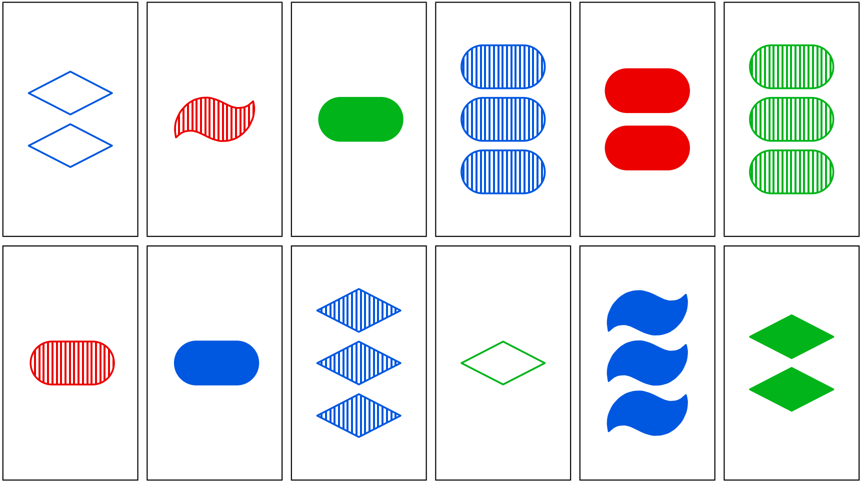


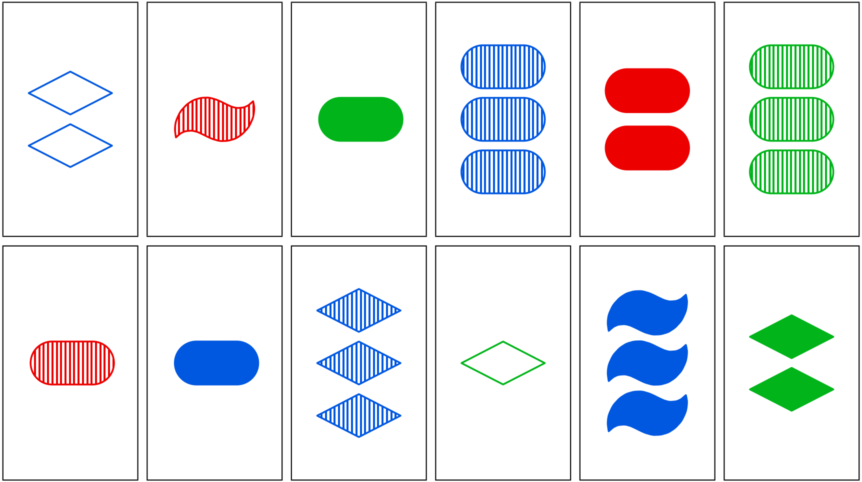




SET-ek (7 darab):

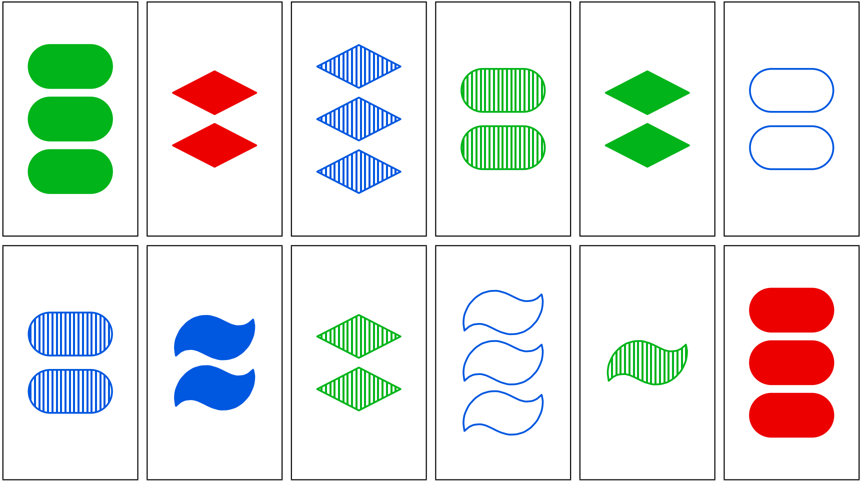
$$[1,4,6],[2,7,12],[2,10,11],[3,8,10],[4,7,10],[5,6,7],[6,9,10]$$





SET (1 darab):

$$[2, 8, 10]$$

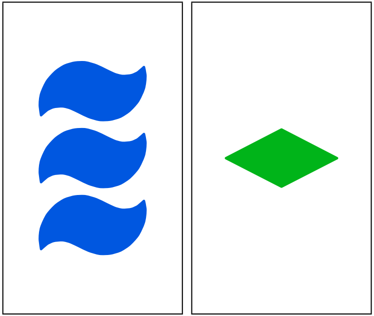


Nincs SET.

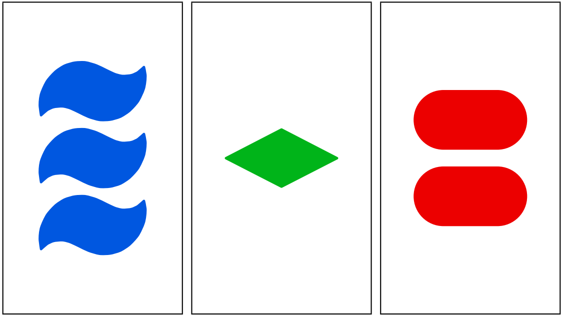
Kérdések

- Hány különböző SET van az egész pakliban?
- Mennyi a valószínűsége, hogy n kártyában nincs SET?
- Mi a matematikai modell?
- Hány kártyát tudok legfeljebb kiválasztani, hogy **ne legyen benne SET**?

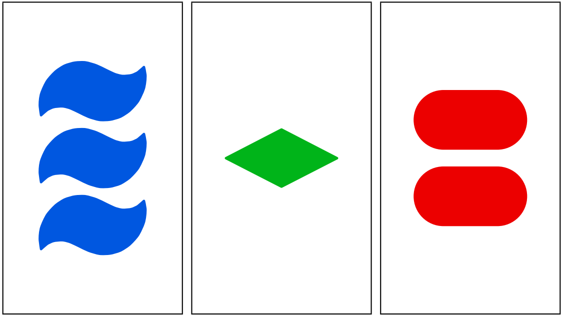
Hány különböző SET van az egész pakliban?



Hány különböző SET van az egész pakliban?



Hány különböző SET van az egész pakliban?



$$\frac{81 \times 80}{3!} = 1080$$

Mennyi a valószínűsége, hogy *n* kártyában nincs SET?

$$n = 3: \quad 1 - \frac{1080}{\binom{81}{3}} = 1 - \frac{1080}{85320} = \frac{78}{79} \approx 0.987341 \qquad \text{(Triviális)}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy *n* kártyában nincs SET?

$$n = 3: \quad 1 - \frac{1080}{\binom{81}{3}} = 1 - \frac{1080}{85320} = \frac{78}{79} \approx 0.987341 \qquad \text{(Triviális)}$$

$$n = 4: \quad 1 - \frac{1080 \cdot 78}{\binom{81}{4}} = 1 - \frac{84240}{1663740} = \frac{75}{79} \approx 0.949367 \quad \text{(Pár perc)}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy *n* kártyában nincs SET?

$$n = 3: \quad 1 - \frac{1080}{\binom{81}{3}} = 1 - \frac{1080}{85320} = \frac{78}{79} \approx 0.987341 \qquad \text{(Triviális)}$$

$$n = 4: \quad 1 - \frac{1080 \cdot 78}{\binom{81}{4}} = 1 - \frac{84240}{1663740} = \frac{75}{79} \approx 0.949367 \qquad \text{(Pár perc)}$$

$$n = 5: \quad 1 - \frac{3180060}{\binom{81}{5}} = \frac{5328}{6083} \approx 0.875884$$

(Körmendi Kristóf, tegnap du, pár óra)

Mennyi a valószínűsége, hogy *n* kártyában nincs SET?

$$n = 15: \quad \frac{1}{88} \approx 0,0113636$$

$$n = 20:$$

$$\frac{6,8 \cdot 10^6}{\binom{81}{20}} = \frac{6,8 \cdot 10^6}{4,7 \cdot 10^{18}} = 1,4 \cdot 10^{-12} = 0,0000000000014$$

Mennyi a valószínűsége, hogy n kártyában nincs SET?

$$n = 15: \quad \frac{1}{88} \approx 0,0113636$$

$n = 20$:

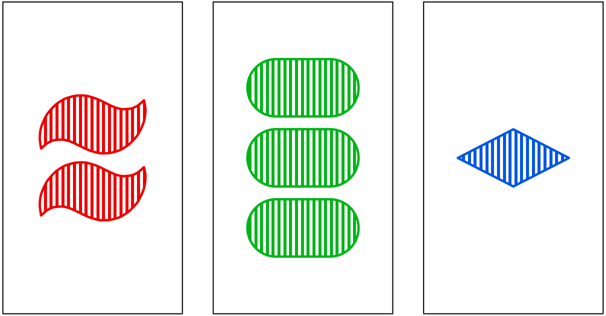
$$\frac{6,8 \cdot 10^6}{\binom{81}{20}} = \frac{6,8 \cdot 10^6}{4,7 \cdot 10^{18}} = 1,4 \cdot 10^{-12} = 0,0000000000014$$

$n = 21 : 0$

Mi a matematikai modell?

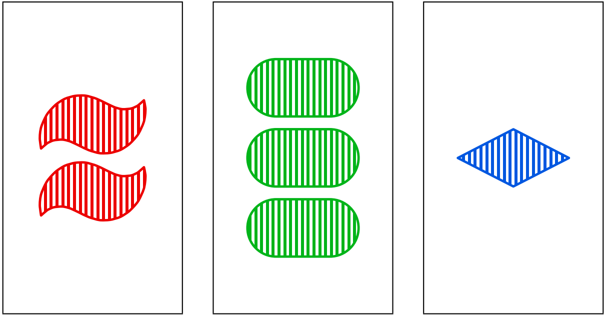
Jellemző	Változatok		
Szám	1	2	3
Szín	piros (1)	zöld (3)	kék (2)
Minta	üres (2)	tele (1)	csíkos (3)
Alak	ellipszis (2)	rombusz (1)	hullám (3)

Mi a matematikai modell?



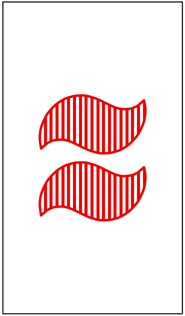
2huPc 3ovZc 1roKc

Mi a matematikai modell?

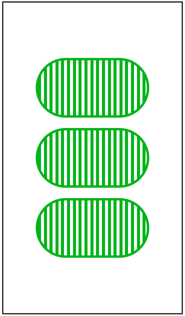


2huPc $(2; 3; 1; 3)$ | 3ovZc $(3; 2; 3; 3)$ | 1roKc $(1; 1; 2; 3)$

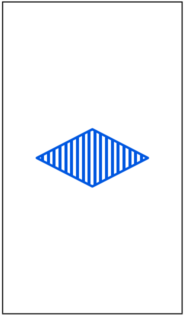
Mi a matematikai modell?



2huPc
(2; 3; 1; 3)



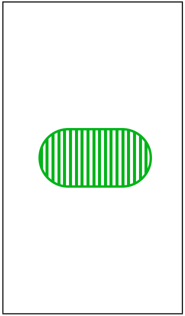
3ovZc
(3; 2; 3; 3)



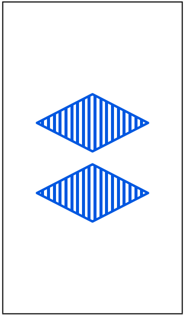
1roKc
(1; 1; 2; 3)

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 6 & 6 & 6 & 9 \end{array}$$

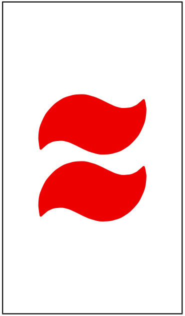
Mi a matematikai modell?



1ovZc
(1; 2; 3; 3)

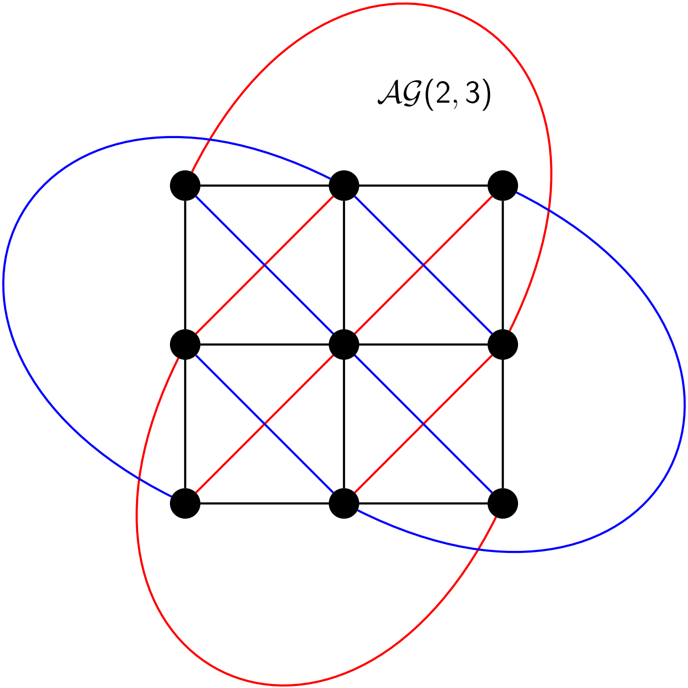


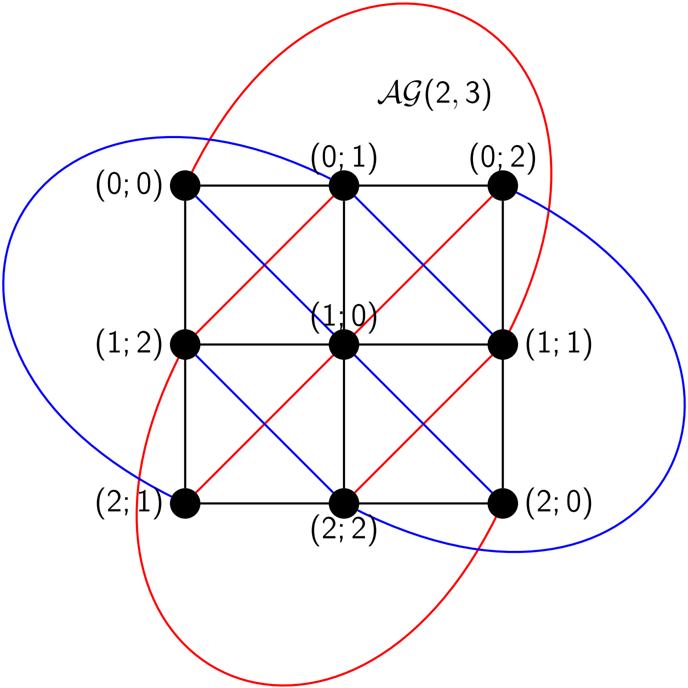
2roKc
(2; 1; 2; 3)



2huPt
(2; 3; 1; 1)

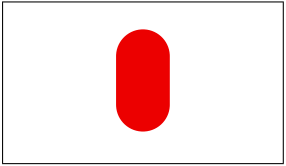
$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 3 \\
2 & 1 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 1 & 1 \\
\hline
5 & 6 & 6 & 7
\end{array}$$


$\mathcal{AG}(2,3)$

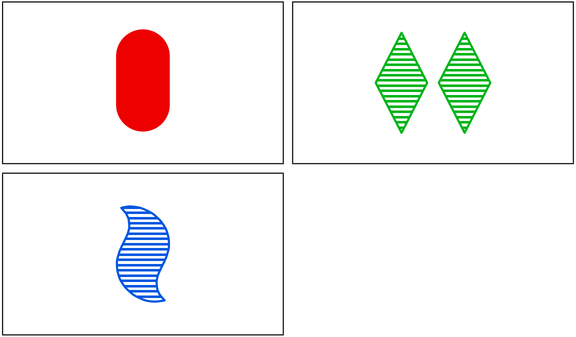


$\mathcal{AG}(2,3)$
$(0;0)$
$(0;1)$
$(0;2)$
$(1;2)$
$(1;0)$
$(1;1)$
$(2;1)$
$(2;2)$
$(2;0)$

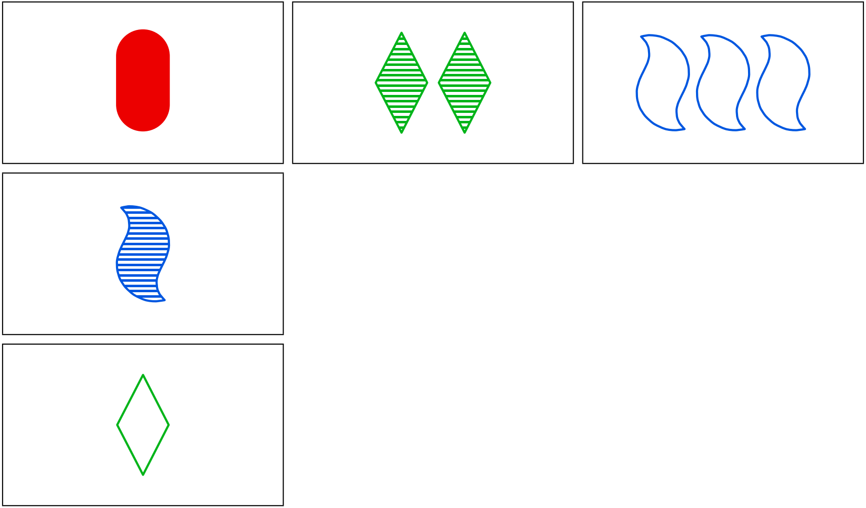
Érdekesség



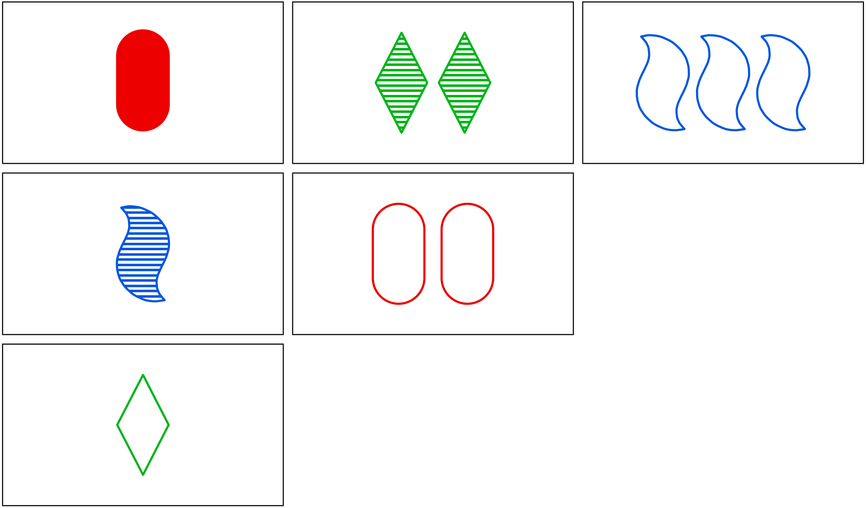
Érdekesség



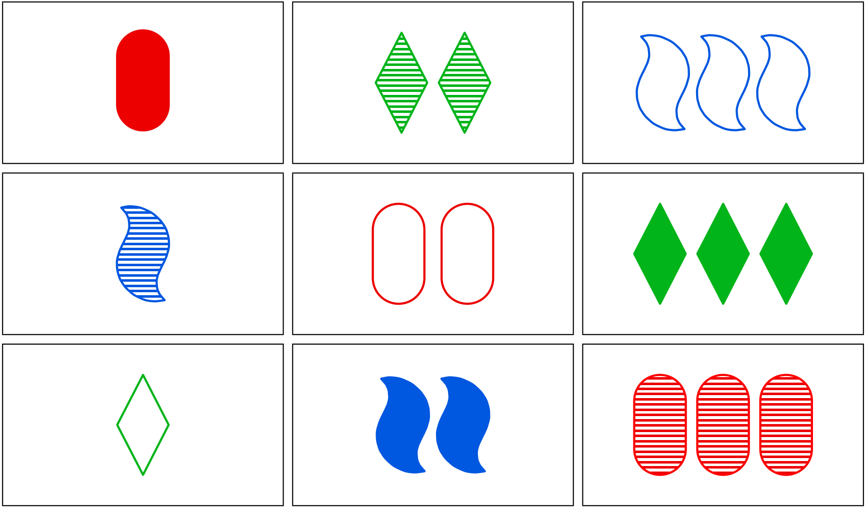
Érdekesség

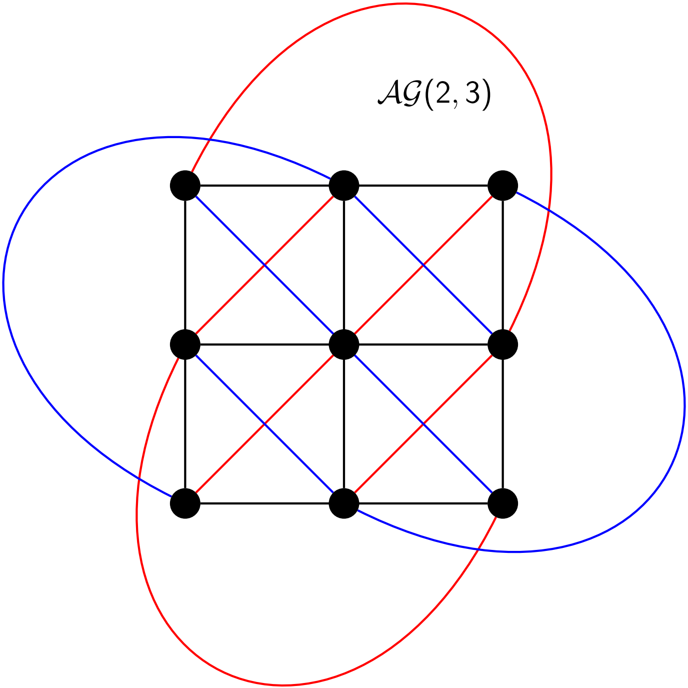


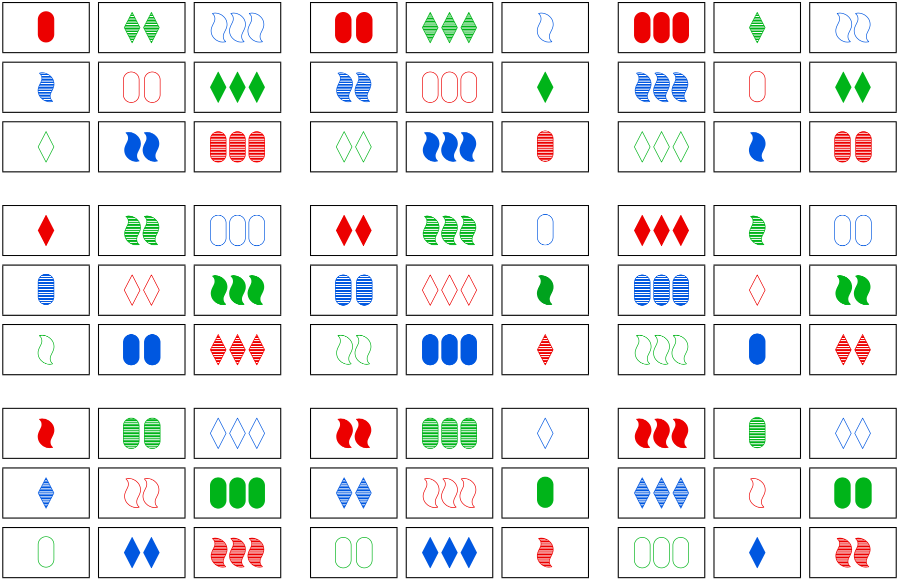
Érdekesség



Érdekesség




$\mathcal{AG}(2,3)$



Köszönöm a figyelmet!