Kártyázzunk véges geometriával

Bogya Norbert

Bolyai Intézet

Egyetemi tavasz, 2016

Tartalom

Dobble

Véges geometria

Dobble újratöltve

SET


DOBBLE
ASMODEE

Kérdések

- Hogy tudunk ilyen kártyákat konstruálni?
- 8 helyett más számú ábrával is működik?
- Ha igen, akármennyivel?
- (Hány kártya van a Dobble-ben?)

Tartalom

Dobble

Véges geometria

Dobble újratöltve

SET

Geometria

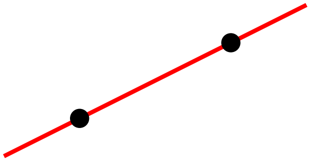
Alexandriai Eukleidész

i. e. 300.

Elemek

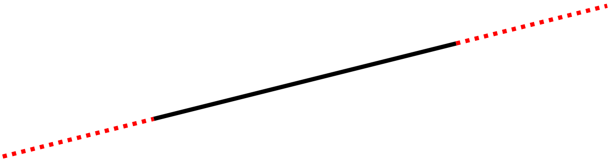
Euklidész „mindennapi” geometriája

(1) Bármely két pontra illeszkedik egy egyenes.



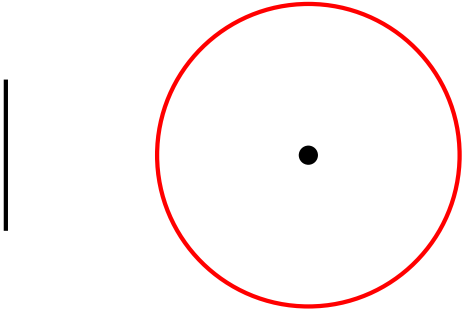
Euklidész „mindennapi" geometriája

(2) Véges egyenes vonalat folytonosan egyenes vonallá lehet hosszabbítani.



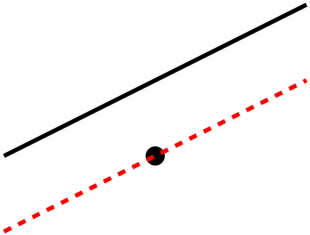
Euklidész „mindennapi” geometriája

(3) Bármely középponttal és sugárral kört lehessen rajzolni.



Euklidész „mindennapi” geometriája

(4) Párhuzamossági axióma.



Problémák

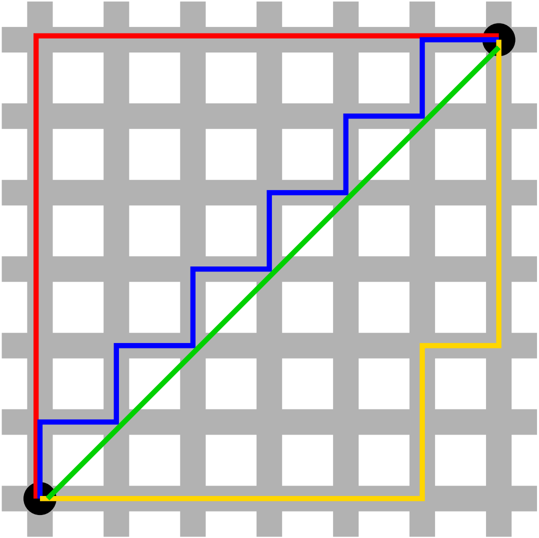
Mi történik a végtelenben?

Mi az a távolság?

Mi a kör?

Milyen is a párhuzamos?

Távolság



Affin geometria

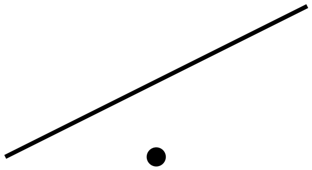
Alapfogalmak: pont, egyenes, illeszkedés.

- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
- Létezik legalább három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- Párhuzamossági axióma

Affin geometria

Alapfogalmak: pont, egyenes, illeszkedés.

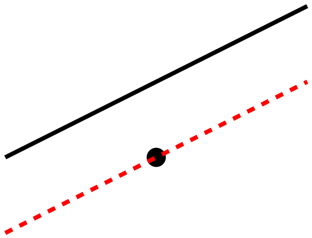
- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
- Létezik legalább három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- **Párhuzamossági axióma**



Affin geometria

Alapfogalmak: pont, egyenes, illeszkedés.

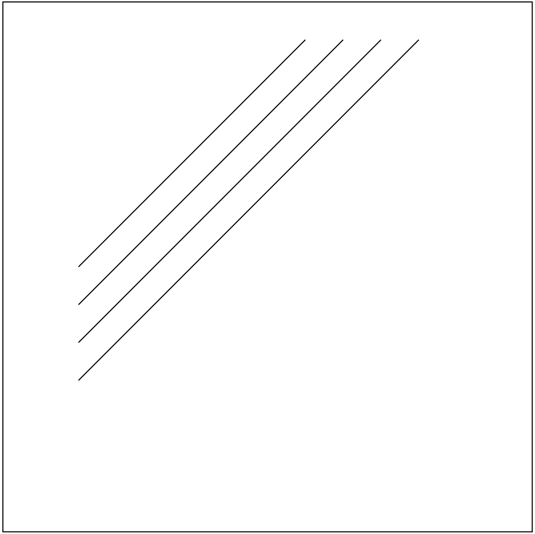
- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
- Létezik legalább három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- Párhuzamossági axióma



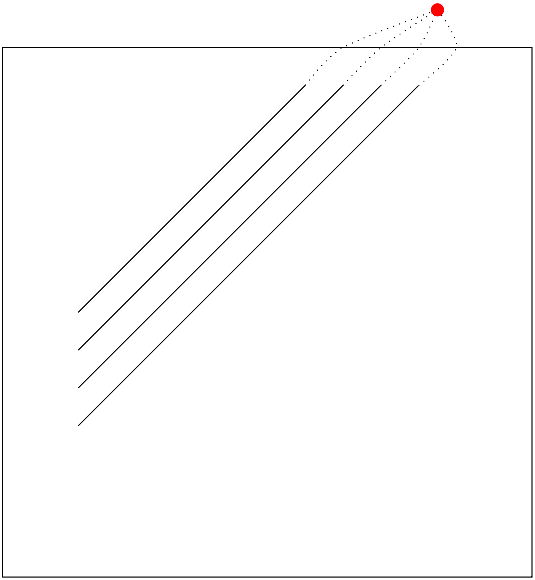
2. probléma

Projektív sík

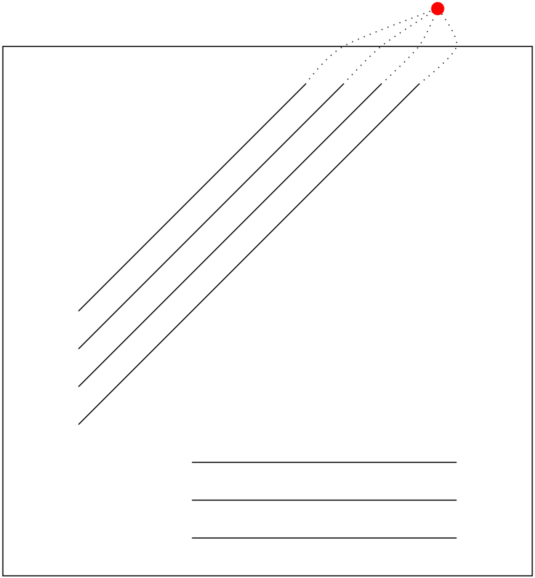
Projektív sík



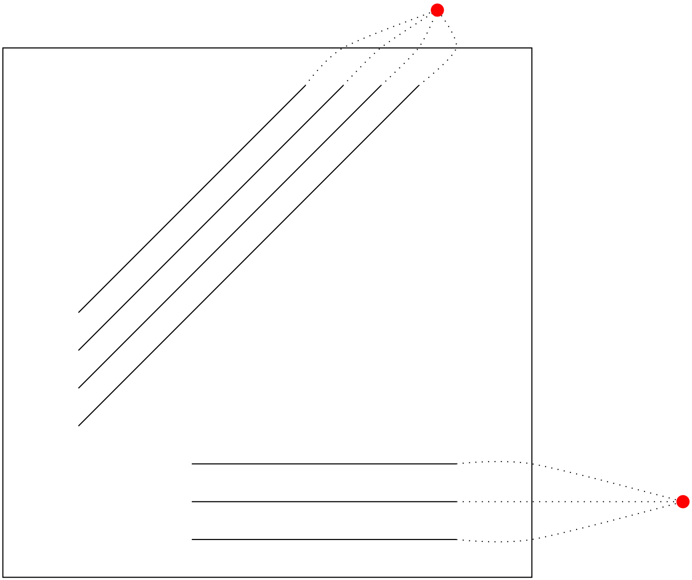
Projektív sík



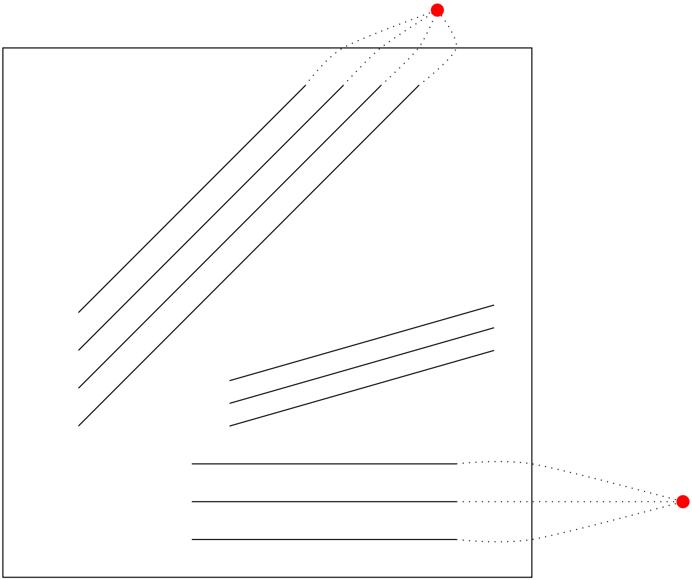
Projektív sík



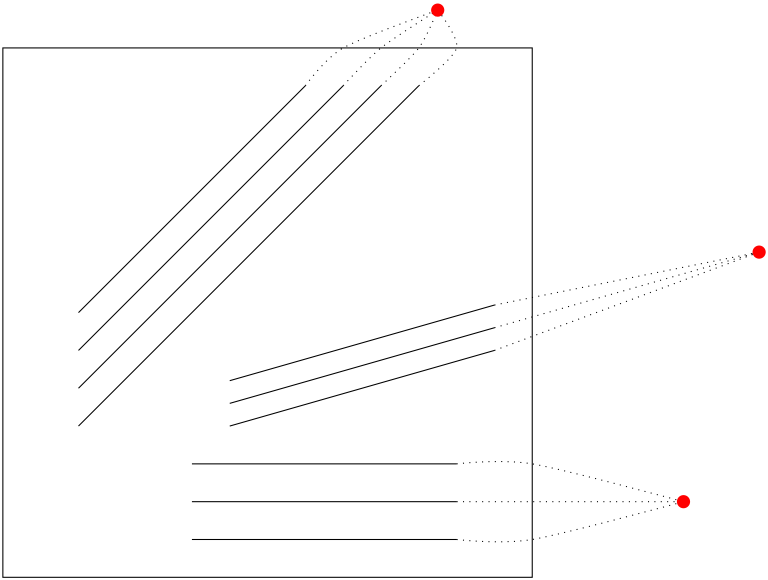
Projektív sík



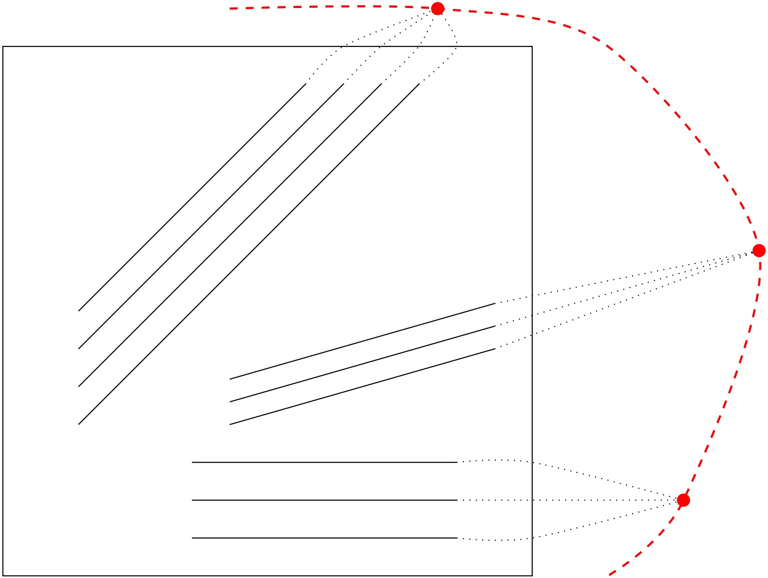
Projektív sík



Projektív sík



Projektív sík



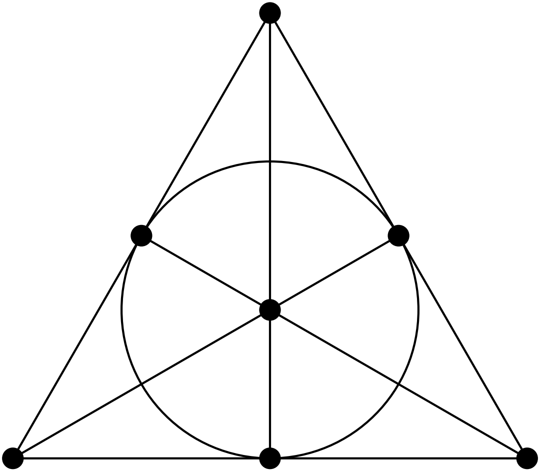
Projektív sík

- Bármely két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- Minden egyenesre legalább három különböző pont illeszkedik.
- Létezik legalább három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre.
- ~~Párhuzamossági axióma~~

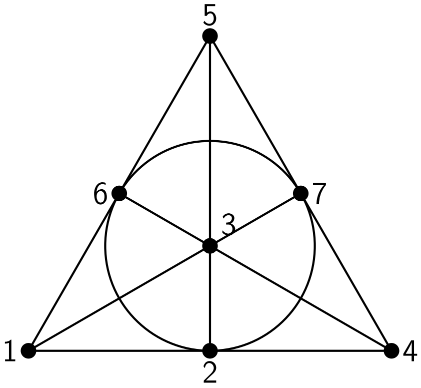
Helyette:

Bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást.

Fano-sík

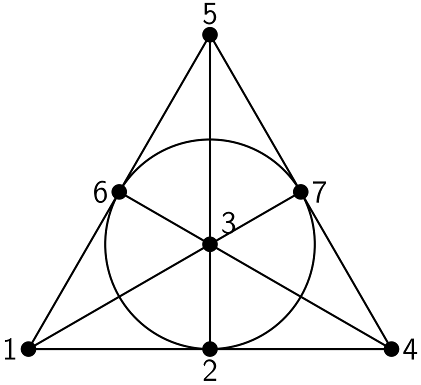


Fano-sík



Ponthalmaz: $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

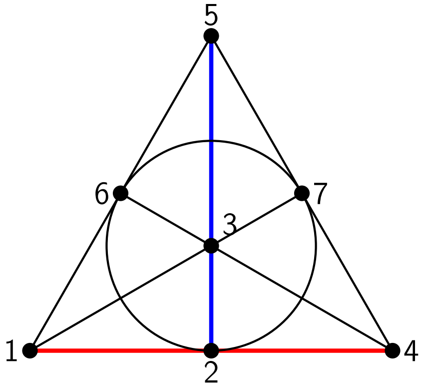
Fano-sík



Ponthalmaz: $\{1,2,3,4,5,6,7\}$
Egyenesek:

$$\{\{1,2,4\},\{1,3,7\},\{1,5,6\},\{2,3,5\},\{3,4,6\},\{4,5,7\},\{2,6,7\}\}$$

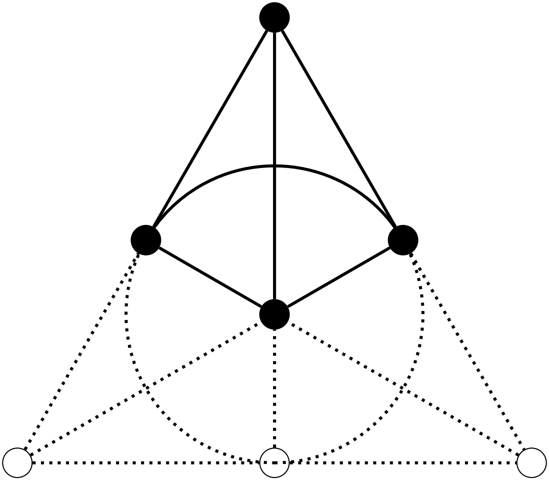
Fano-sík



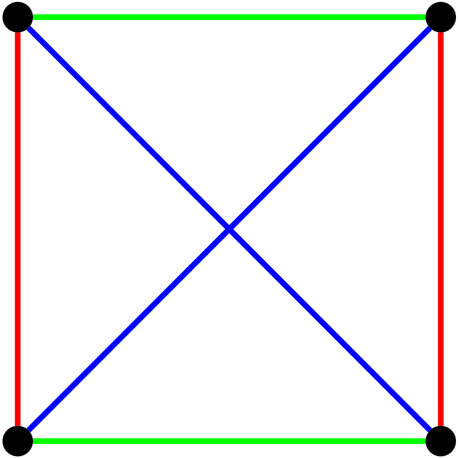
Ponthalmaz: $\{1,2,3,4,5,6,7\}$
Egyenesek:

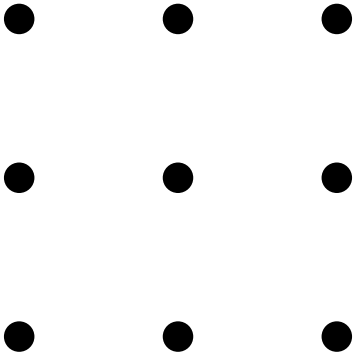
$$\{\{1,2,4\},\{1,3,7\},\{1,5,6\},\{2,3,5\},\{3,4,6\},\{4,5,7\},\{2,6,7\}\}$$

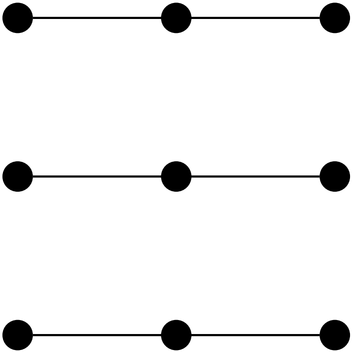
Fano-sík

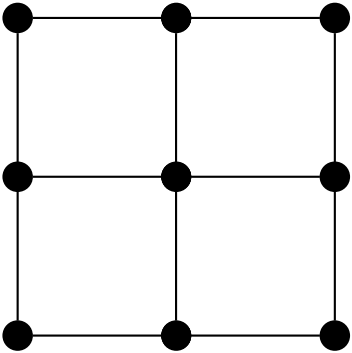


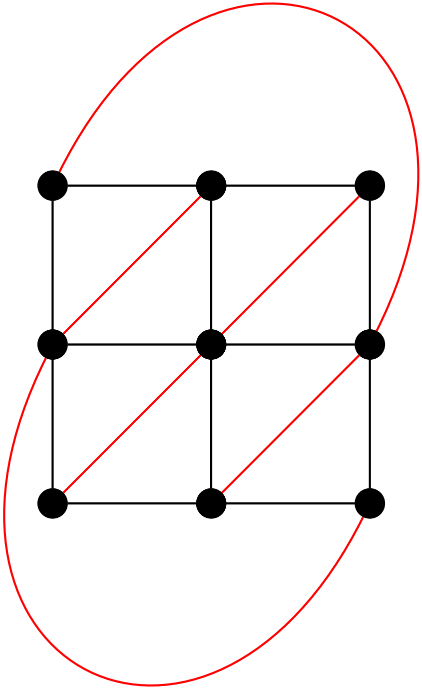
Véges affin geometria

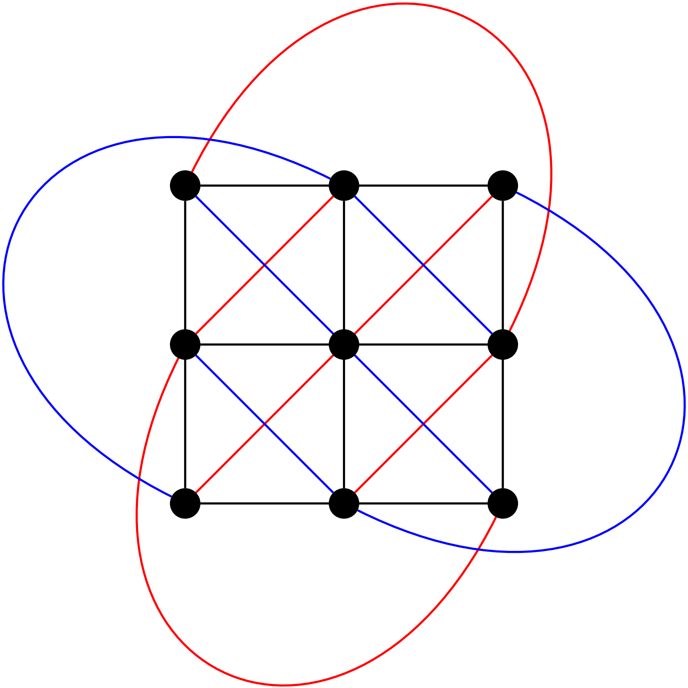


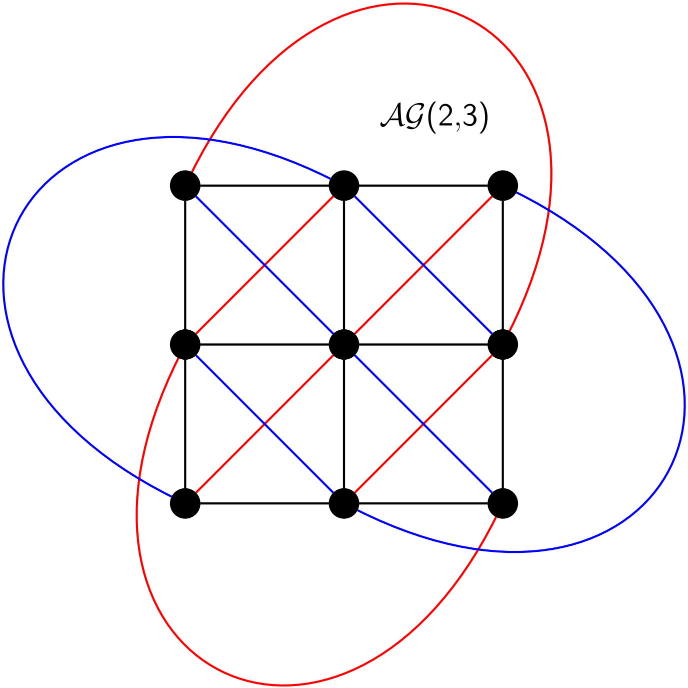











$\mathcal{AG}(2,3)$

Tartalom

Dobble

Véges geometria

Dobble újratöltve

SET

Kérdések

- Hogy tudunk ilyen kártyákat konstruálni?
- 8 helyett más számú ábrával is működik?
- Ha igen, akármennyivel?
- (Hány kártya van a Dobble-ben?)

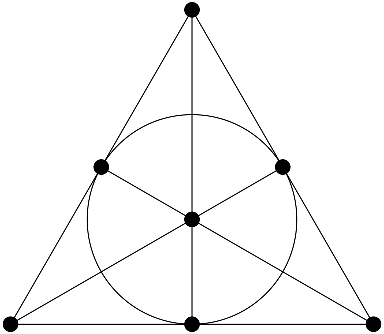
Hogy tudunk ilyen kártyákat konstruálni?

Hogy tudunk ilyen kártyákat konstruálni?

A válasz egyszerű: véges projektív síkok.

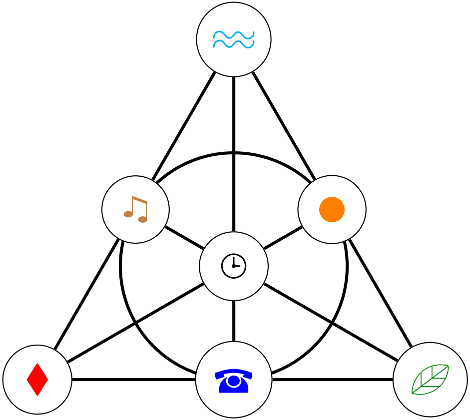
Hogy tudunk ilyen kártyákat konstruálni?

A válasz egyszerű: véges projektív síkok.

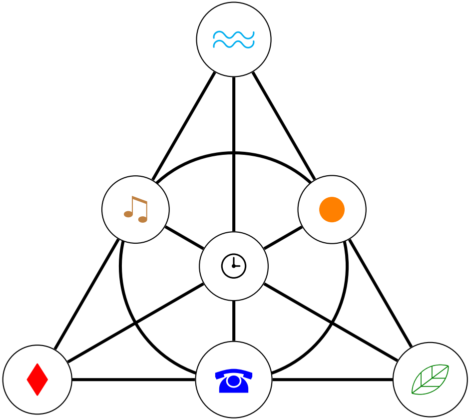


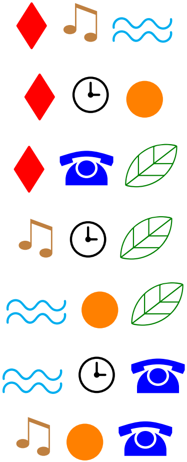
- Pont = ábra
- Egyenes = kártya
- Bármely két kártyán pontosan egy közös ábra van.
- Bármely két különböző ábra pontosan egy kártyán szerepel egyszerre.

8 ábra helyett lehet más is?



8 ábra helyett lehet más is?





Akármennyi ábrával működik?

Nem.

Projektív sík rendje	Ábraszám/kártya	
n	$n+1$	
2	3	1
3	4	1
4	5	1
5	6	1
6	7	nem létezik
7	8	1
8	9	1
9	10	4
10	11	nem létezik

Akármennyi ábrával működik?

Milyen rendű véges projektív síkokat tudunk konstruálni?

Akármennyi ábrával működik?

Milyen rendű véges projektív síkokat tudunk konstruálni?

- Ha n prímhatvány, akkor mindig tudunk konstruálni.
- Ha nem, akkor fogalmunk sincs.

Akármennyi ábrával működik?

Milyen rendű véges projektív síkokat tudunk konstruálni?

- Ha n prímhatvány, akkor mindig tudunk konstruálni.
- Ha nem, akkor fogalmunk sincs.

Sejtés

Ha n nem prímhatvány, akkor nincs n-rendű véges projektív sík.

Akármennyi ábrával működik?

Milyen rendű véges projektív síkokat tudunk konstruálni?

- Ha n prímhatvány, akkor mindig tudunk konstruálni.
- Ha nem, akkor fogalmunk sincs.

Sejtés

Ha n nem prímhatvány, akkor nincs n-rendű véges projektív sík.

De már $n = 12$-re sem tudjuk.

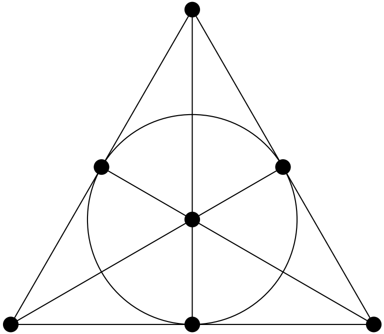
Hány kártya van a Dobble-ben?

Hány kártya van a Dobble-ben?

A válasz egyszerű: 55. (Megszámoljuk.)

Hány kártya van a Dobble-ben?

A válasz egyszerű: 55. (Megszámoljuk.)



- 7 pont
- 7 egyenes
- minden egyenesen 3 pont van
- minden pontra 3 egyenes illeszkedik

Hány kártya van a Dobble-ben?

Tétel

Ha a véges projektív síknak van olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik, akkor

(1) a sík minden egyenesén $n+1$ pont van;

(2) a sík minden pontján $n+1$ egyenes megy át;

(3) a sík összesen n^2+n+1 pontot és

(4) összesen n^2+n+1 egyenest tartalmaz.

Hány kártya van a Dobble-ben?

Tétel

Ha a véges projektív síknak van olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik, akkor

(1) a sík minden egyenesén $n+1$ pont van;

(2) a sík minden pontján $n+1$ egyenes megy át;

(3) a sík összesen n^2+n+1 pontot és

(4) összesen n^2+n+1 egyenest tartalmaz.

8 ábra van egy kártyán $=$ minden egyenes 8 pontot tartalmaz

Hány kártya van a Dobble-ben?

Tétel

Ha a véges projektív síknak van olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik, akkor

(1) a sík minden egyenesén $n+1$ pont van;

(2) a sík minden pontján $n+1$ egyenes megy át;

(3) a sík összesen n^2+n+1 pontot és

(4) összesen n^2+n+1 egyenest tartalmaz.

8 ábra van egy kártyán $=$ minden egyenes 8 pontot tartalmaz
Ekkor $n=7$.

Hány kártya van a Dobble-ben?

Tétel

Ha a véges projektív síknak van olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik, akkor

(1) a sík minden egyenesén $n+1$ pont van;

(2) a sík minden pontján $n+1$ egyenes megy át;

(3) a sík összesen n^2+n+1 pontot és

(4) összesen n^2+n+1 egyenest tartalmaz.

8 ábra van egy kártyán = minden egyenes 8 pontot tartalmaz
Ekkor $n = 7$. Ekkor az egyenesek (kártyák) száma $7^2+7+1=57$.

Hány kártya van a Dobble-ben?

8 ábra van egy kártyán = minden egyenes 8 pontot tartalmaz

Ekkor $n = 7$. Ekkor az egyenesek (kártyák) száma $7^2 + 7 + 1 = 57$.

Hány kártya van a Dobble-ben?

8 ábra van egy kártyán = minden egyenes 8 pontot tartalmaz

Ekkor $n = 7$. Ekkor az egyenesek (kártyák) száma $7^2 + 7 + 1 = 57$.

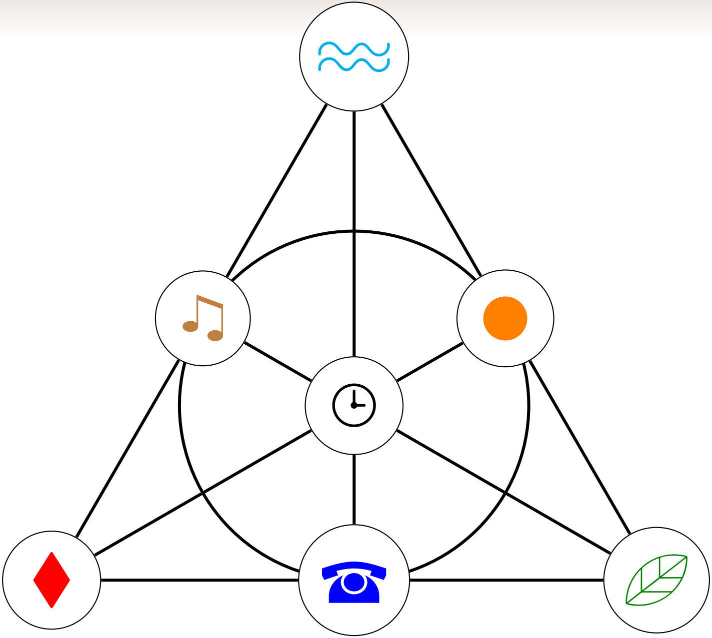
„A válasz egyszerű: 55."

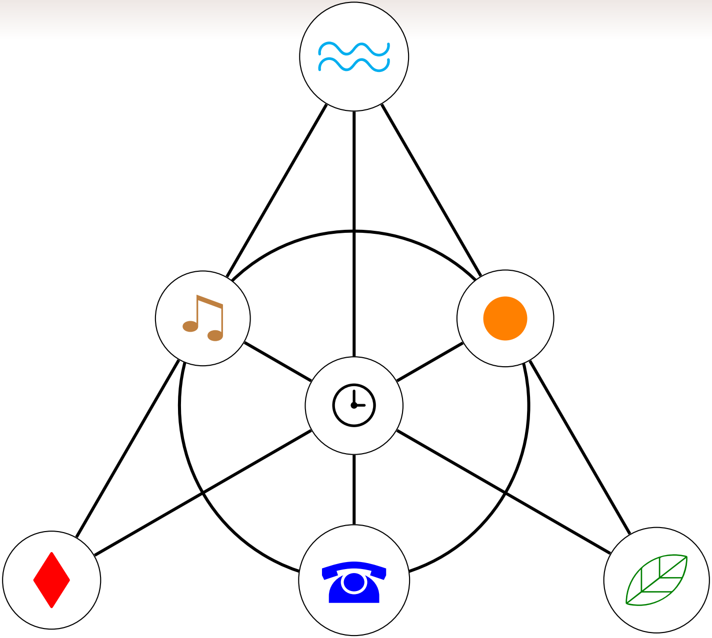
Hány kártya van a Dobble-ben?

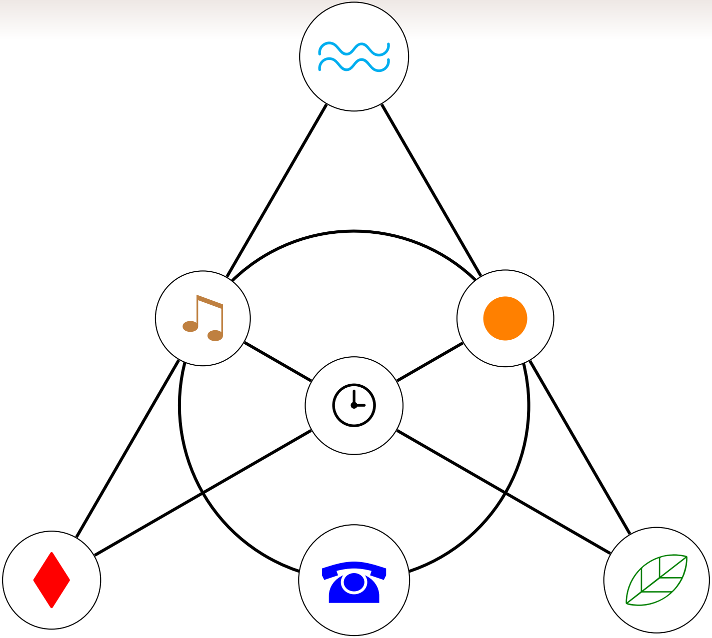
8 ábra van egy kártyán = minden egyenes 8 pontot tartalmaz

Ekkor $n = 7$. Ekkor az egyenesek (kártyák) száma $7^2 + 7 + 1 = 57$.

„A válasz egyszerű: 55."







Tartalom

Dobble

Véges geometria

Dobble újratöltve

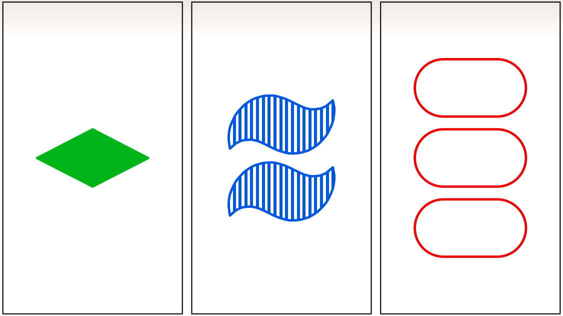
SET

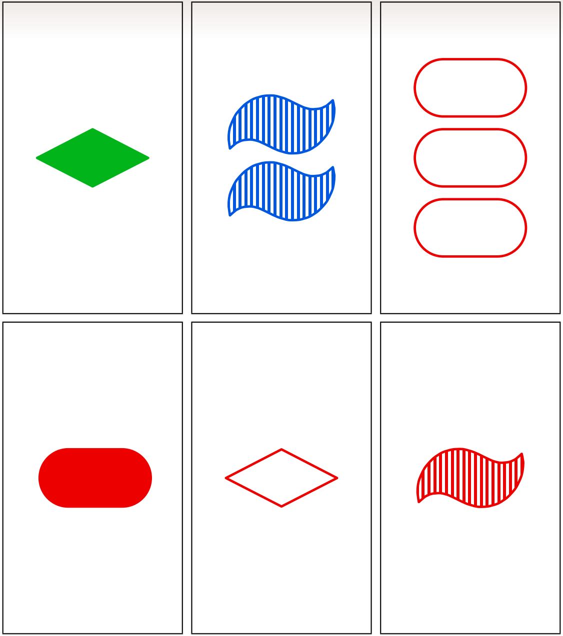
SET

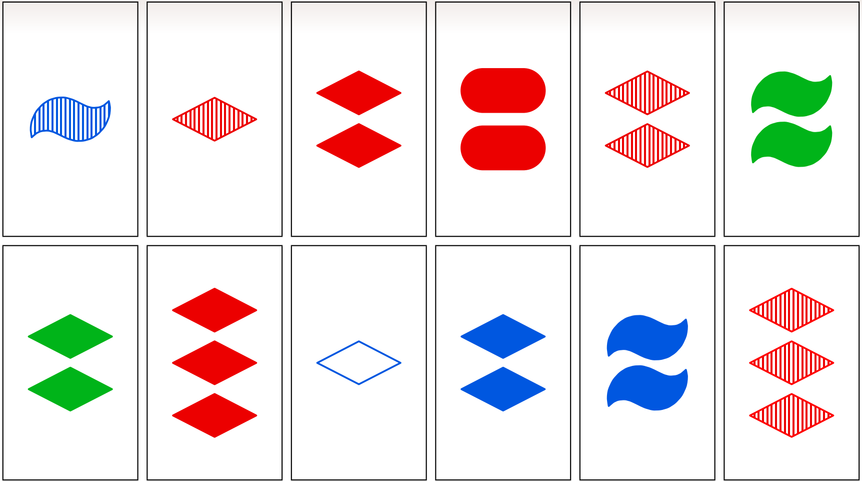
Van 81 különböző kártya:

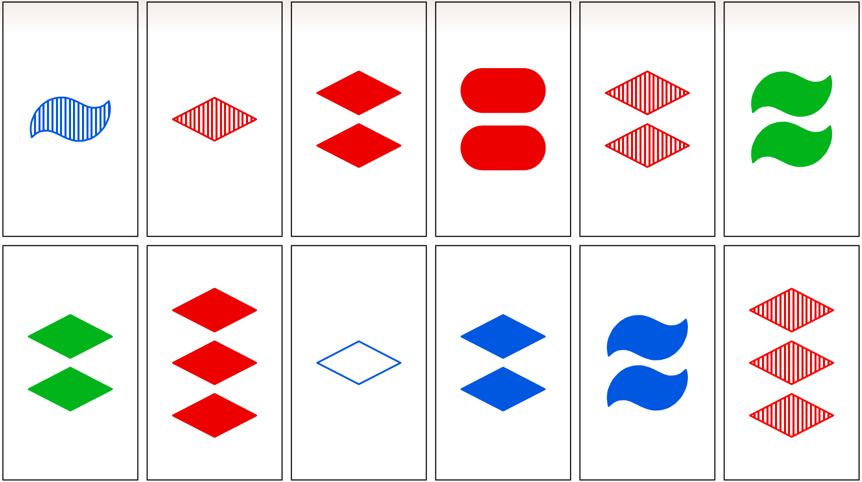
Jellemző	Változatok		
Szám	1	2	3
Szín	piros	zöld	kék
Minta	üres	tele	csíkos
Alak	ellipszis	rombusz	hullám

Három lap együtt **SET**-et alkot, ha a fenti jellemzők mindegyike vagy **teljesen egyforma**, vagy **teljesen különböző**.



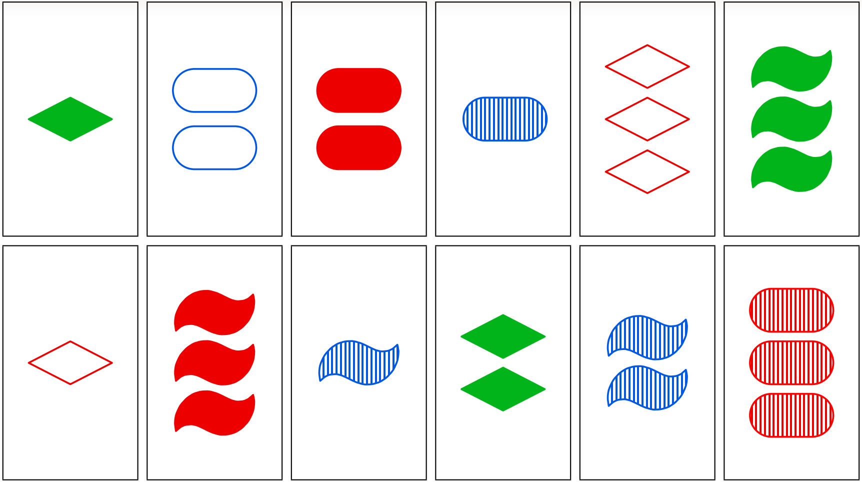


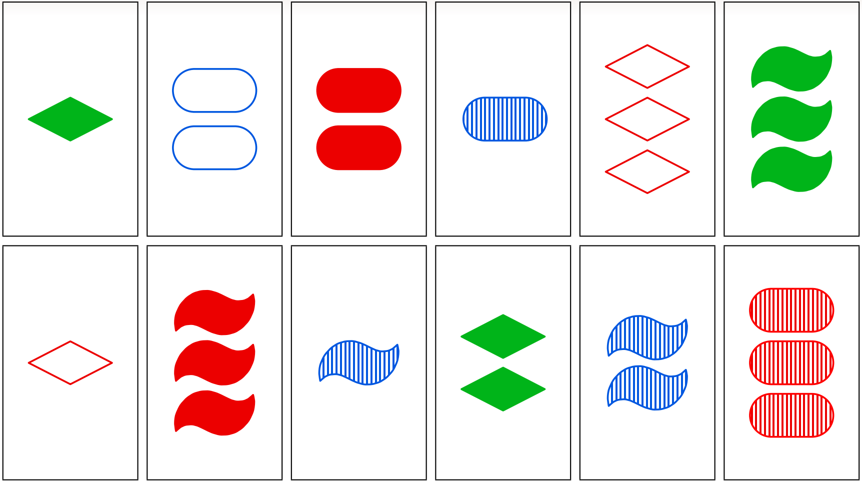




SET-ek (5 darab):

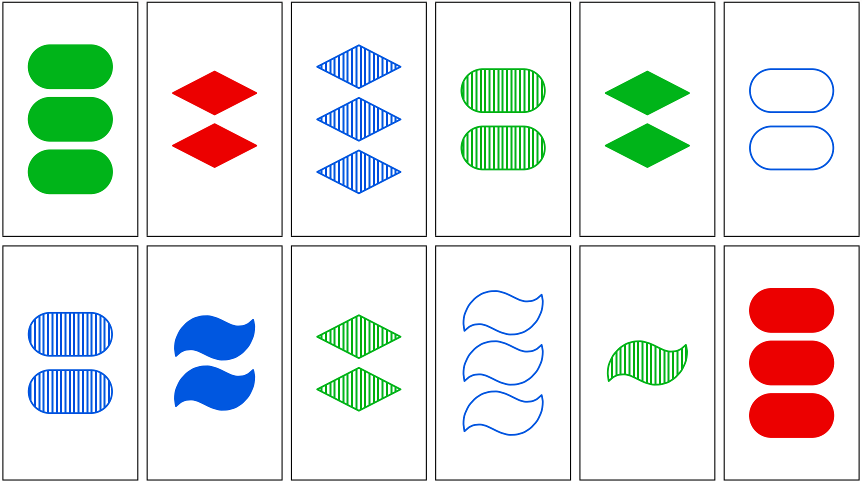
$$\{2,5,12\},\{3,7,10\},\{4,6,10\},\{4,7,11\},\{7,9,12\}$$

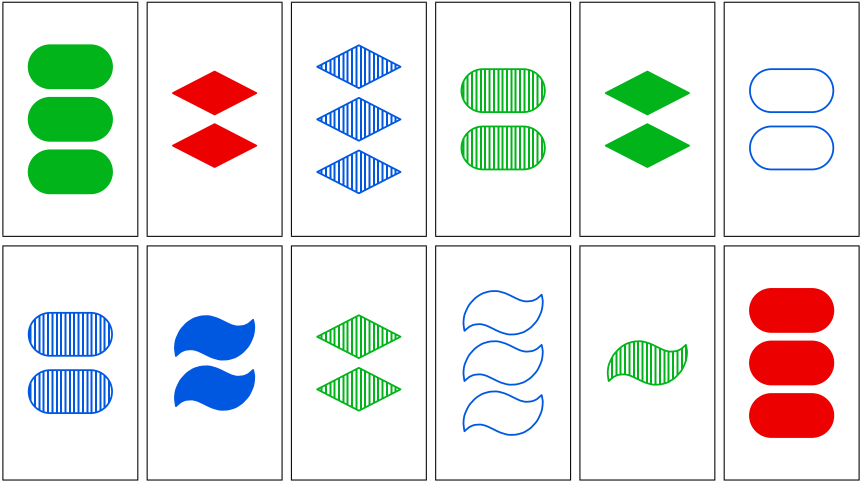




SET (1 darab):

$$\{5,8,12\}$$



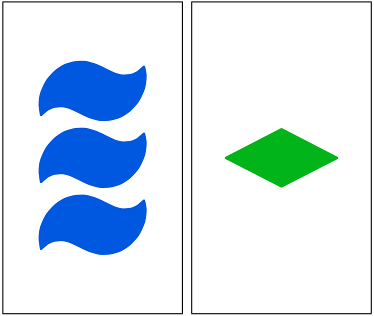


Nincs SET.

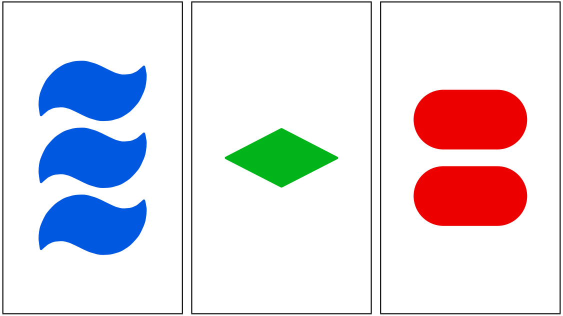
Kérdések

- Hány különböző SET van az egész pakliban?
- Egy adott kártya hány különböző SET-ben szerepel?
- Mennyi a valószínűsége, hogy n kártyában nincs SET?
- Mi a matematikai modell?
- Hány kártyát tudok legfeljebb kiválasztani, hogy **ne legyen benne SET**?

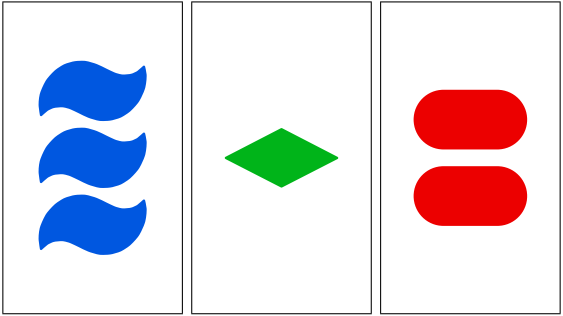
Hány különböző SET van az egész pakliban?



Hány különböző SET van az egész pakliban?



Hány különböző SET van az egész pakliban?



$$\frac{81 \times 80}{3!} = 1080$$

Egy adott kártya hány különböző SET-ben szerepel?

$$\frac{1 \times 80}{2} = 40$$

Mennyi a valószínűsége, hogy *n* kártyában nincs SET?

$$n = 3: \quad 1 - \frac{1080}{\binom{81}{3}} = 1 - \frac{1080}{85320} = \frac{78}{79} \approx 0{,}987341$$

Mennyi a valószínűsége, hogy n kártyában nincs SET?

$$n = 3: \quad 1 - \frac{1080}{\binom{81}{3}} = 1 - \frac{1080}{85320} = \frac{78}{79} \approx 0{,}987341$$

$$n = 4: \quad 1 - \frac{1080 \cdot 78}{\binom{81}{4}} = 1 - \frac{84240}{1663740} = \frac{75}{79} \approx 0{,}949367$$

Mennyi a valószínűsége, hogy n kártyában nincs SET?

$$n = 3: \quad 1 - \frac{1080}{\binom{81}{3}} = 1 - \frac{1080}{85320} = \frac{78}{79} \approx 0{,}987341$$

$$n = 4: \quad 1 - \frac{1080 \cdot 78}{\binom{81}{4}} = 1 - \frac{84240}{1663740} = \frac{75}{79} \approx 0{,}949367$$

$$n = 15: \quad \frac{1}{88} \approx 0{,}0113636$$

Mennyi a valószínűsége, hogy *n* kártyában nincs SET?

$$n = 3: \quad 1 - \frac{1080}{\binom{81}{3}} = 1 - \frac{1080}{85320} = \frac{78}{79} \approx 0{,}987341$$

$$n = 4: \quad 1 - \frac{1080 \cdot 78}{\binom{81}{4}} = 1 - \frac{84240}{1663740} = \frac{75}{79} \approx 0{,}949367$$

$$n = 15: \quad \frac{1}{88} \approx 0{,}0113636$$

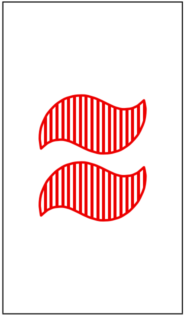
$n = 20$:

$$\frac{6{,}8 \cdot 10^6}{\binom{81}{20}} = \frac{6{,}8 \cdot 10^6}{4{,}7 \cdot 10^{18}} = 1{,}4 \cdot 10^{-12} = 0{,}0000000000014$$

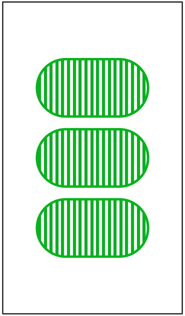
Mi a matematikai modell?

Jellemző	Változatok		
Szám	1	2	3
Szín	piros (1)	zöld (3)	kék (2)
Minta	üres (2)	tele (1)	csíkos (3)
Alak	ellipszis (2)	rombusz (1)	hullám (3)

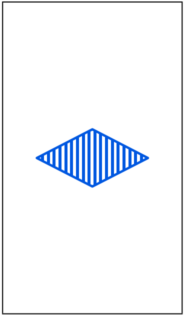
Mi a matematikai modell?



2huPc

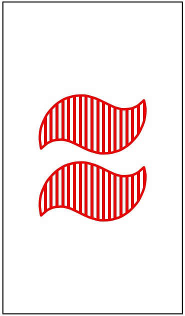


3ovZc

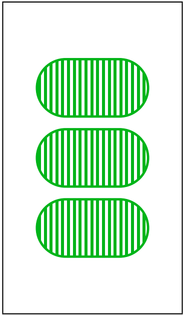


1roKc

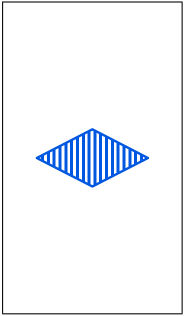
Mi a matematikai modell?



2huPc
(2; 3; 1; 3)

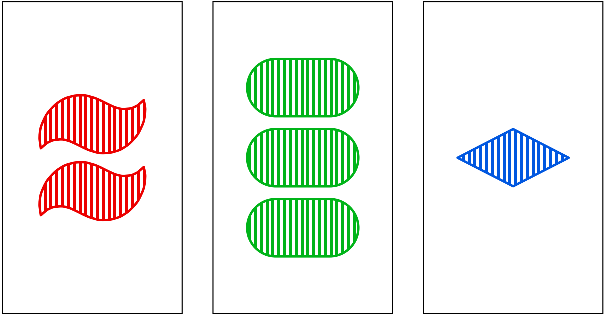


3ovZc
(3; 2; 3; 3)



1roKc
(1; 1; 2; 3)

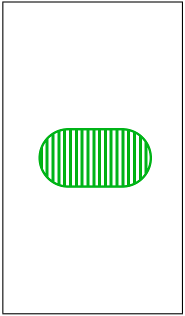
Mi a matematikai modell?



2huPc (2; 3; 1; 3) | 3ovZc (3; 2; 3; 3) | 1roKc (1; 1; 2; 3)

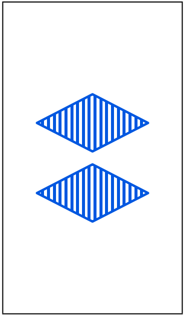
$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 6 & 6 & 6 & 9 \end{array}$$

Mi a matematikai modell?



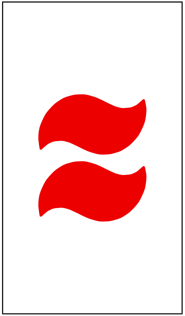
1ovZc

(1; 2; 3; 3)



2roKc

(2; 1; 2; 3)



2huPt

(2; 3; 1; 1)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 5 & 6 & 6 & 7 \end{array}$$

Mi a matematikai modell?

- $\mathbb{Z}_3$: ugyanúgy számolunk, mint ahogy megszoktuk, de a végeredményként a 3-mal vett osztási maradékot nézzük. Például

$$2 + 2 = 1, \quad 1 + 2 = 0.$$

Mi a matematikai modell?

- $\mathbb{Z}_3$: ugyanúgy számolunk, mint ahogy megszoktuk, de a végeredményként a 3-mal vett osztási maradékot nézzük. Például
$$2+2=1, \quad 1+2=0.$$
- Kártya: $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}_3^4$

Mi a matematikai modell?

- $\mathbb{Z}_3$: ugyanúgy számolunk, mint ahogy megszoktuk, de a végeredményként a 3-mal vett osztási maradékot nézzük. Például
$$2+2=1, \quad 1+2=0.$$

- Kártya: $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}_3^4$
- SET:

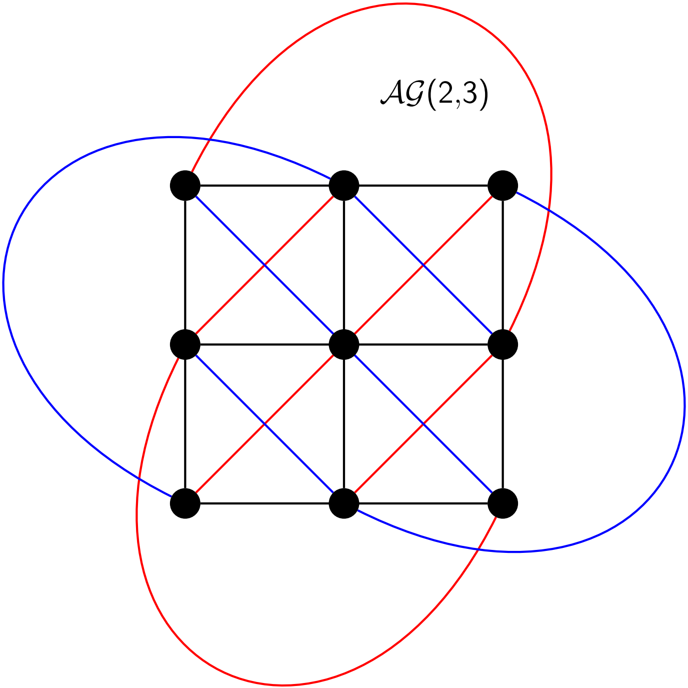
$$\overline{u},\overline{v},\overline{w} \text{ SET-ben áll } \iff \overline{u}+\overline{v}+\overline{w}=\overline{0} \pmod 3$$

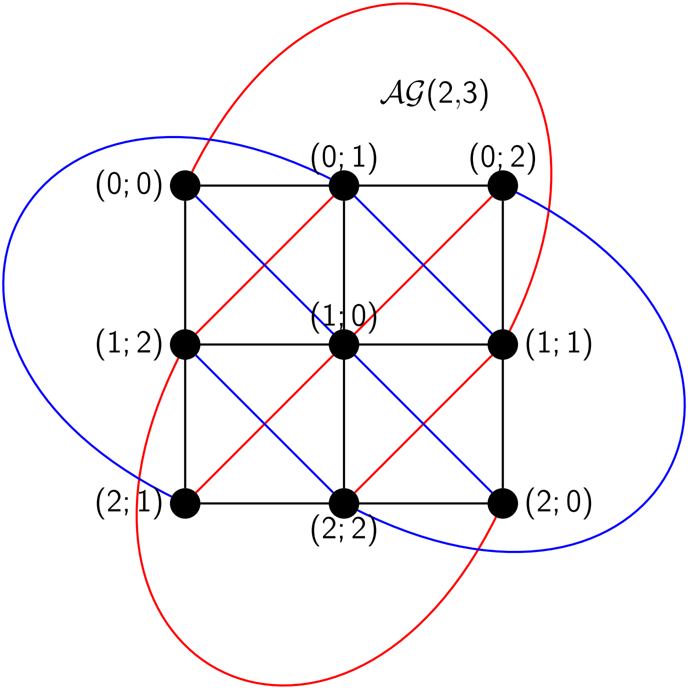
Mi a matematikai modell?

- $\mathbb{Z}_3$: ugyanúgy számolunk, mint ahogy megszoktuk, de a végeredményként a 3-mal vett osztási maradékot nézzük. Például
$$2+2=1, \quad 1+2=0.$$

- Kártya: $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}_3^4$
- SET:
$$\overline{u},\overline{v},\overline{w} \text{ SET-ben áll } \iff \overline{u}+\overline{v}+\overline{w}=\overline{0} \pmod 3$$

- $\mathcal{AG}(4,3)$


$\mathcal{AG}(2,3)$


$\mathcal{AG}(2,3)$
(0; 0)
(0; 1)
(0; 2)
(1; 2)
(1; 0)
(1; 1)
(2; 1)
(2; 2)
(2; 0)

Hány kártyát tudok legfeljebb kiválasztani, hogy ne legyen benne SET?

Hány kártyát tudok legfeljebb kiválasztani, hogy ne legyen benne SET?

Definíció

- Egy ponthalmazt ívnek nevezünk, ha nem tartalmaz egyenest.
- Egy ív maximális, ha nincs nála nagyobb elemszámú ív.

Hány kártyát tudok legfeljebb kiválasztani, hogy ne legyen benne SET?

Definíció

- Egy ponthalmazt ívnek nevezünk, ha nem tartalmaz egyenest.
- Egy ív maximális, ha nincs nála nagyobb elemszámú ív.

Kérdés: $\mathcal{AG}(d,3)$-ban mekkora egy maximális ív?

Hány kártyát tudok legfeljebb kiválasztani, hogy ne legyen benne SET?

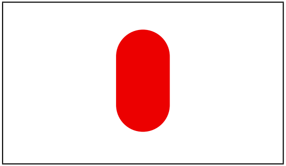
Definíció

- Egy ponthalmazt ívnek nevezünk, ha nem tartalmaz egyenest.
- Egy ív maximális, ha nincs nála nagyobb elemszámú ív.

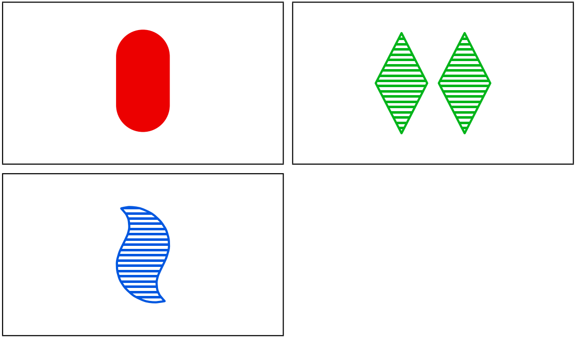
Kérdés: $\mathcal{AG}(d,3)$-ban mekkora egy maximális ív?

d	1	2	3	4	5	6	7
m_d	2	4	9	20	45	112	?

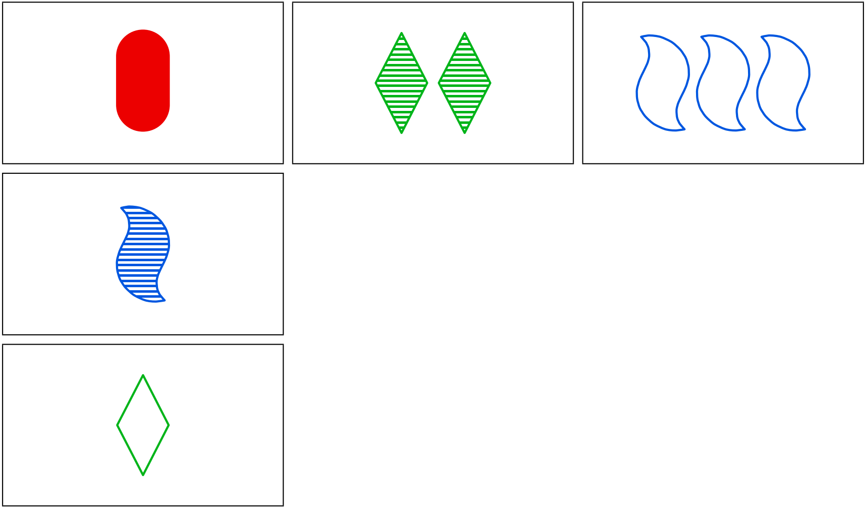
Érdekesség



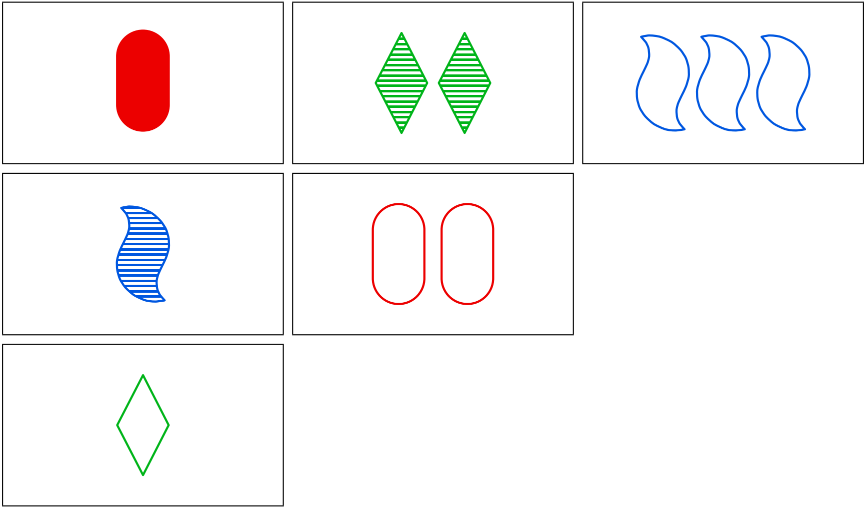
Érdekesség



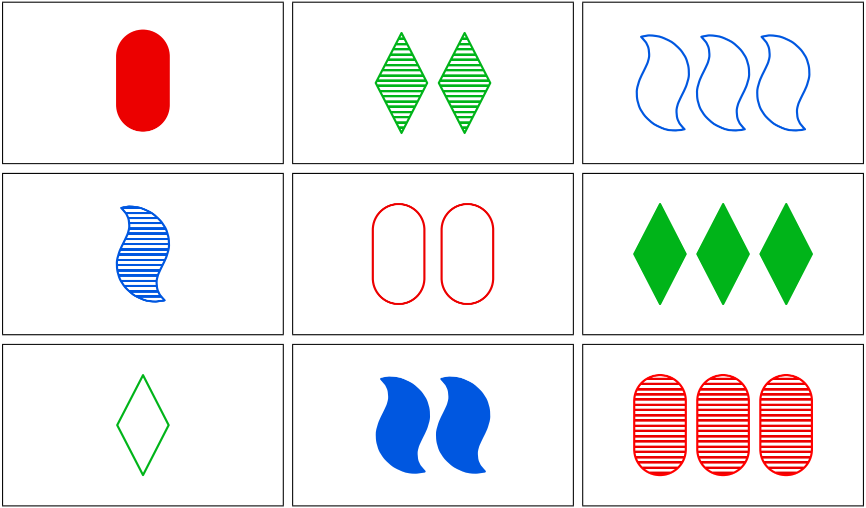
Érdekesség

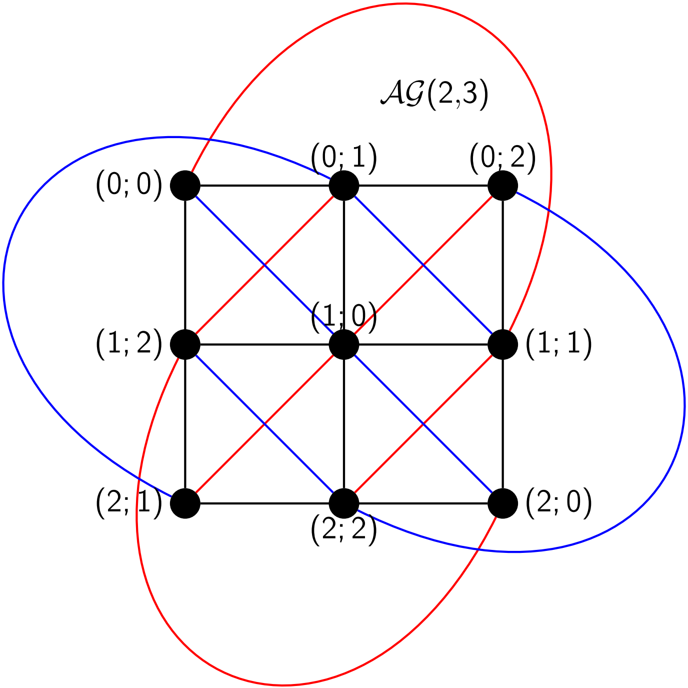


Érdekesség

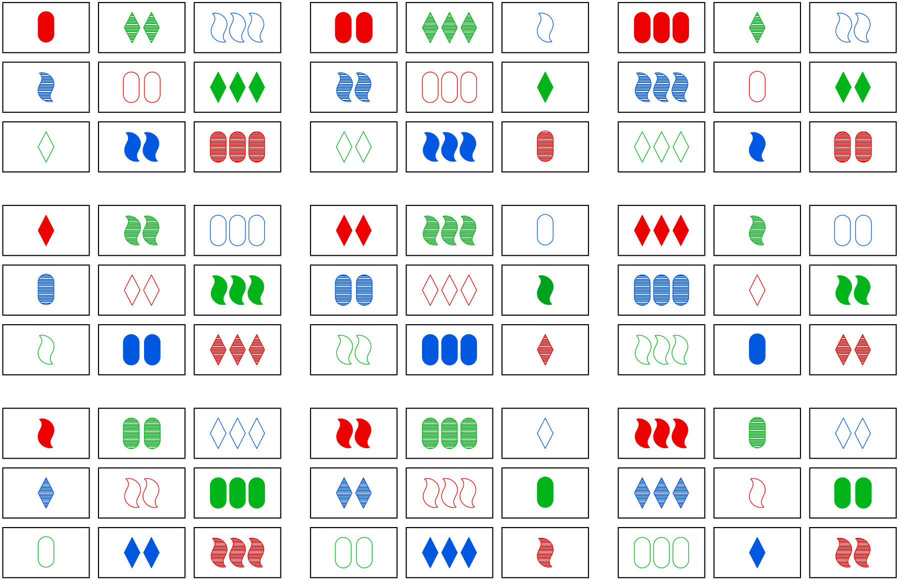


Érdekesség





$\mathcal{AG}(2,3)$
(0; 0)
(0; 1)
(0; 2)
(1; 2)
(1; 0)
(1; 1)
(2; 1)
(2; 2)
(2; 0)



Vége

Köszönöm a figyelmet!