

Nem-euklideszi geometria

Matematika BSc/MSc/tanár szakos választható tárgy

Nagy Gábor Péter

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet, Geometria Tanszék

2015/2016-os tanév I. féléve

Tagolás

- 1 Axiómarendszerek a síkon
 - Euklideszi axiómarendszer
 - Hilbert-féle axiómarendszer
 - Egy könnyen használható axiómatikus felépítés
- 2 Geometriai alapok
 - Inverziók
 - A komplex számsík
- 3 A hiperbolikus sík
 - Egyenesek a hiperbolikus síkon, modellek
 - Hiperbolikus mozgások, távolság, ívhossz, terület
 - Hiperbolikus mozgáscsoportok

Axiómarendszerekről általában

- **Alapfogalom:** Fogalom, amit nem definiálunk.
- **Axióma:** Állítás, amit nem bizonyítunk.
- **Axiómarendszer:** Alapfogalmak + axiómák.

A tapasztalás, a fogalmaink és a róluk szóló ismereteink filozófiai alapjai:

- Idealizmus (Platón)
- Empirizmus és *tabula rasa* elmélet (John Locke, David Hume)
- Racionalizmus (Descartes, Spinoza, Leibniz)
- *a priori* és *a posteriori* ismeretek (Kant)
- Határozatlansági reláció (Heisenberg)

Euklideszi axiómák

- A-1 Bármely két ponton át pontosan egy egyenes fektethető.
- A-2 Bármelyik szakasz bármelyik irányba végtelenül meghosszabbítható.
- A-3 Bármely középponttal és bármekkora sugárral kör rajzolható. (Ebből adódik, hogy nincs sem felső, sem alsó határa a távolságoknak. Másképp fogalmazva, bármilyen nagy távolságnál van nagyobb és bármilyen kicsi, de 0-nál nagyobb távolságnál van kisebb.)
- A-4 Ha két egyenes úgy metszi egymást, hogy az egymást melletti szögek egyenlők, akkor ezen szögek bármelyike egyenlő minden más szöggel, amit ugyanígy hozunk létre. (Bármely két derékszög egyenlő.)
- A-5 Ha adott egy egyenes és egy rajta kívüli pont, akkor egy és csak egy, a ponton átmenő egyenes létezik, amelyik párhuzamos az adott egyenessel. (Párhuzamossági axióma.)

Euklideszi posztulátumok (i.e. III. század)

P-1 Dolgok, amik egy harmadikkal egyenlők, egymással is egyenlők.

P-2 Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk, ismét egyenlőket kapunk.

P-3 Ha egyenlőkből egyenlőket vonunk ki, ismét egyenlőket kapunk.

P-4 Dolgok, amik egymással helyettesíthetők, egyenlők.

P-5 Az egész nagyobb a résznél.

További, nem megfogalmazott feltételezések:

- Közrefogási axióma: Ha három pont egy egyenesen van, akkor pontosan egy van a másik kettő között.
- Oldal-szög axióma: Bármely egyenest el lehet "mozgatni" bármely másik egyenesbe úgy, hogy fedjék egymást.

Hilbert-féle axiómarendszer (1899)

- Alapfogalmak:
 - Pont, egyenes
 - Pontok közrefogása, tartalmazás (illeszkedés) pont és egyenes között
 - Szakaszok egybevágósága, szögek egybevágósága
- Axióma csoportok:
 - Illeszkedési axiómák
 - Rendezési axiómák
 - Egybevágósági axiómák
 - Párhuzamossági axióma
 - Folytonossági axiómák

Hilbert-féle illeszkedési axiómák

- I.1 Bármely két pontra illeszkedik egy egyenes.
- I.2 Bármely két pontra legfeljebb egy egyenes illeszkedik.
- I.3 Minden egyenes tartalmaz legalább két pontot, és minden egyeneshez létezik legalább egy rá nem illeszkedő pont.

Hilbert-féle rendezési axiómák

- II.1 Ha az A, C pontok közrefogják a B pontot, akkor a C, A pontok is, és a három pont egy egyenesre esik.
- II.2 Bármely A, C ponthoz létezik az AC egyenesen B pont úgy, hogy A, B közrefogja C -t.
- II.3 Bármely három egy egyenesre eső pont közül pontosan egyet fog közre a másik kettő.
- II.4 (Pasch-axióma) Bármely A, B, C nem egy egyenesre eső pontok, és a síkjukba eső, de rájuk nem illeszkedő m egyenesre teljesül: az $ABC\triangle$ oldalai közül m 0-t vagy 2-t metsz.

Hilbert-féle egybevágósági axiómák

- III.1** Bármely A, B ponthoz és az m egyenesen fekvő A' ponthoz pontosan két olyan C, D pont van, hogy C, D közrefogják A' -t és $AB \cong A'C$ -vel és $AB \cong A'D$.
- III.2** Ha $AB \cong CD$ -vel és $CD \cong EF$ -el, akkor $AB \cong EF$ -el.
- III.3** Tekintsük az m egyenesen az AB és BC szakaszokat, melyeknek egyetlen közös pontja B , és hasonlóan az m' egyenesen az $A'B'$, $B'C'$ szakaszokat. Ha $AB \cong A'B'$ -vel és $AC \cong A'C'$ -vel, akkor $AC \cong A'C'$ -vel.
- III.4** Adott az $ABC\angle$ szög és a $B'C'$ félegyenes. Ekkor pontosan két $B'D$, $B'E$ félegyenes létezik, hogy a $ABC\angle \cong DB'C'\angle$ -el és $ABC\angle \cong EB'C'\angle$.
- III.5** Adott az $ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$ úgy, hogy $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ és $BAC\angle \cong B'A'C'\angle$ egybevágóak. Ekkor $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$.

Hilbert-féle párhuzamossági és folytonossági axiómák

Párhuzamossági axióma:

IV.1 Bármely P ponthoz és m egyeneshez legfeljebb egy P -n átmenő, m -el párhuzamos egyenes van.

Folytonossági axiómák:

V.1 (Archimédész axióma) Adott az CD szakasz és az AB félegyenes, ekkor létezik n darab $A_1 = A, A_2, \dots, A_n$ pont az AB egyenesen, hogy $A_j A_{j+1}$ egybevágó CD -vel és A_{n-1}, A_n közrefogják B -t.

V.2 (Egyenesek teljessége) Egy egyeneshez további pont hozzávétele olyan objektumot eredményez, mely nem teljesíti az I, II, III.1-2, V.1 axiómák valamelyikét.

Egy könnyen használható axiómatikus felépítés

- Alapfogalmak: pont, egyenes, illeszkedés, távolság, rendezés.
- I: Illeszkedési axiómák
- II: Metrikus axiómák: $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$
 - ① $d(P, Q) \geq 0$ és $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.
 - ② $d(P, Q) = d(Q, P)$.
 - ③ $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$ és „ $=$ ” $\Leftrightarrow P, R$ közrefogják Q -t.
(Háromszög-egyenlőtlenség.)
- III: Rendezési axióma, Pasch-axióma
- IV: Folytonossági axióma
- **V: Tengelyes tükrözés axiómája:** Bármely g egyeneshez létezik olyan τ_g izometria, mely g minden pontját fixen hagyja, a hozzátartozó két félsíkot pedig felcseréli.

A sík felépítése az axiómarendszerből

- 1 A párhuzamosság ekvivalenciareláció. (Felhasználjuk a párhuzamossági axiómát!)
- 2 A közrefogás, félegyenes, szakasz, háromszög definíciója.
- 3 Félsík definíciója a Pasch-axióma segítségével.
- 4 Izometriák és kollineációk kapcsolata.
- 5 Izometriák osztályozása: Tengelyes tükrözés, eltolás, forgás, (középpontos tükrözés), csúsztatva tükrözés.
- 6 Egyenesek merőlegessége, szögfelező definíciója.
- 7 Vektorok. Koordinátarendszer.
- 8 Mozgások, sík irányítása.
- 9 Szög, szögmérés, ívhosszmérés, stb.

A párhuzamossági axióma története I.

- Már az ókori görögök is bizonytalanok voltak, mert **tapasztalatilag nem egyértelműen igazolható.**
- Évszázadokon át próbálták levezetni a többi axiómából, illetve megfogalmaztak számtalan **ekvivalens állítást**, pl. hogy a háromszög szögeinek összege 180° .
- Voltak próbálkozások az axióma **tagadására**, pl. Omar Khayyám perzsa matematikus a XI. századból.
- A keresztény dogmatikus gondolkodás, majd Kant ismeretelmélete hosszú időre lefékezte a terület fejlődését: Kant szerint **a tér emberi megismerése *a priori* euklideszi.**

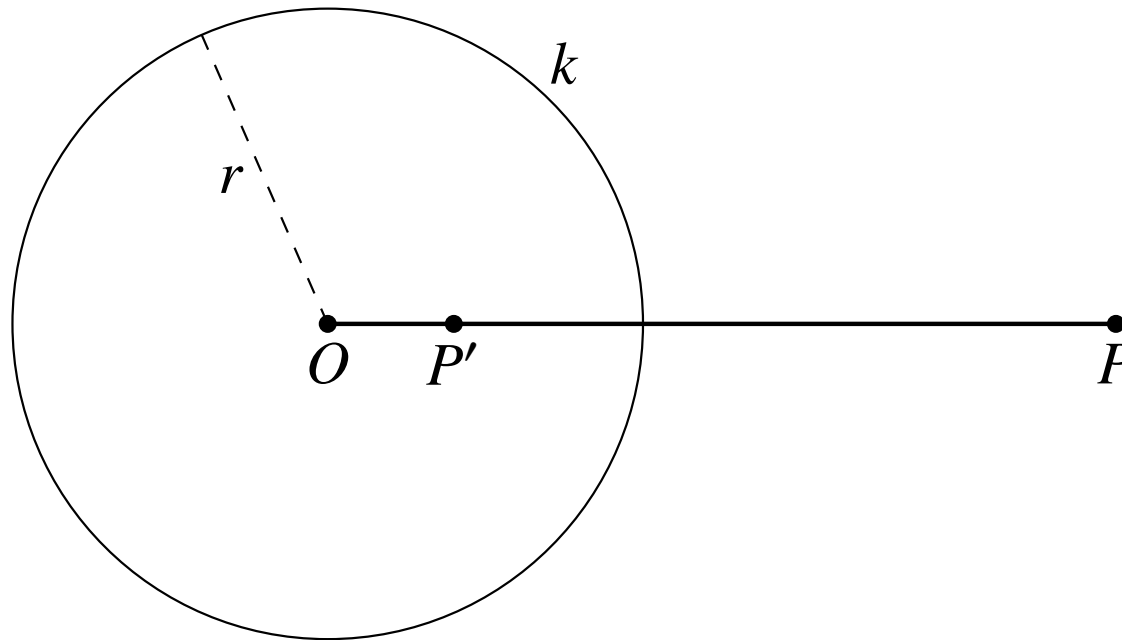
A párhuzamossági axióma története II.

- Giovanni Saccheri olasz jezsuita pap a XVII. században az axióma **tagadásából „majdnem” ellentmondásra** jutott.
- A XIX. század elején, egymástól függetlenül Lobacsevszkij és Bolyai János egymástól függetlenül **„a semmiből egy új világot teremtettek.”**
- Bolyai elküldte az eredményeit Gaussnak, aki valamilyen okból azokat **lekicsinyelte**, valószínűleg nem akart a kanti metafizikával összeütközésbe kerülni.
- Bolyai a művét apja matematika tankönyvéhez csatolta függelékként, így született az **Appendix**. Ez néhány évtizedre feledésbe merül, majd az 1860-as évektől hatalmas tudományos karriert fut be.
- Einstein relativitáselméletében a fizikai tér jelenségeinek leírására is alkalmazza: 1912-ben **megméri a gravitáció hatására görbült teret**.

Definíció: Inverzió

Adott az O középpontú, r sugarú k kör és a $P \neq O$ pont. A P k -ra vett **inverz képe** alatt az OP félegyenes azon P' pontját értjük, melyre

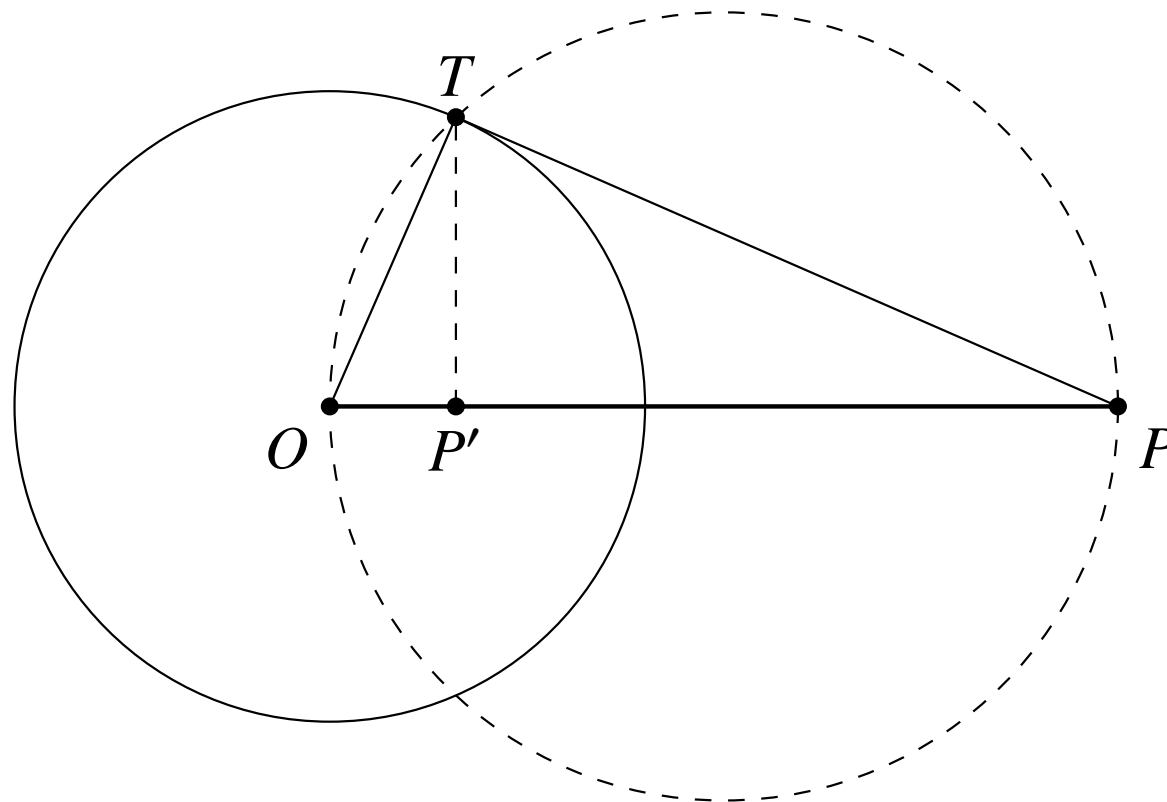
$$|OP||OP'| = r^2.$$



Inverzió szerkesztése

Állítás: Inverzió szerkesztése

A P külső pont inverz képe az ábra szerint megszerkeszthető.



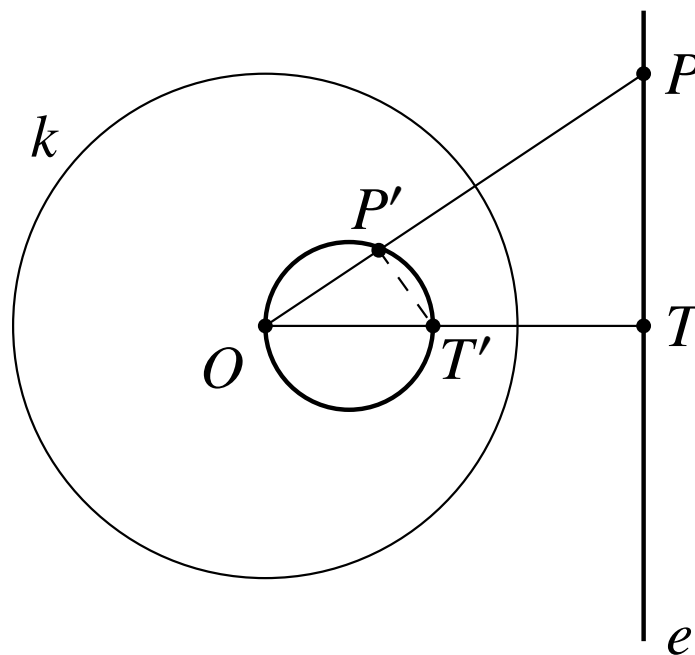
Az inverzió hatása körökön és egyeneseken

Állítás: Az inverzió hatása körökön és egyeneseken

Az inverzió négyzete önmaga. Legyen O az inverzió alapkörének középpontja. Az inverzió

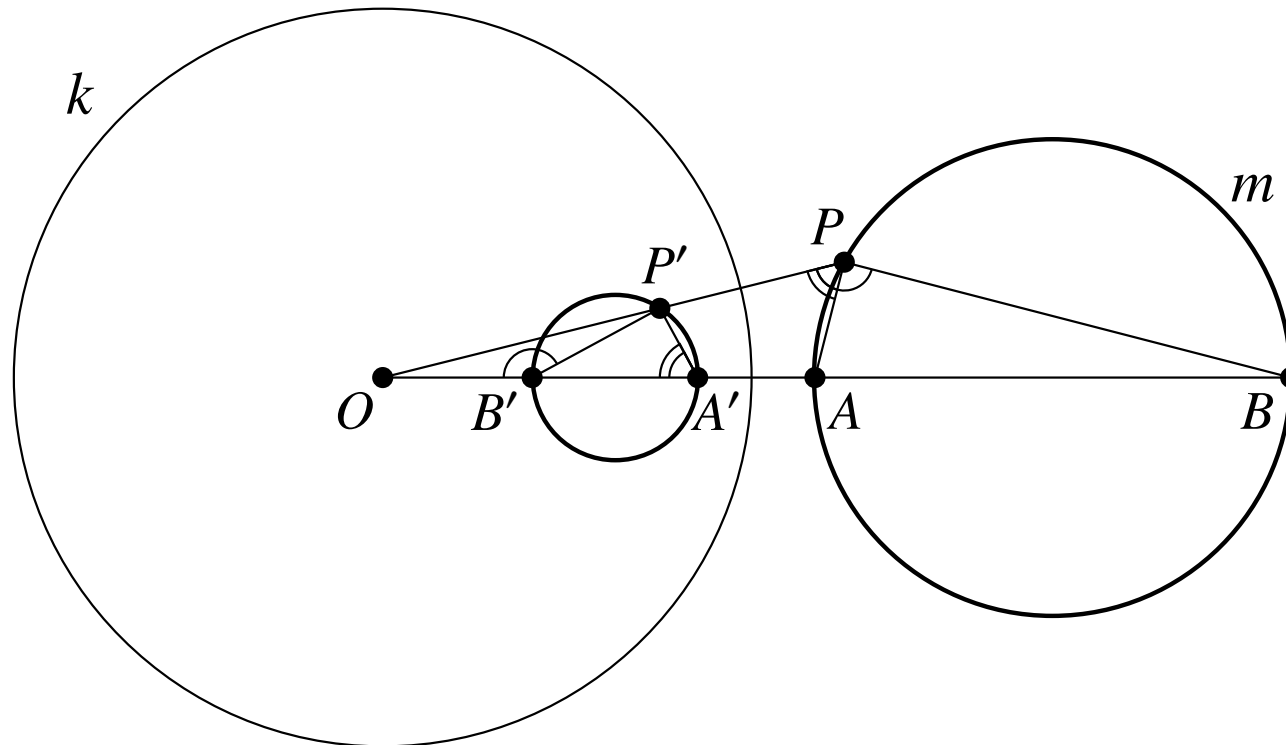
- (1) az O -n átmenő egyeneseket fixen hagyja.
- (2) az O -ra nem illeszkedő egyeneseket körökbe viszi.
- (3) az O -n átmenő köröket egyenesekbe viszi.
- (4) az O -ra nem illeszkedő köröket körökbe viszi.

Az inverzió hatása egyeneseken



Az inverzió hatása körökön

$$r^2 = |OA||OA'| = |OP||OP'| \Rightarrow \frac{|OA'|}{|OP'|} = \frac{|OP|}{|OA|} \Rightarrow \angle OA'P' = \angle OPA$$



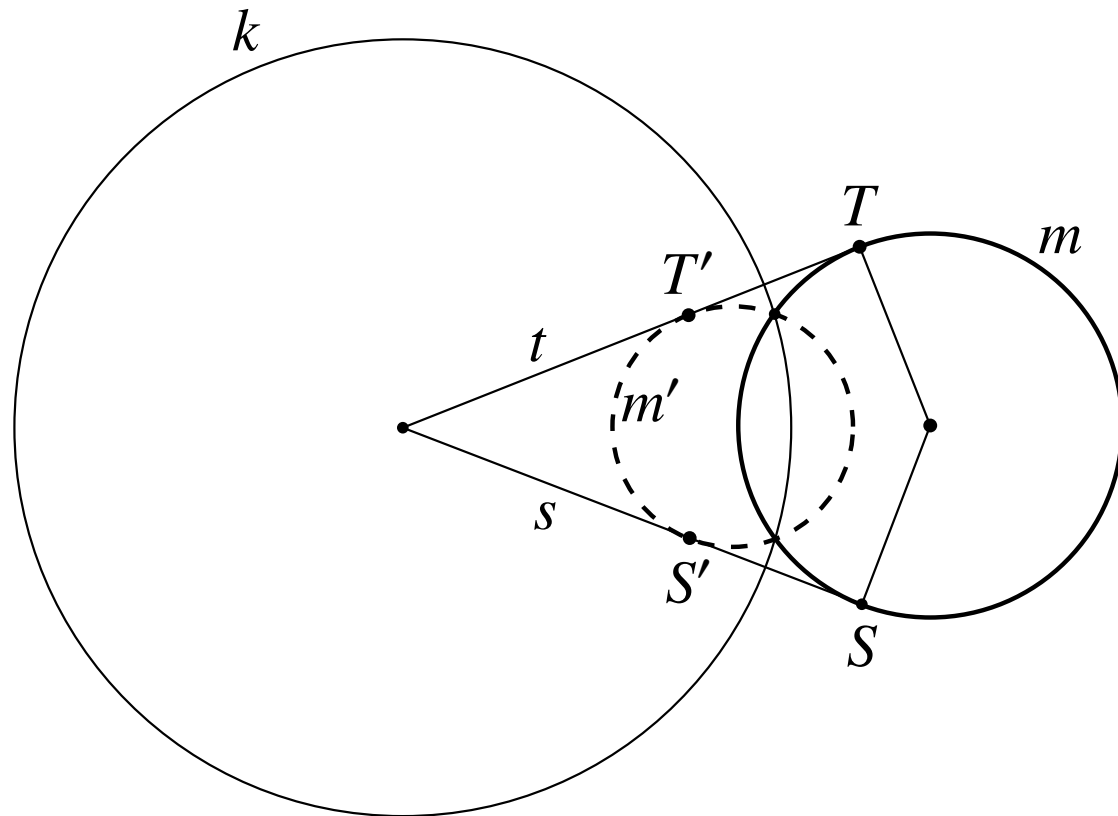
Állítás: Az inverzió szögtartó leképezés

Az inverzió körei (egyenesei)

Állítás

A k körre vett inverzió akkor és csak akkor hagyja fixen az m kört (egyenest), ha k és m merőlegesek egymásra.

Bizonyítás. Az m -hez húzott t érintő fixegyenes.
 $m = m' \Leftrightarrow T = T'$
 $\Leftrightarrow k$ és m
merőlegesen
metszi egymást.



Kögyenesek és kögyenestartó transzformációk

Definíció: Kögyenes, kögyenestartás, tükrözés

- A közös sík egyeneseit és köreit a továbbiakban a közös **kögyenes** néven nevezzük.
- **Kögyenestartó transzformáció** alatt a közös sík azon bijekcióját értjük, mely kögyenest kögyenesbe visz.
- A **k kögyenesre vett tükrözés** alatt k alapkörű inverziót, illetve k -ra vett tengelyes tükrözést értünk attól függően, hogy k kör illetve egyenes.

Példák

Az inverziók, az izometriák és ezek szorzatai kögyenestartó transzformációk.

Kögyenestartó transzformációk

Állítás: A kögyenestartó transzformációk alaptulajdonságai

- (1) A kögyenestartó transzformációk csoportot alkotnak.
- (2) Legyenek P, Q, R és P', Q', R' a közös sík pontjai. Ekkor pontosan két olyan kögyenestartó transzformáció van, melyre $P \mapsto P', Q \mapsto Q', R \mapsto R'$.
- (3) Legyen k, k' két kögyenes. Ekkor létezik olyan kögyenestartó transzformáció, mely k -t k' -be viszi.
- (4) Bármely kögyenestartó transzformáció előáll mint legfeljebb négy kögyenesre vett tükrözés szorzata.

A Möbius-sík

Definíció

Bővítsük ki a közöséges síkot a P_∞ **ideális ponttal** és tekintsük úgy, hogy P_∞ **illeszkedik az összes közöséges egyenesre, de nem illeszkedik egyetlen körre sem**. Ezt a kibővített síkot **inverzív síknak**, vagy más néven **Möbius-síknak** nevezzük.

- Az **izometriák** a Möbius-sík olyan bijekciói, melyek **fixen hagyják az ideális pontot**.
- Az **inverziók** a Möbius-sík bijekciói, ha úgy tekintjük, hogy az inverziók **felcserélik az ideális pontot és az alapkör origóját**.

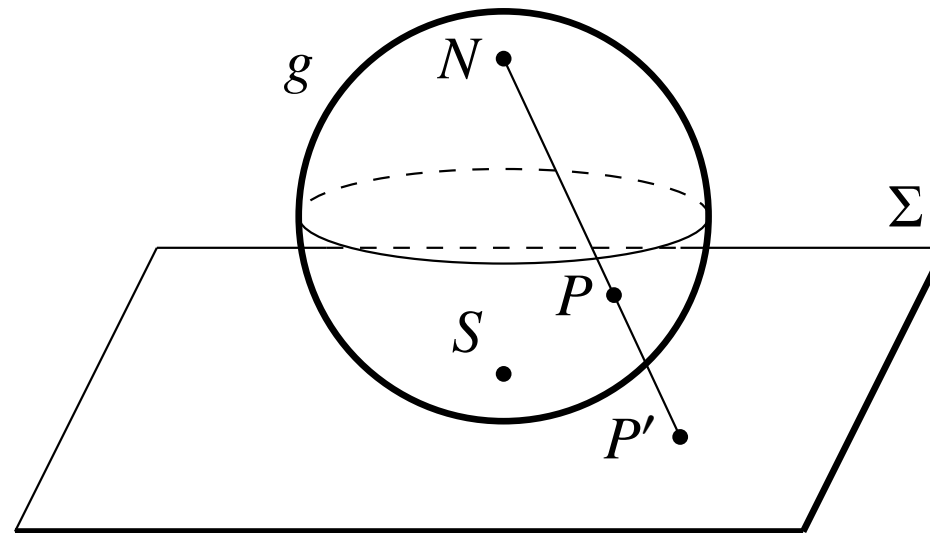
Nehéz lemma

Legyen α a Möbius-sík kögyenestartó traszformációja, amely **fixen hagyja a P, Q, R pontokat**. Ekkor α vagy az **identitás**, vagy pedig a P, Q, R pontok által meghatározott **kögyenesre vett tükrözés**.

Sztereografikus projekció

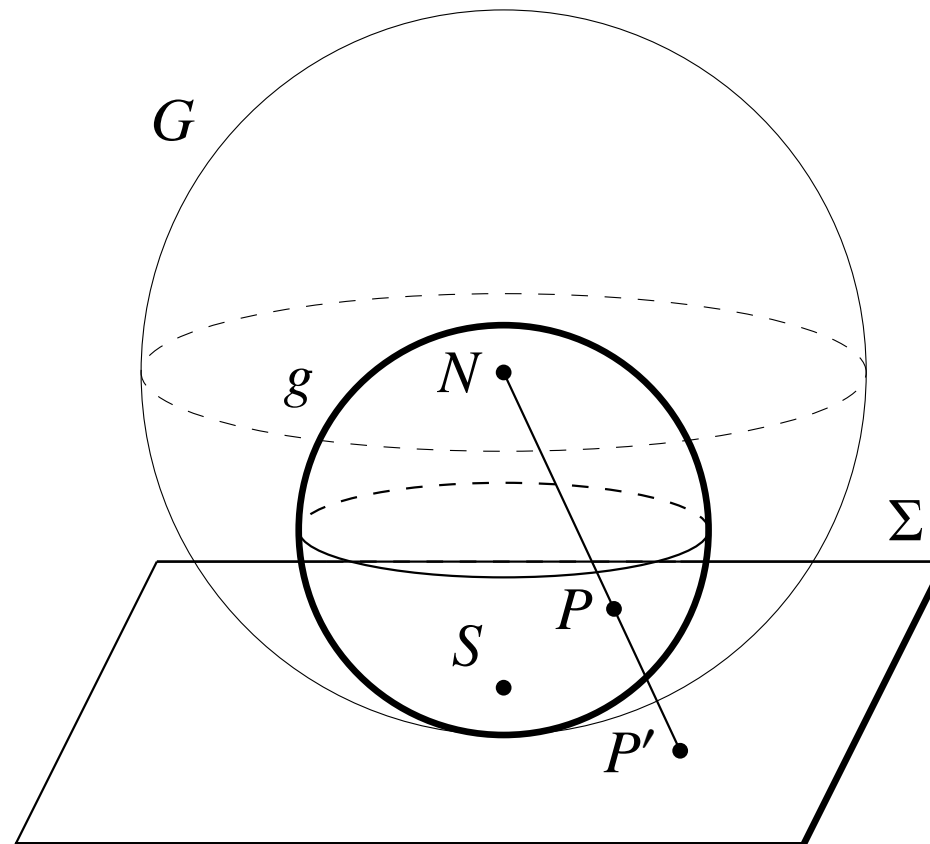
Definíció: Sztereografikus projekció

Legyen N, S a g gömb két áttellenes pontja (északi és déli pólus) és legyen Σ a g -t S -ben érintő sík. Tekintsük azt a $g \setminus \{N\} \rightarrow \Sigma$ hozzárendelést, mely a P ponthoz a $P' = NP \cap \Sigma$ pontot rendeli. Ezt a leképezést **sztereografikus projekciónak** mondjuk.



Állítás: A sztereografikus projekció alaptulajdonságai

A sztereografikus projekció **szögtartó bijekció** a gömb körei és a sík kögyenesei között. Az $N \mapsto P_\infty$ kiegészítéssel a sztereografikus projekció bijekció a **gömb és a Möbius-sík között**.



A komplex számtest

Definíció: A komplex számtest

Jelöljön i egy $i \notin \mathbb{R}$ elemet és legyenek $x, y \in \mathbb{R}$ valós számok. A $z = x + iy$ elemet **komplex számnak** nevezzük, ezek halmazát $\mathbb{C}$ -vel jelöljük. A

$$\bar{z} = x - iy$$

elem a z komplex szám **konjugáltja**. A $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ komplex számok összegét és szorzatát az alábbi módon definiáljuk:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

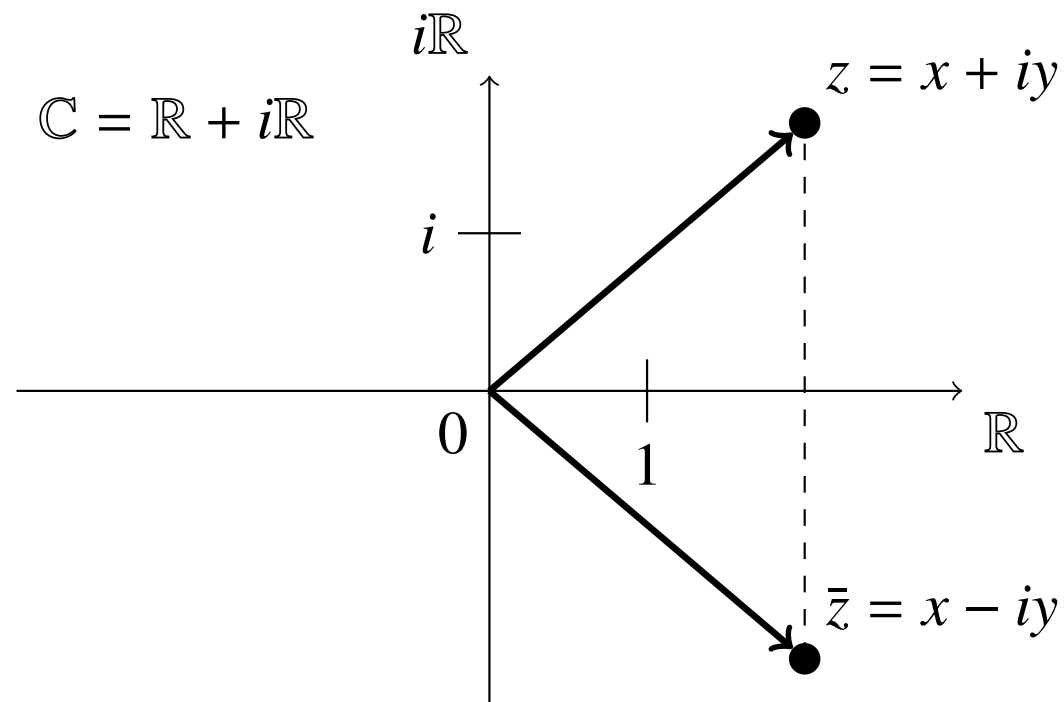
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

A komplex számsík

Állítás: A komplex számtest alaptulajdonságai

A komplex számok testet alkotnak. A konjugálás művelete megőrzi az összeadást és a szorzást: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

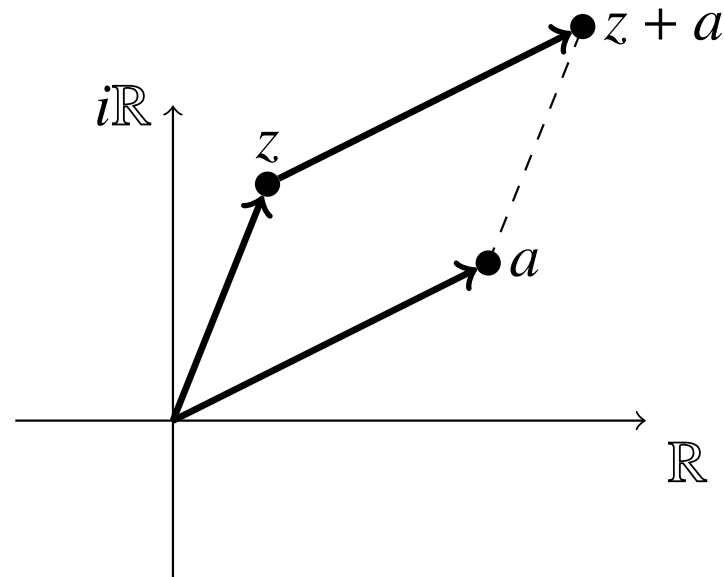
Teljesül továbbá: $i^2 = -1$, $z\bar{z} \in \mathbb{R}$, $z\bar{z} \geq 0$ és $z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$.



Összeadás a komplex síkon

Állítás: Összeadás a komplex számsíkon

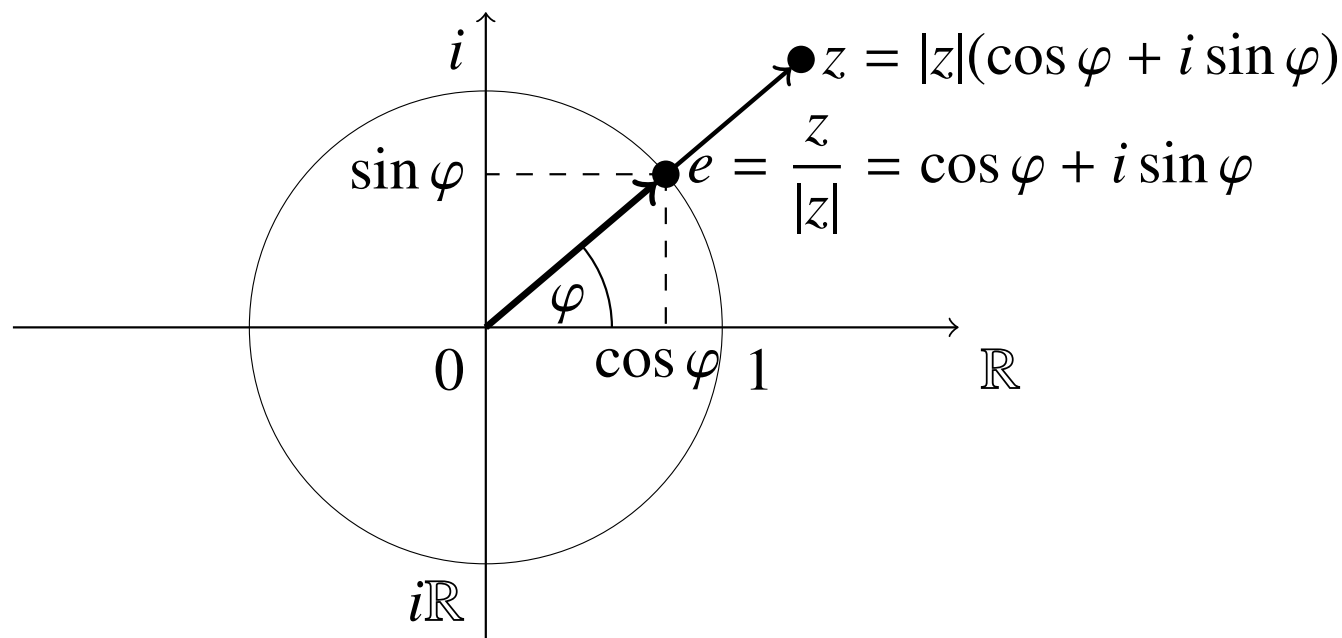
Legyen $a \in \mathbb{C}$ és definiáljuk a $\tau_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tau_a(z) = z + a$ leképezést. Ezek a leképezések pontosan a komplex számsík eltolásai.



Polárkoordináták a komplex síkon

Definíció: Polárkoordináták a komplex síkon

Legyen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplex szám. A $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ számot z **normájának** vagy **abszolútértékének** nevezzük. Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ szám $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ alakban írható, φ -t a z **argumentumának** mondjuk.

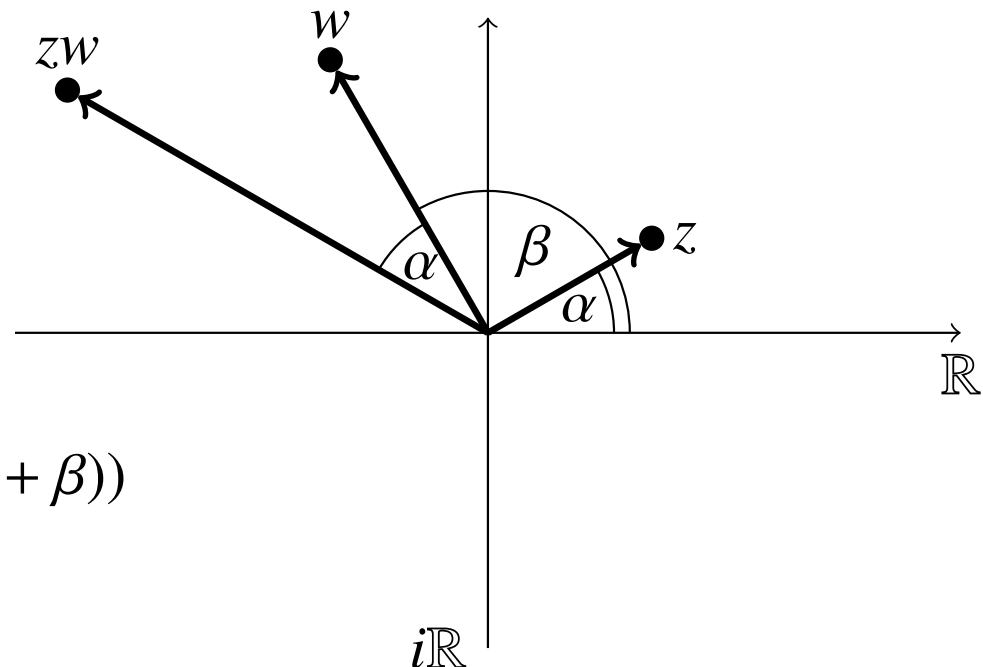


Szorzás a komplex síkon

Állítás: Szorzás a komplex síkon

Két komplex szám szorzásakor az abszolútértékek összeszorzódnak, az argumentumok pedig összeadódnak. Más szóval a $\lambda_w : z \mapsto wz$ leképezés 0 körüli **forgatva nyújtás**.

$$\begin{aligned}z &= r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\w &= s(\cos \beta + i \sin \beta) \\zw &= rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))\end{aligned}$$



Kögyenesek komplex egyenlete, a Riemann-gömb

Állítás: Kögyenesek komplex egyenlete

A komplex sík bármely K kögyenese megadható az

$$K : \alpha z \bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + \gamma = 0, \quad b \in \mathbb{C}, \alpha, \gamma \in \mathbb{R}$$

egyenlettel. K kör, ha $\alpha \neq 0$ és egyenes, ha $\alpha = 0$.

Biz. Legyen $b = \beta + i\delta$ és $z = x + iy$, ekkor

$$\bar{b}z + b\bar{z} = (\beta - i\delta)(x + iy) + (\beta + i\delta)(x - iy) = 2\beta x + 2\delta y,$$

azaz a fenti egyenlet $\alpha(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\delta y + \gamma = 0$.

Definíció: Riemann-gömb

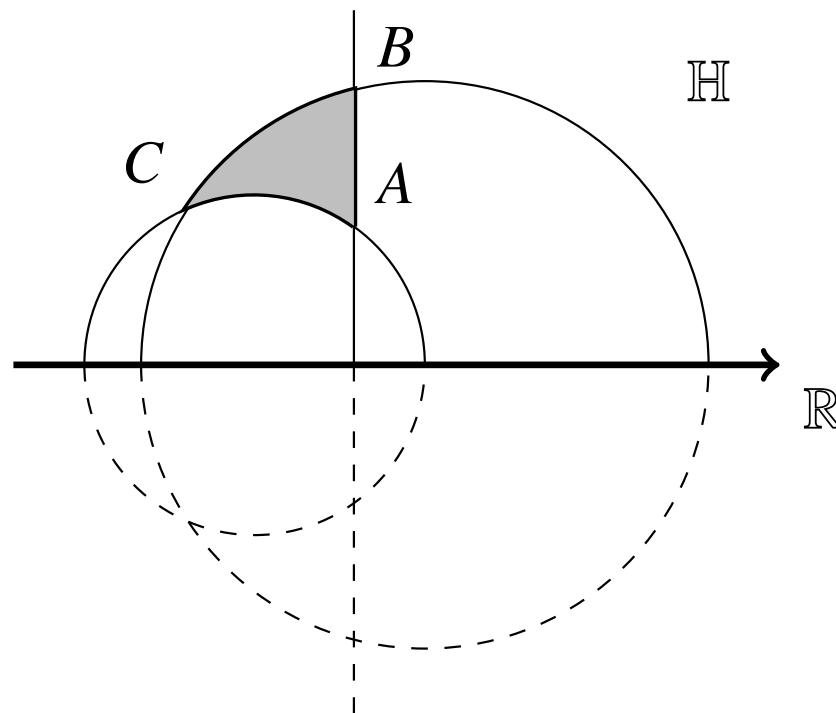
Jelölje a komplex sík ideális pontját a ∞ szimbólum. A Möbius-síkot koordinátázó $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ halmazt **Riemann-gömbnek** nevezzük.

Hiperbolikus pontok és egyenesek a félsíkmodellben

A továbbiakban azonosítjuk a közöséges síkot a $\mathbb{C}$ komplex számsíkkal és a Möbius-síkot a $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ Riemann-gömbbel.

Definíció: Hiperbolikus pontok, egyenesek, illeszkedés, közrefogás

A komplex sík azon z elemeit, melyekre $\Im(z) > 0$, **hiperbolikus pontoknak** nevezzük, ezek halmazát $\mathbb{H}$ -val jelöljük. A valós tengelyre merőleges kögyenesek $\mathbb{H}$ -ba eső részei a **hiperbolikus egyenesek**. A **hiperbolikus illeszkedést** és **közrefogást** a természetes módon definiáljuk.



Párhuzamosság a hiperbolikus síkon

Definíció: Hiperbolikus végtelen távoli pontok

Az $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$ kögyenes pontjait **hiperbolikus végtelen távoli pontoknak** nevezzük. A hiperbolikus egyenesek és a hiperbolikus végtelen távoli pontok illeszkedését a természetes módon defináljuk.

Állítás: Végtelen távoli pontok illeszkedése

Minden hiperbolikus egyenesre pontosan két végtelen távoli pont illeszkedik. Két különböző végtelen távoli pont egyértelműen meghatároz egy hiperbolikus egyenest.

Definíció: Párhuzamosság a hiperbolikus síkon

Két hiperbolikus egyenest **párhuzamosnak** mondunk, ha nincs közös pontjuk. Két hiperbolikus egyenes **ultraparalel**, ha van közös végtelen távoli pontjuk.

Hiperbolikus illeszkedési tulajdonságok

Állítás: Hiperbolikus illeszkedési tulajdonságok

- 1 A hiperbolikus síkon bármely két különböző hiperbolikus pont egyértelműen meghatároz egy egyenest.
- 2 Egy hiperbolikus pont és egy hiperbolikus végtelen távoli pont egyértelműen meghatároz egy egyenest.
- 3 Két hiperbolikus egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van.
- 4 Adott k hiperbolikus egyenes és $P \notin k$ pont. Ekkor végtelen sok P -n átmenő, k -val párhuzamos egyenes van. Továbbá pontosan két P -n átmenő k -val ultraparalel egyenes van.
- 5 Teljesül a Pasch-axióma. (A félsík definíciója értelmes.)

Biz. (1) és (2): Tekintsük a két pontot összekötő közös szegmens felezőmerőlegesének $\overline{\mathbb{R}}$ -el vett X metszéspontját. Az X középpontú, a pontokon átmenő kögyenes megfelelő hiperbolikus egyenest határoz meg. A többi triviális.

Tengelyes tükrözések a hiperbolikus síkon

Definíció: Hiperbolikus tükrözések

Legyen k hiperbolikus egyenes, K pedig a k -t tartalmazó kögyenes. A k -ra vett **hiperbolikus tükrözés** a K kögyenesre vett tükrözés megszorítása $\mathbb{H}$ -ra. k -t a hiperbolikus tükrözés **tengelyének** nevezzük.

Gondoljuk meg, hogy az $\overline{\mathbb{R}}$ kögyenesre merőleges kögyenesekre vett tükrözések fixen hagyják $\overline{\mathbb{R}}$ -et és $\mathbb{H}$ -t. Ezért a fenti definíció értelmes.

Állítás: A hiperbolikus tükrözések alaptulajdonságai

A hiperbolikus tükrözések involutórikus egyenesetartó bijekciók a hiperbolikus síkon. A hiperbolikus tükrözés a tengely pontjait fixen hagyja, a tengely által meghatározott két félsíkot pedig felcseréli.

Merőlegesség, szögfelezők

Definíció: Egyenesek merőlegessége

Azt mondjuk, hogy a k, ℓ hiperbolikus egyenesek **merőlegesek**, ha a k -ra vett hiperbolikus tükrözés fixen hagyja ℓ -et.

Állítás: A merőlegesség alaptulajdonságai

A hiperbolikus egyenesek merőlegessége szimmetrikus reláció.
Merőleges egyenes metszik egymást.

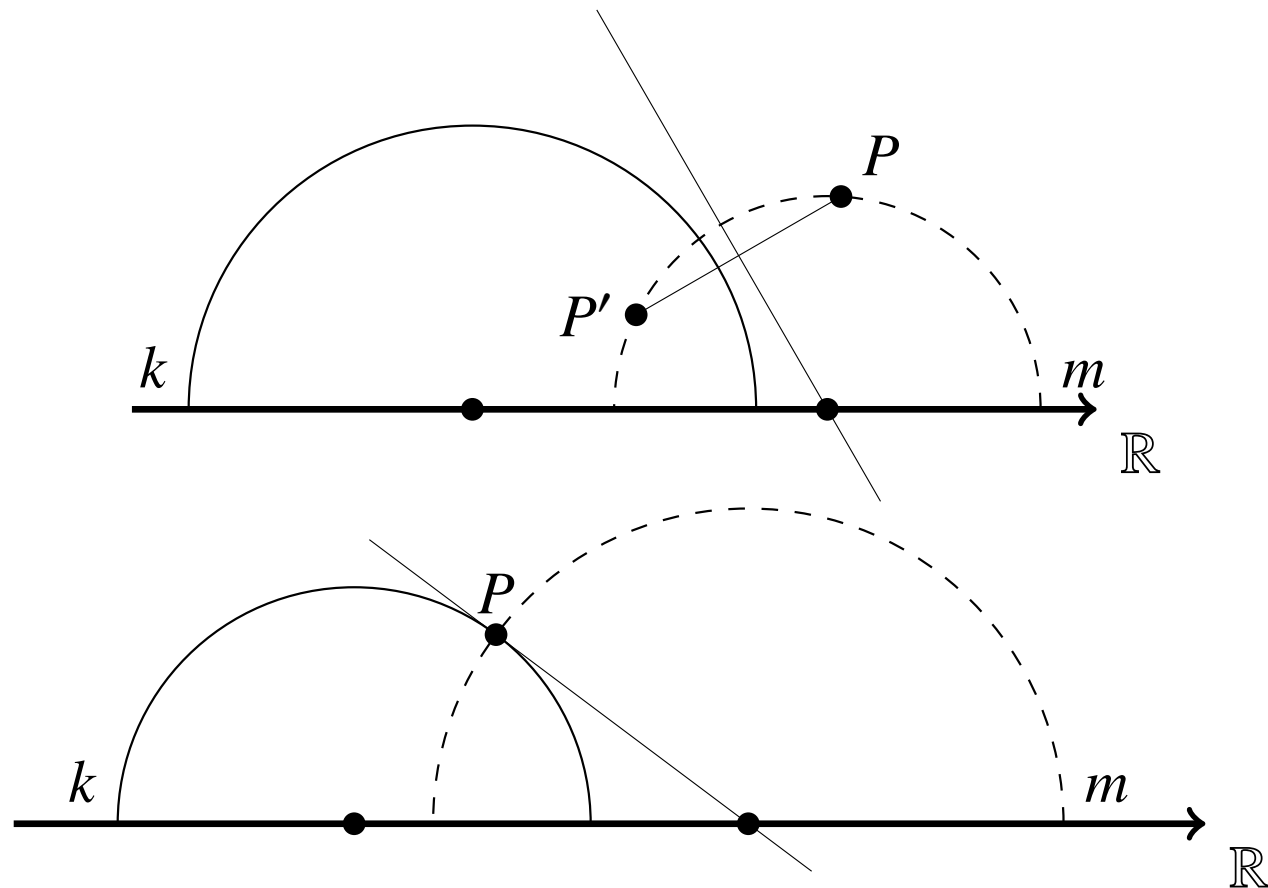
Definíció: Szakaszelező merőleges, szögfelező

- Az AB hiperbolikus szakasz **felezőmerőlegese** az a hiperbolikus egyenes, melyre vett tükrözés A -t és B -t felcseréli.
- Két metsző hiperbolikus egyenes **szögfelezője** az a hiperbolikus egyenes, melyre vett tükrözés a két egyenest felcseréli.

Merőleges állítása egyenesre

Állítás: Merőleges állítása egyenesre

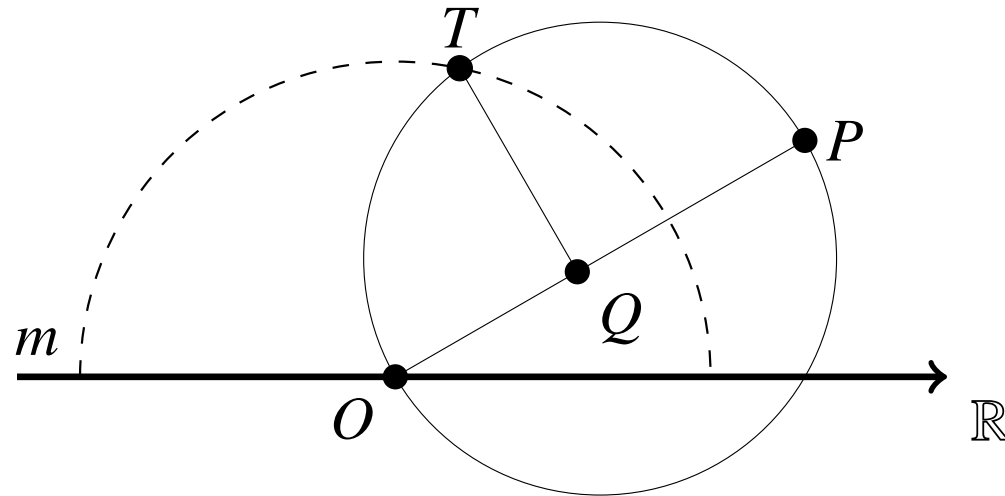
Hiperbolikus pontból egyenesre merőleget tudunk állítani.



Felezőmerőleges szerkesztése

Állítás: Felezőmerőleges szerkesztése

Minden hiperbolikus szakasznak pontosan egy felezőmerőlegese van.



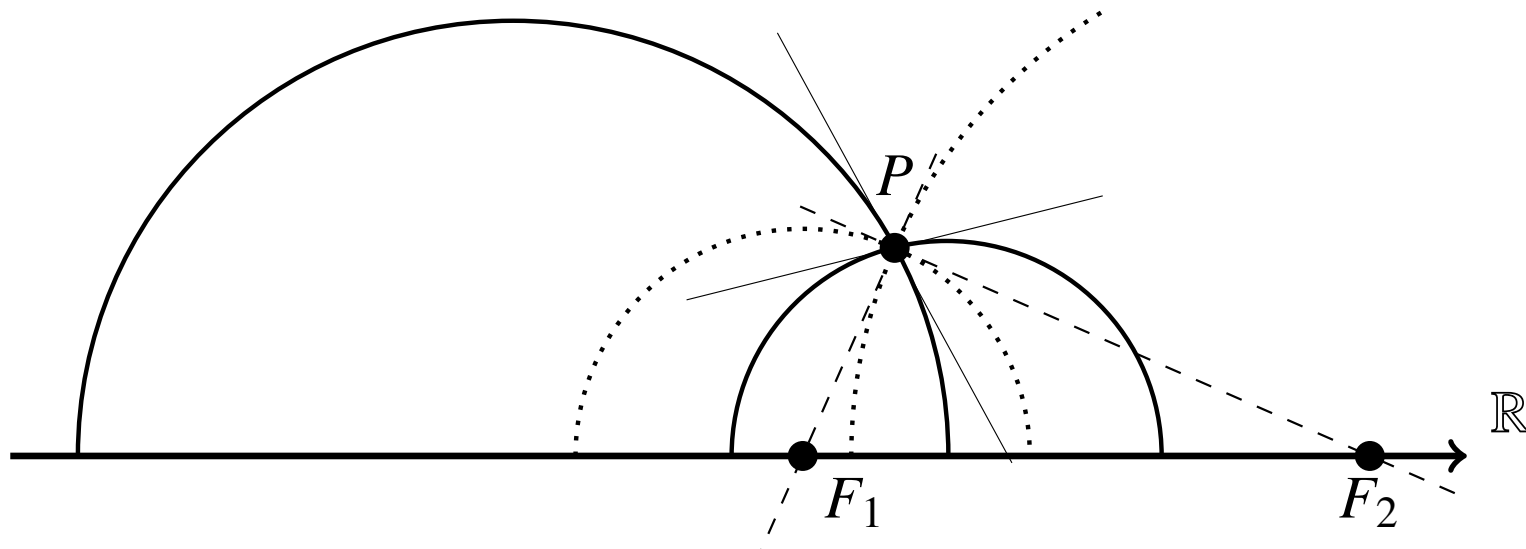
Definíció: Szakasz felezőpontja

Az AB hiperbolikus szakasz **felezőpontja** a szakasznak és felezőmerőlegesének metszéspontja.

Szögfelező szerkesztése

Állítás: Felezőmerőleges, szögfelező szerkesztése

Metsző hiperbolikus egyeneseknek pontosan két szögfelezőjük van, és ezek egymásra merőlegesek.

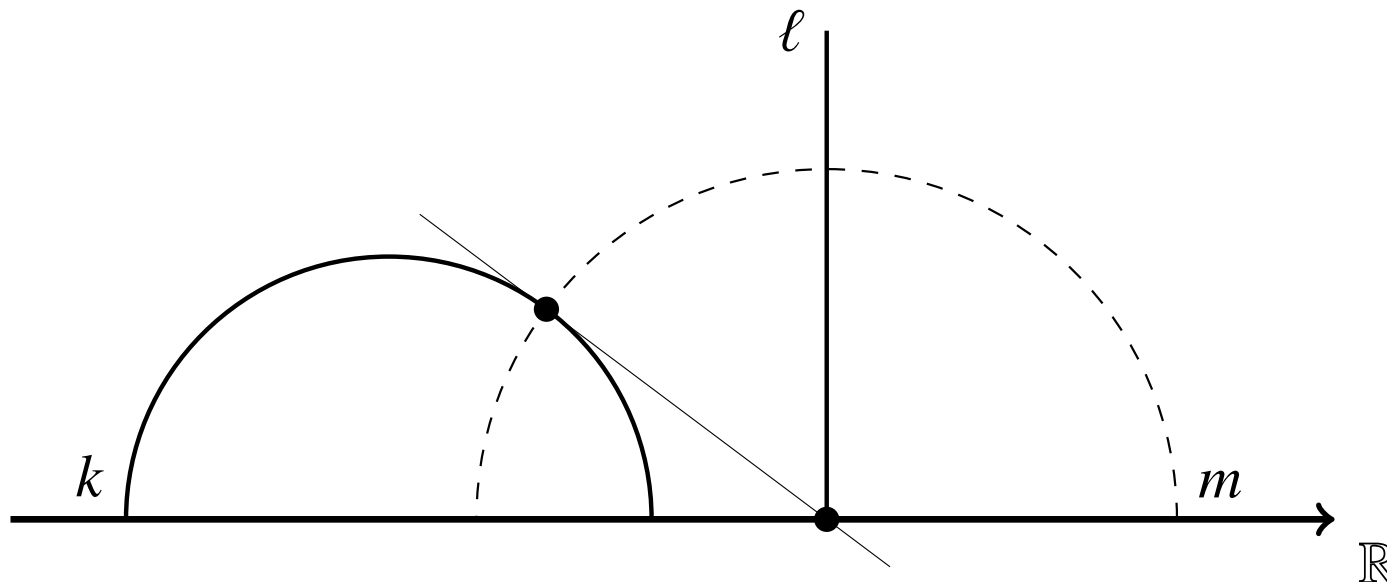


Párhuzamos egyenesek közös merőlegese

Állítás: Párhuzamos egyenesek közös merőlegese

Két hiperbolikus egyenesnek akkor és csak akkor van közös hiperbolikus merőlegese, ha párhuzamosak, de nem ultraparalelek.

Biz. Először speciális esetet vizsgálunk. Az általános esetet visszavezetjük hiperbolikus tükrözés segítségével.



Poincaré-féle szögtartó modellek

Definíció: A hiperbolikus sík modellje

A $(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ párt a **hiperbolikus geometria modelljének** nevezzük, ha minden $e \in \mathcal{E}$ -re $e \subseteq \mathcal{P}$ és $\mathcal{P}$ illetve $\mathcal{E}$ elemei (*hiperbolikus pontok és egyenesek*) kielégítik a hiperbolikus illeszkedési axiómákat.

Két modellt **izomorfnak** vagy **ekvivalensnek** nevezünk, ha létezik a ponthalmazok között egyenestartó bijekció.

- A most definált $\mathbb{H}$ -t a **hiperbolikus geometria Poincaré-féle félsíkmodelljének** nevezzük.
- A Poincaré-féle félsíkmodell **szögtartó**, mivel a hiperbolikus merőlegesek és szögfelezők a közönséges értelemben is merőlegesek és szögfelezők. (A hiperbolikus szög pontos definíciójával és a szög mérésével nem foglalkozunk.)

A Poincaré-féle körmodell

- Szögtartó modellre másik példa a **Poincaré-féle körmodell**:
Tekintsük a $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ egységkör

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

belsejét.

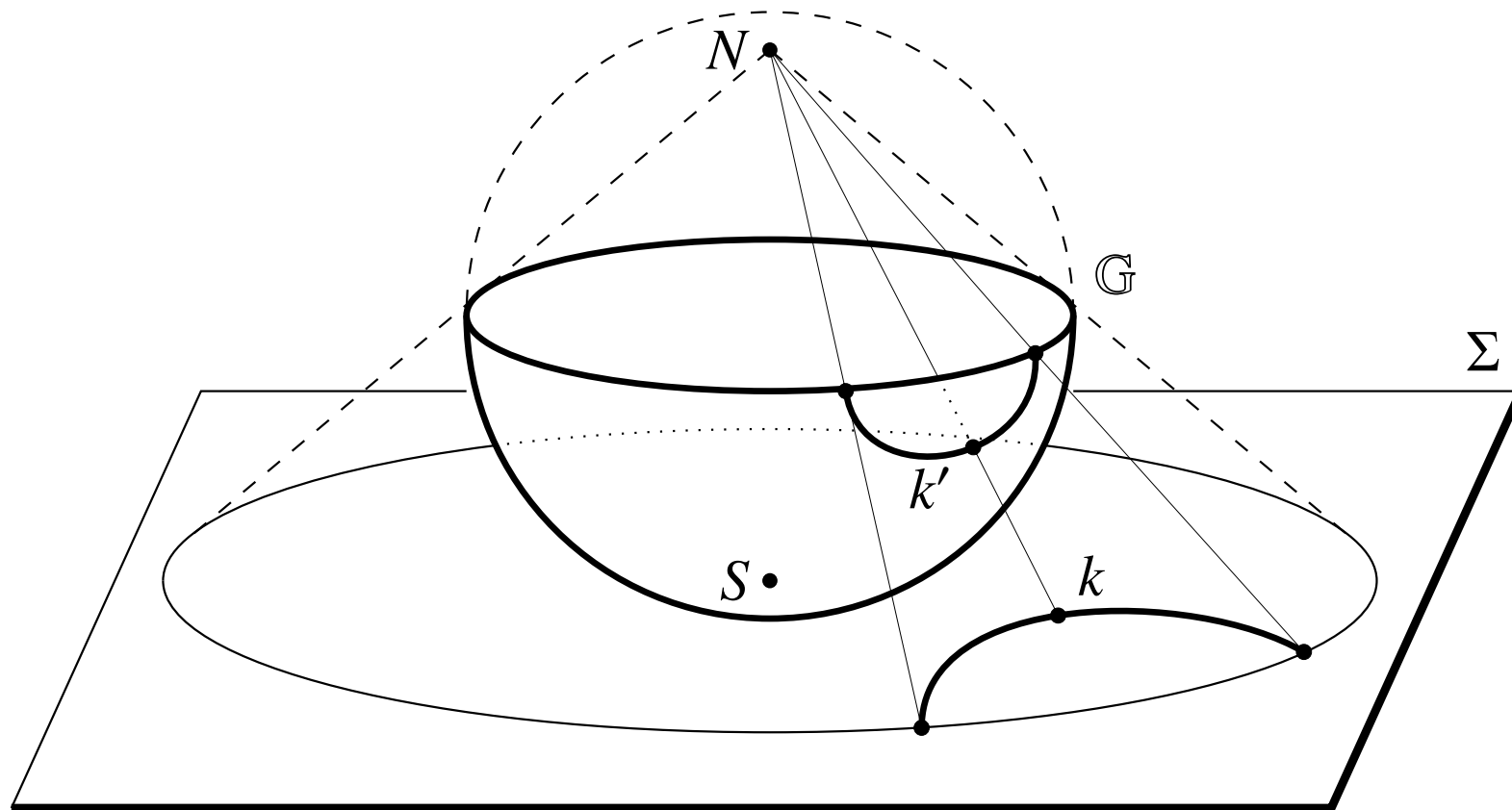
- Ebben a modellben $\mathbb{D}$ pontjai a hiperbolikus pontok, a hiperbolikus egyenesek pedig a **D -re merőleges körök**.
- A két modell **ekvivalenciáját** az alábbi feladat mutatja meg:

Feladat

- 1 A $(-1, 0)$ középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú körre vett α inverzió felcseréli a $\mathbb{H}$ felső félsíkot és a $\mathbb{D}$ egység körlemez.
- 2 Mutassuk meg, hogy α koordinátás alakja $\bar{\mathbb{C}}$ -n: $z \mapsto \frac{i\bar{z} + 1}{\bar{z} - i}$.

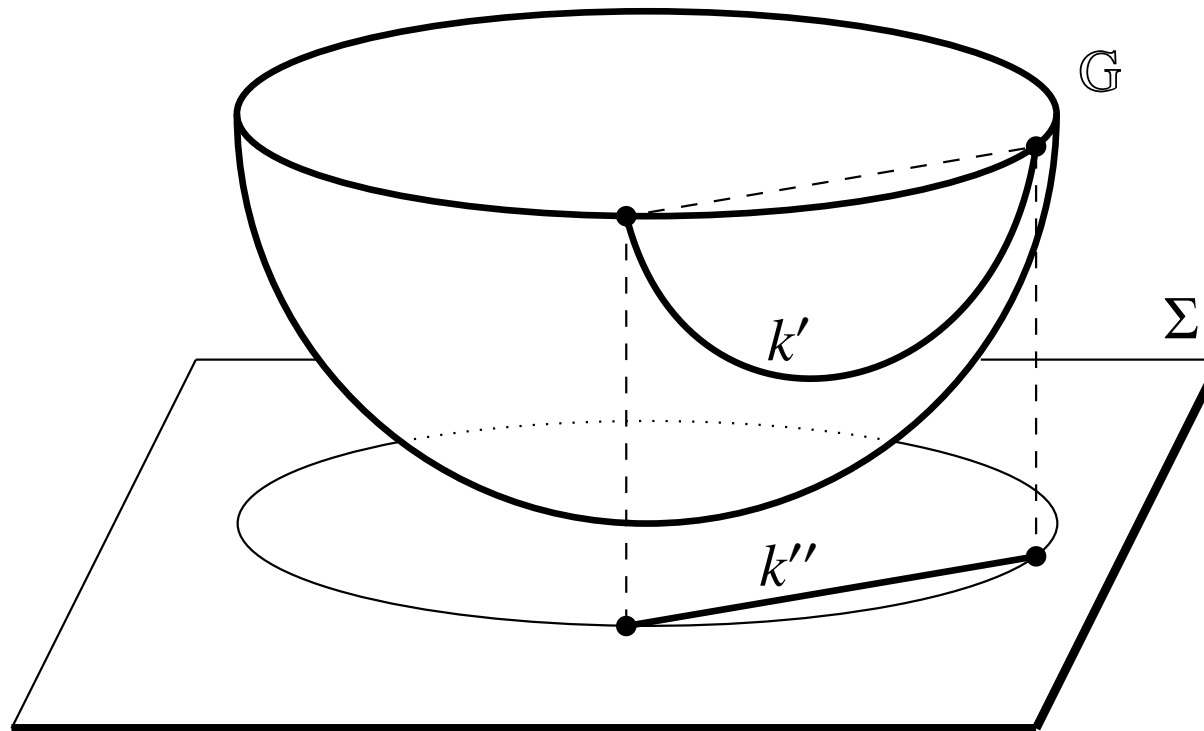
A félgömb-modell

Tekintsük a $\mathbb{G}$ nyílt félgömb-felületet, jelölje G ennek a határoló főkörét. A modellben **a hiperbolikus pontok $\mathbb{G}$ pontjai, a hiperbolikus egyenesek a G -re merőleges gömbi félkörök.** Az alábbi ábra mutatja a félgömb-modell és a körmodell ekvivalenciáját:



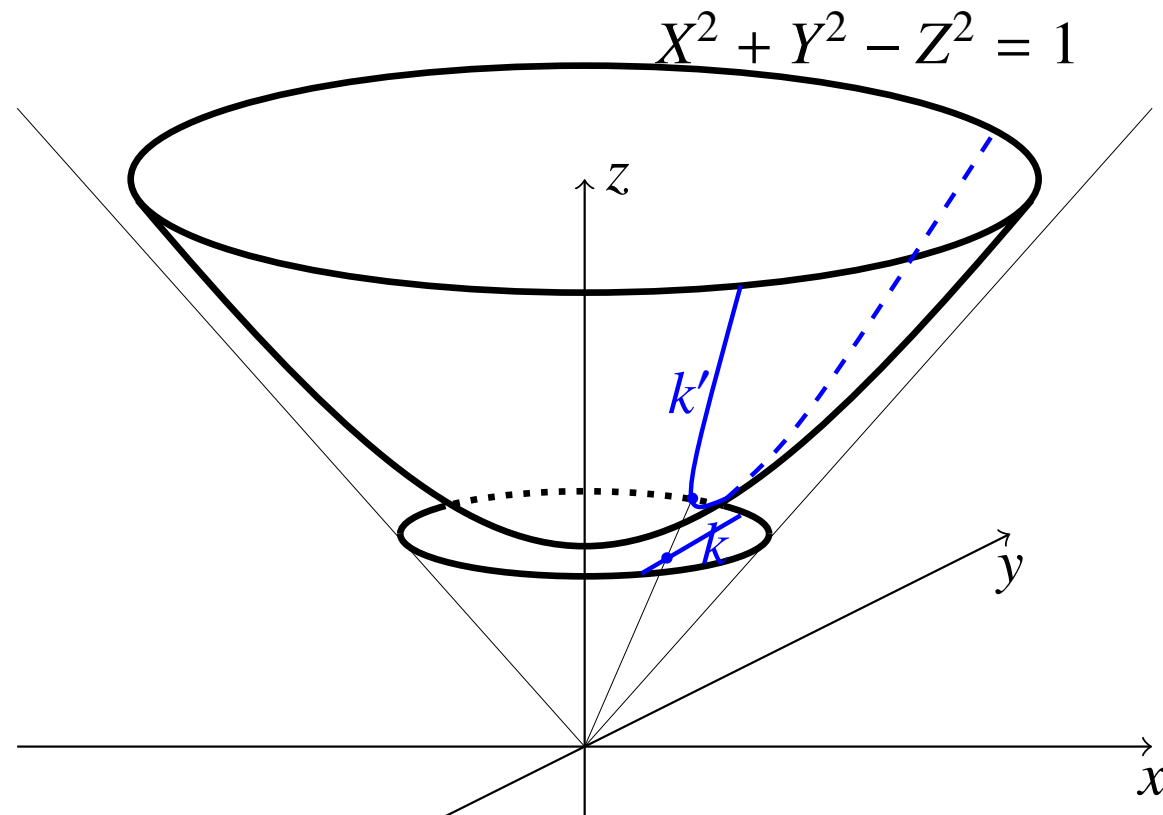
Egy nem szögtartó modell: a Cayley-Klein-modell

A ponthalmaz továbbra is a $\mathbb{D}$ **egységkör belseje**, de ebben a modellben a **hiperbolikus egyenesek az egységkör nyílt húrjai**. Az alábbi ábra mutatja a félgömbmodell és a Cayley-Klein-modell ekvivalenciáját:



A hiperboloid-modell

A hiperboloid-modellben a ponthalmaz az $X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$ kétköpenyű hiperboloid egyik köpenye, az egyenesek pedig az origón átmenő síkok által kimetszett hiperbolák. A Cayley-Klein-modell és a hiperboloid-modell ekvivalenciáját az alábbi ábra mutatja:



Affin lineáris és szemilineáris leképezések

Definíció: Affin lineáris és szemilineáris leképezések

Legyenek $a, b \in \mathbb{C}$ komplex számok, $a \neq 0$, és definiáljuk a

$$\begin{aligned}\sigma_{a,b}^+ : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, & z &\mapsto az + b, \\ \sigma_{a,b}^- : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, & z &\mapsto a\bar{z} + b\end{aligned}$$

leképezéseket. Ezeket **affin szemilineáris transzformációknak** nevezzük. A $\sigma_{a,b}^+$ leképezéseket **affin lineáris transzformációknak** hívjuk.

Könnyen leellenőrizhető, hogy a most definált leképezések a komplex sík bijekciói. Valóban, $z \mapsto az + b$ inverze

$$z \mapsto a^{-1}z - a^{-1}b.$$

Affin lineáris és szemilineáris leképezések alaptulajdonságai

Állítás: Az affin (szemi)lineáris leképezések alaptulajdonságai

- 1 Az affin szemilineáris leképezések csoportot alkotnak. Ebben a csoportban az affin lineáris leképezések 2-indexű részcsoporthoz képeznek.
- 2 Az affin szemilineáris leképezések pontosan a komplex sík hasonlósági transzformációi.
- 3 Az affin lineáris leképezések pontosan a komplex sík irányítástartó hasonlósági transzformációi.
- 4 Legyenek $z_1, z_2, z'_1, z'_2 \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex számok, $z_1 \neq z_2$, $z'_1 \neq z'_2$. Ekkor pontosan egy affin lineáris transzformáció van, melyre $z_1 \mapsto z'_1, z_2 \mapsto z'_2$. (Szigorú 2-tranzitivitás.)

Törtlineáris leképezések

Definíció: Törtlineáris leképezések

Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ komplex számok, melyekre $ad - bc \neq 0$ és tekintsük a

$$T : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

leképezést oly módon, hogy megállapodás szerint $T(-\frac{d}{c}) = \infty$ és $T(\infty) = \frac{a}{c}$. Ekkor T a $\overline{\mathbb{C}}$ Riemann-gömb önmagára vett bijekciója. Ezeket a transzformációkat **törtlineáris leképezéseknek** nevezzük.

Állítás: A törtlineáris leképezések alaptulajdonságai

- 1 A törtlineáris leképezések csoportot alkotnak.
- 2 Minden törtlineáris leképezés előáll $z \mapsto az$, $z \mapsto z + b$ és $z \mapsto \frac{1}{z}$ alakú leképezések szorzataként. (És fordítva.)

Feladatok törtlineáris leképezésekről

Feladatok törtlineáris leképezésekről

- 1 Határozzuk meg azt a törtlineáris leképezést, amely a $0, 1, \infty$ elemeket az $u, v, w \in \overline{\mathbb{C}}$ elemekbe viszi.
- 2 Legyenek $z_1, z_2, z_3, z'_1, z'_2, z'_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ elemek oly módon, hogy $i \neq j$ esetén $z_i \neq z_j, z'_i \neq z'_j$. Mutassuk meg, hogy pontosan egy T törtlineáris traszformáció létezik, melyre $T(z_1) = z'_1, T(z_2) = z'_2$ és $T(z_3) = z'_3$. (Szigorú 3-tranzitivitás.)
- 3 Mutassuk meg, hogy a $T(z) = \frac{1}{z}$ törtlineáris transzformáció felcseréli a

$$K : \alpha z \bar{z} + \bar{b} z + b \bar{z} + \gamma = 0$$

$$K' : \gamma z \bar{z} + b z + \bar{b} \bar{z} + \alpha = 0$$

kögyeneseket.

Möbius-transzformációk és azok komplex koordinátás alakja

Definíció: Möbius-transzformációk

A $\overline{\mathbb{C}}$ Riemann-gömb kögyenestartó transzformációit **Möbius-transzformációknak** nevezzük. A Möbius-transzformációk csoportját $\text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$, az irányítástartó Möbius-transzformációk csoportját pedig $\text{Möb}^+(\overline{\mathbb{C}})$ jelöli.

Állítás: Möbius-transzformációk koordinátás alakja

Az irányítástartó illetve irányításváltó Möbius-transzformációk koordinátás alakja a Riemann-gömbön:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{illetve} \quad z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

Biz. A $z \mapsto az$, $z \mapsto z + b$, $z \mapsto \bar{z}$ és $z \mapsto \frac{1}{z}$ trafók kögyenestartók. A kögyenestartó transzformációk fixpontjai.

Kettősvizony a komplex síkon

Definíció: Kettősvizony

Legyenek $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ különböző komplex számok. Ezek **kettősvizonya**:

$$KV(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} : \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_4} \in \mathbb{C}.$$

Állítás: Törtlineáris leképezések és a kettősvizony

A törtlineáris leképezések megőrzik a kettősvizonyt.

Biz. Elegendő vizsgálni a $z \mapsto az$, $z \mapsto z + b$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ leképezéseket. Ezek megőrzik a kettősvizonyt, és minden törtlineáris leképezés előáll ezek szorzataként.

Törtlineáris leképezések és a valós tengely

Lemma: Törtlineáris leképezések és a kettősviszony

A kettősviszony akkor és csak akkor valós szám, ha a négy elem egy kögyenesre illeszkedik.

Biz. Törtlin. transzformáció alkalmazásával elérhető, hogy $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$. $KV(0, 1; \infty, z_4) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_4 \in \mathbb{R}$.

Lemma: Valós együtthatós törtlineáris leképezések

A valós tengelyt invariánsan hagyó Möbius-transzformációk

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z \mapsto \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta},$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ valós számok.

Biz. Számolással.

Hiperbolikus tükrözések szorzata

Tétel: Hiperbolikus tükrözések szorzata

Az alábbiak ugyanazok:

- 1 Hiperbolikus tengelyes tükrözések szorzatai.
- 2 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ azon kögyenestartó transzformációi, melyek fixen hagyják $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ -t.
- 3 A félsíkmodell

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma > 0), \quad z \mapsto \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma < 0)$$

leképezései, ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ valós számok.

Biz. (2) és (3) ekvivalenciáját láttuk, $(1) \Rightarrow (2)$ nyilvánvaló. A (3)-ban szereplő leképezések előállnak $z \mapsto \alpha z$, $z \mapsto z + \beta$, $z \mapsto -\frac{1}{z}$, $z \mapsto -\bar{z}$ szorzataként, ezek pedig előállnak hiperbolikus tükrözések szorzataként.

Követelmények a hiperbolikus távolságra

Definíció: Távolságfüggvény

Azt mondjuk, hogy a $d : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés **távolságfüggvény** $\mathbb{H}$ -n, ha minden $P, Q, R \in \mathbb{H}$ -ra az alábbiak teljesülnek:

- ① $d(P, Q) \geq 0$ és $d(P, Q) = 0$ akkor és csak akkor, ha $P = Q$.
 - ② $d(P, Q) = d(Q, P)$.
 - ③ $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$. (Háromszög-egyenlőtlenség.)
- A d távolságfüggvény **mozgásinvariáns**, ha $d(P, Q) = d(m(P), m(Q))$ teljesül minden m hiperbolikus tengelyes tükrözésre.
 - A d távolságfüggvény teljesíti az **erős háromszög-egyenlőtlenséget**, ha $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$ akkor és csak akkor teljesül, ha PR hiperbolikus szakasz tartalmazza Q -t.

A távolságfüggvény alaptulajdonságai

- A mozgásinvariancia miatt d -t megőrzi a valós tengellyel **párhuzamos eltolások** és az olyan **középpontos nyújtások**, melyek középpontja a valós tengelyen van. (Ezek előállnak két hiperbolikus tengelyes tükrözés szorzataként.)
- **Elegendő meghatározni d -t a képzetes tengelyen.** Csakugyan, adott P, Q pontok esetén két tengelyes tükrözéssel elvihetjük P -t i -be és Q -t a képzetes tengely $Q' = ix$ pontjába ($x \in \mathbb{R}$). A mozgásinvariancia miatt

$$d(P, Q) = d(i, ix).$$

A távolságfüggvény meghatározása I.

Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$ valós számok és $P = ie^x, Q = ie^y$ a képzetesen tengely két pontja. Definiáljuk az

$$f(x, y) = d(ie^x, ie^y) = d(P, Q)$$

folytonos függvényt. Ekkor

$$f(x + a, y + a) = d(e^a ie^x, e^a ie^y) = d(ie^x, ie^y) = f(x, y),$$

mert a $P \mapsto e^a P$ távolságtartó középpontos nyújtás. Ebből

$$f(x, y) = f(x - y, 0) = g(x - y),$$

ahol g folytonos függvény, melyre $g(-x) = g(x)$ és $g(0) = 0$. Mivel a képzetes tengely hiperbolikus egyenes, alkalmazhatjuk az **erős háromszög-egyenlőtlenséget**: $x, y > 0$ valós számokra

$$f(0, x) + f(x, x + y) = f(0, x + y) \Rightarrow g(x) + g(y) = g(x + y).$$

A távolságfüggvény meghatározása II.

Standard trükk: g **additív** és **monoton** $\implies g$ folytonos, és $g(x) = cx$, ahol $x > 0$ és $c = g(1)$. Általában:

$$g(x) = c|x| \quad \text{és} \quad f(x, y) = c|x - y|.$$

Felhasználva f definícióját, az $P = ix$, $Q = iy$ pontokra

$$d(P, Q) = d(ix, iy) = c|\ln(x) - \ln(y)| = c \left| \ln \left(\frac{x}{y} \right) \right|.$$

A PQ hiperbolikus egyenes végtelen távoli pontjai $0, \infty$ és

$$\frac{x}{y} = \frac{0 - ix}{iy - 0} : \frac{\infty - ix}{iy - \infty} = KV(ix, iy; 0, \infty) = KV(P, Q; 0, \infty).$$

A távolságfüggvény meghatározása III.

Állítás: Mozgásinvariáns hiperbolikus távolságfüggvény

A hiperbolikus sík mozgásinvariáns távolságfüggvényei pontosan a

$$d(P, Q) = c |\ln(KV(P, Q; R_1, R_2))|$$

alakú leképezések, ahol $c > 0$ rögzített konstans és R_1, R_2 a PQ hiperbolikus egyenes végtelen távoli pontjai.

Biz. A hiperbolikus mozgások tükrözések szorzatai, azaz a közös sík kögyenestartó transzformációi. Ezek mind **megőrzik a kettősvizonyt**, amiből következik az adott **d mozgásinvarianciája**. Az **erős háromszög-egyenlőtlenséget elegendő a képzetes tengelyre belátni**, ez pedig következik az előző számolásokból.

Megj. A **Bolyai-geometriában a c konstans** hasonló szerepet tölt be, mint a **gömbi geometriában a gömb sugara**.

Feladat távolságmérésre

Feladat

Határozzuk meg a $P = 2 + i$ és $Q = -3 + i$ hiperbolikus pontok távolságát $c = 1$ választás mellett.

Megoldás. Könnyen látható, hogy a $c = -\frac{1}{2}$ pont euklideszi távolsága $r = \frac{\sqrt{29}}{2}$ P -től és Q -tól, azaz a PQ hiperbolikus egyenest a c középpontú, r sugarú kör tartalmazza. A PQ végtelen távoli pontjai

$R_{1,2} = c \pm r = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$. A kettősvizonyra

$$\begin{aligned} \frac{R_1 - P}{Q - R_1} \div \frac{R_2 - P}{Q - R_2} &= \frac{\frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{5}{2} - i}{-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2} + i} \div \frac{\frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{3}{2} - i}{-\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2} + i} = \\ &= \frac{-5\sqrt{29} + 29}{5\sqrt{29} + 29} = \frac{-5 + \sqrt{29}}{5 + \sqrt{29}} = \frac{27 - 5\sqrt{29}}{2}, \end{aligned}$$

tehát $d_{\mathbb{H}}(P, Q) = |\ln((27 - 5\sqrt{29})/2)|$.

Ponthalmazok távolsága

Definíció: Ponthalmazok távolsága

Legyen P hiperbolikus pont, $X, Y \subset \mathbb{H}$ pedig ponthalmazok. Az alábbi távolságokat definiálhatjuk:

$$d(P, X) = \inf_{Q \in X} d(P, Q), \quad d(X, Y) = \inf_{P \in X, Q \in Y} d(P, Q).$$

Feladat

- 1 Legyen ℓ hiperbolikus egyenes és rajta kívül P hiperbolikus pont. Mutassuk meg, hogy $d(P, \ell) = d(P, Q)$, ahol Q a P -ből ℓ -re bocsátott merőleges talppontja.
- 2 Mutassuk meg, hogy a $P = r(\cos(u) + i \sin(u))$ pontnak a képzetes tengelytől vett távolsága $\left| \ln \left(\frac{\sin(u)}{\cos(u) + 1} \right) \right|$.

Egyenesek távolsága

Állítás: Párhuzamos egyenesek távolsága

- 1 Legyen k, ℓ két párhuzamos hiperbolikus egyenes. Tegyük fel, hogy k, ℓ nem ultraparalelek, és legyen m a közös merőlegesük. Ekkor $d(k, \ell) = d(P, Q)$, ahol $P = k \cap m$ és $Q = \ell \cap m$.
- 2 Két hiperbolikus egyenes akkor és csak akkor ultraparalel, ha távolságuk nulla.

Biz. Legyen ℓ a képzetes tengely és P a k általános pontja, azaz

$$P = x + it \quad \text{vagy} \quad P = c + r \cos(t) + i \sin(t)$$

alakban futtatható. A várt eredmény egyszerű függvénydiszkusszióból megkapható az egyik előző feladat felhasználásával, amiből a

$P = p_1 + ip_2$ pont ℓ -től vett távolságára $\ln \left(\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_1}} \right)$ adódik.

A közöséges és a hiperbolikus távolság kapcsolata I.

A továbbiakban a hiperbolikus metrika konstansjára a $c = 1$ feltevést tesszük.

Állítás: A közöséges és a hiperbolikus távolság kapcsolata

Jelölje $d_{\mathbb{E}}$ illetve $d_{\mathbb{H}}$ a komplex félsíkmodellben az euklideszi illetve a hiperbolikus távolságot. Ha a $P = p_1 + ip_2$ és $Q = q_1 + iq_2$ hiperbolikus pontok kellően közel vannak egymáshoz, akkor

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) \approx \frac{1}{p_2} d_{\mathbb{E}}(P, Q).$$

Biz. Legyen $\ell = PQ$ hiperbolikus egyenes. Tfh. ℓ közöséges félkör, ellenkező esetben a számolás könnyű.

A közönséges és a hiperbolikus távolság kapcsolata II.

Legyen $c, r \in \mathbb{R}$ az ℓ középpontja, illetve sugara, ekkor P, Q felírható

$$P = c + r(\cos(u) + i \sin(u)), \quad Q = c + r(\cos(v) + i \sin(v))$$

alakban. Az ℓ végtelen távoli pontjai $R_{1,2} = c \pm r$. A $KV(P, Q; R_1, R_2)$ kettősviszony értéke

$$\frac{\sin(u) \sin(v)}{(1 - \cos(u))(\cos(v) + 1)}.$$

Helyettesítsünk ebbe $v = u + t$ -t, ekkor a hiperbolikus távolság:

$$d_{\mathbb{H}} = \ln \left(\frac{\sin(u)}{1 - \cos(u)} \right) + \ln \left(\frac{\sin(u + t)}{\cos(u + t) + 1} \right).$$

Differenciáljuk t szerint: $d'_{\mathbb{H}} = \frac{1}{\sin(u + t)}.$

A közönséges és a hiperbolikus távolság kapcsolata III.

A közönséges távolságra

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{E}}(P, Q) &= r \sqrt{(\cos(u+t) - \cos(u))^2 + (\sin(u+t) - \sin(u))^2} \\&= r \sqrt{2 - 2(\cos(u+t)\cos(u) + \sin(u+t)\sin(u))} \\&= r \sqrt{2 - 2\cos t} \\&= 2r \sin(t/2),\end{aligned}$$

melynek t szerinti deriváltja

$$d'_{\mathbb{E}} = r \cos(t/2).$$

A L'Hôpital-szabály szerint

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{E}}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d'_{\mathbb{H}}}{d'_{\mathbb{E}}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{r \sin(u+t) \cos(t/2)} = \frac{1}{r \sin(u)} = \frac{1}{p_2}.$$

A hiperbolikus ívhossz a félsíkmodellben I.

Állítás: A hiperbolikus ívhossz a félsíkmodellben

Legyen $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ folytonosan differenciálható görbe a hiperbolikus síkon. Ekkor g ívhossza

$$s = \int_a^b \frac{1}{\Im(g(t))} |g'(t)| dt.$$

Biz. Az ívhossz a beírt töröttvonalak hosszának szuprémuma.

Megmutatjuk, hogy kellően sűrű beosztás esetén a töröttvonal hossza közel van a fenti integrál értékéhez. Legyen $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ az $[a, b]$ intervallum beosztása, és $P_i = g(t_i)$.

A hiperbolikus ívhossz a félsíkmodellben II.

Ekkor

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} d_{\mathbb{H}}(P_i, P_{i+1}) &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\mathfrak{I}(P_i)} d_{\mathbb{E}}(P_i, P_{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\mathfrak{I}(g(t_i))} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\mathfrak{I}(g(t_i))} |g'(\tau_i)| |t_{i+1} - t_i| \\ &\rightarrow \int_a^b \frac{1}{\mathfrak{I}(g(t))} |g'(t)| dt,\end{aligned}$$

ha a beosztást megfelelően sűrítjük.

Hiperbolikus (és nem hiperbolikus) sokszögek

Definíció: Konvex burok

Az X ponthalmaz **konvex burka** az X -et tartalmazó **legsűkebb konvex** halmaz.

Definíció: Konvex hiperbolikus sokszög

Véges sok hiperbolikus pont konvex burkát **konvex hiperbolikus sokszögnek** nevezzük.

- Megengedjük, hogy a csúcsok között végtelen távoli hiperbolikus pontok is előforduljanak.
- Konvex sokszög esetén értelmezhetjük az alábbi fogalmakat: **támaszfélsíkja, csúcs, él.**

Állítás: A hiperbolikus sokszögek háromszögelése

Minden **korlátos** hiperbolikus sokszög háromszögekre bontható.

A párhuzamos oldalú hiperbolikus háromszög

Definíció: A párhuzamos oldalú hiperbolikus háromszög

Tekintsük három páronként ultraparalel hiperbolikus egyenest. Ezek konvex burkát **párhuzamos oldalú hiperbolikus háromszögnek** nevezzük.

Állítás: A párhuzamos oldalú háromszögek egybevágók

- 1 A párhuzamos oldalú háromszögeket a három végtelen távoli csúcspontjuk egyértelműen meghatározza.
- 2 Két párhuzamos oldalú hiperbolikus háromszög hiperbolikus mozgással egymásba vihető.

Biz. Egy tengelyes tükrözéssel az egyik csúcsot elvisszük ∞ -be. A párhuzamos eltolással és nyújtással a másik két csúcs elvihető ± 1 -be.

Területmérés

Definíció: Területmérés a hiperbolikus síkon

Jelölje $\mathcal{K}$ a konvex hiperbolikus sokszögek halmazát. Azt mondjuk, hogy a $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ **területmérés**, ha az alábbiak teljesülnek:

- 1 Minden $K \in \mathcal{K}$ esetén $T(K) \geq 0$.
- 2 T mozgásinvariáns, azaz minden m mozgásra és K konvex sokszögre $T(K) = T(m(K))$.
- 3 Ha a K, K' konvex sokszögek esetén $K \cap K'$ él, akkor $T(K \cup K') = T(K) + T(K')$.
- 4 A Δ párhuzamos oldalú háromszögre $T(\Delta) = \pi$.

Megjegyzések.

- A mozgásinvariancia miatt a párhuzamos oldalú háromszögek területe ugyanannyi.
- Elegendő T -t a hiperbolikus háromszögek halmazán meghatározni.

Motiváció: A gömbi háromszögek területe

Lemma

Az α szögű gömbszelet területe 2α .

$$H + A = 2\alpha$$

$$H + B = 2\beta$$

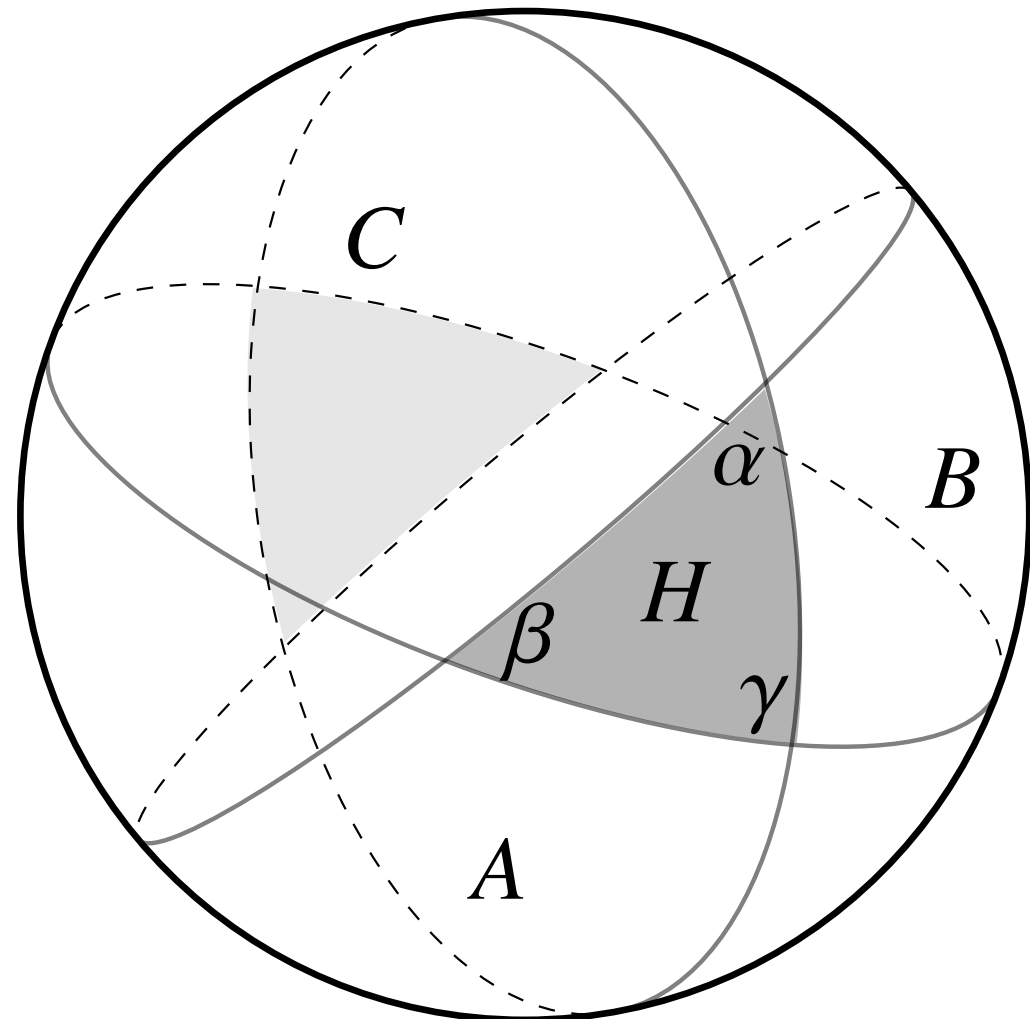
$$H + C = 2\gamma$$

$$2H + 2A + 2B + 2C = 4\pi$$

Állítás

Az α, β, γ szögű gömbi háromszög területe

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi.$$



Ideális csúcsokkal rendelkező háromszögek területe

Állítás: Két ideális csúccsal rendelkező háromszög

Tekintsük az $ABC\triangle$ háromszöget, ahol A rendes, míg B és C ideális hiperbolikus pontok. Jelölje b^+, c^+ a A -ból induló oldalakat. Ekkor b^+, c^+ félegyenesek, és az $ABC\triangle$ -t egyértelműen meghatározza a (b^+, c^+) pár.

Köv. Az ilyen háromszöget mozgás erejéig a közös csúcsnál lévő szög egyértelműen meghatározza.

Lemma: Két ideális csúccsal rendelkező háromszögek uniója

Tekintsük az $ABC\triangle$ és $ABD\triangle$ háromszögeket, ahol A közös csúcs, B, C, D pedig ideális hiperbolikus pontok és $ABC\triangle \cap ABD\triangle = AB$. Ekkor

$$ABC\triangle \cup ABD\triangle = ACD\triangle \cup BCD\triangle.$$

Két ideális csúccsal rendelkező háromszög területe

Állítás: Két ideális csúccsal rendelkező háromszög területe

Tekintsük az $ABC\Delta$ háromszöget, ahol A rendes, míg B és C ideális hiperbolikus pontok. Jelölje α az A -nál lévő szög. Ekkor tetszőleges T területmérés esetén $T(ABC\Delta) = \pi - \alpha$.

Vezessük be a $g(\alpha) = \pi - T(ABC\Delta)$ jelölést. Mivel α mozgás erejéig egyértelműen meghatározza a háromszöget, ezért g jól definált nem negatív értékű függvény. Legyen $ABD\Delta$ megfelelő háromszög β szöggel. A lemma szerint

$$T(ABC\Delta) + T(ABD\Delta) = T(ACD\Delta) + T(BCD\Delta) = T(ACD\Delta) + \pi,$$

ezért

$$\pi - g(\alpha) + \pi - g(\beta) = \pi - g(\alpha + \beta) + \pi \implies g(\alpha + \beta) = g(\alpha) + g(\beta).$$

A szokásos módon adódik $g(\alpha) = \alpha$, azaz $T(ABC\Delta) = \pi - \alpha$.

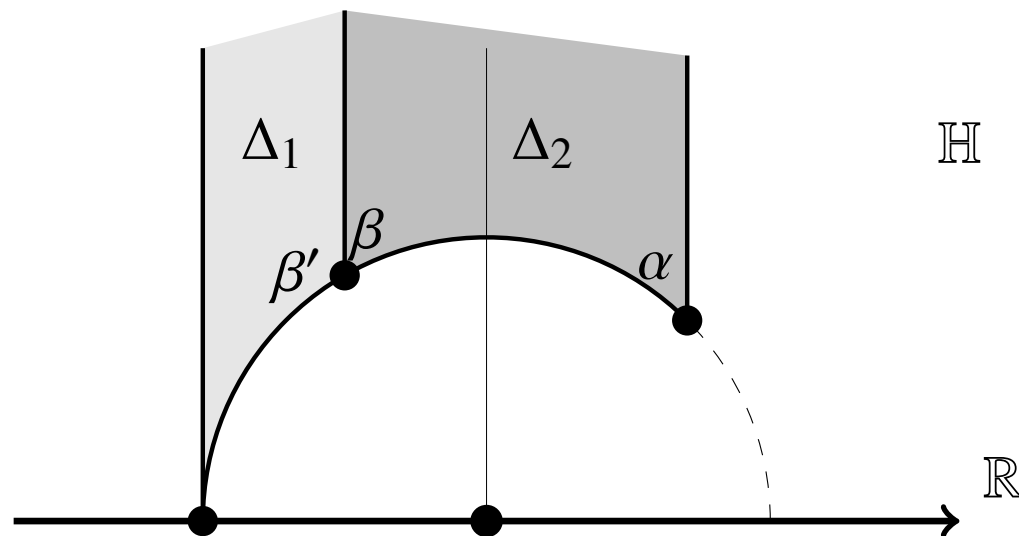
Egy ideális csúccsal rendelkező háromszögek területe

Állítás: Egy ideális csúccsal rendelkező háromszögek területe

Tekintsük az $ABC\Delta$ háromszöget, melyben A, B közönséges, C pedig ideális pontok. Jelölje α, β az A, B csúcsoknál lévő belső szögeket.

Ekkor $T(ABC\Delta) = \pi - \alpha - \beta$.

Biz. Az alábbi ábrában $T(\Delta_1) = \pi - \beta' = \beta$, $T(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \pi - \alpha$,
amiből adódik $T(\Delta_2) = T(\Delta_1 \cup \Delta_2) - T(\Delta_1) = \pi - \alpha - \beta$.



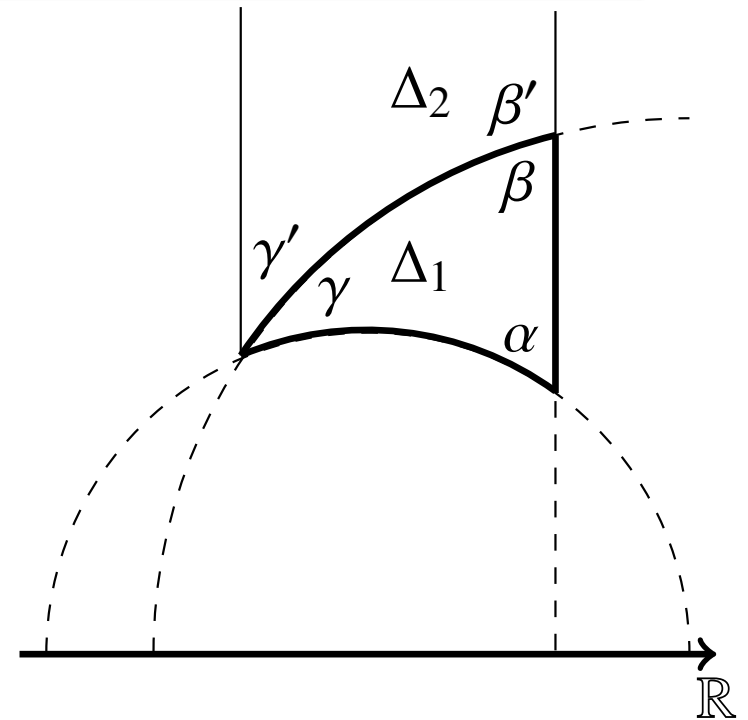
Közösleges háromszög területe

Tétel: A hiperbolikus háromszög területe (Gauss-Bonnet)

Legyen α, β, γ az $ABC\Delta$ hiperbolikus háromszög három belső szöge. Ekkor $T(ABC\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

Biz. A rajz mutatja, hogy a Δ_1 háromszöget a Δ_2 háromszöggel hiperbolikus csúccsal rendelkező háromszöggé egészíthetjük ki. Ezekre

$$\begin{aligned} T(\Delta_1) &= T(\Delta_1 \cup \Delta_2) - T(\Delta_2) \\ &= \pi - \alpha - \gamma - \gamma' - (\pi - \gamma' - \beta') \\ &= \pi - \alpha - \beta - \gamma. \end{aligned}$$



A területmérés és következményei

Állítás: Konvex sokszögek területe

Legyen K konvex n -szög, melynek belső szögei rendre $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
Ekkor

$$T(K) = (n - 2)\pi - \alpha_1 - \dots - \alpha_n.$$

Biz. n szerinti teljes indukcióval.

Következmény: A területmérés következményei

- 1 A hiperbolikus síkon egyetlen területmérés létezik.
- 2 A hiperbolikus síkon az egyenlő oldalú háromszögekben a szögek meghatározzák az oldalakat.
- 3 A hiperbolikus síkon minden hasonlósági transzformáció egybevágóság.

Trigonometria az euklideszi síkon

Tekintsük az euklideszi sík azon háromszögét, melynek oldalai a, b, c és megfelelő szögei α, β, γ . Ekkor teljesülnek:

Szinusz-tétel:
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Koszinusz-tétel:
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Ezek segítségével **kiszámolhatók**:

- Az oldalak ismeretében a szögek.
- Két oldal és a közbezárt szög ismeretében a harmadik oldal.
- Egy oldal és a rajta fekvő szögek ismeretében a két másik oldal.

Ezzek szemben a szögekből nem tudjuk az oldalakat meghatározni.
(Az euklideszi síkon vannak hasonlóságok.)

Trigonometria a hiperbolikus síkon

Definíció: A hiperbolikus trigonometrikus függvények

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Tétel: Trigonometria a hiperbolikus síkon

Tekintsük az $ABC\triangle$ hiperbolikus háromszöget és jelöljük a megfelelő oldalakat illetve szögeket a, b, c -vel és α, β, γ -val. Ekkor teljesülnek

az alábbiak: Szinusz-tétel:
$$\frac{\sin(\alpha)}{\sinh(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sinh(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sinh(c)}.$$

1. és 2. koszinusz-tétel:

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \cos(\alpha). \\ \cos(\gamma) &= -\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\gamma) \cosh(c). \end{aligned}$$

Tetszőleges tartomány területe

Differenciálgeometriai módszerekkel megmutatható, hogy mivel a hiperbolikus sík Poincaré-féle félsík-modelljében az ívhosszat az

$$s = \int_a^b \frac{1}{\Im(g(t))} |g'(t)| dt$$

integrállal számoljuk, ezért ugyanitt az S tartomány területét az

$$T(S) = \int_S \frac{1}{\Im(z)^2} dx dy = \int_S \frac{1}{y^2} dx dy$$

kettős integrál adja meg. Ez alapján például az

$$S = \{z = x + iy \mid -1 \leq x \leq 1, y \geq \sqrt{1 - x^2}\}$$

párhuzamos oldalú háromszög területére adódik, hogy

$$\int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin(x)]_{-1}^1 = \pi.$$

Izometriák az abszolút síkon

Állítás: Tengelyes tükrözések konjugáltja

Legyen τ_e az e egyenesre vett tengelyes tükrözés, α pedig tetszőleges izometria. Ekkor $\alpha \circ \tau_e \circ \alpha^{-1} = \tau_{\alpha(e)}$.

Tétel: Izometriák osztályozása

Legyen α tetszőleges izometria.

- ❶ Ha α -nak van három általános helyzetű fixpontja, akkor α az identitás.
- ❷ Ha α -nak P, Q fixpontjai, akkor $\alpha = \tau_a$ tengelyes tükrözés az $a = PQ$ egyenesre.
- ❸ Ha α -nak az egyetlen fixpontja P , akkor $\alpha = \tau_a \circ \tau_b$, ahol $P = a \cap b$.
- ❹ Ha α -nak nincs fixpontja, akkor vagy $\alpha = \tau_a \circ \tau_b$, ahol a, b párhuzamosak, vagy pedig $\alpha = \tau_a \circ \tau_b \circ \tau_c$.

Izometriák az abszolút síkon (folyt.)

A bizonyítás alapja:

Lemma

Ha az α izometriának P, Q fixpontjai, akkor a PQ egyenes minden pontja fix.

Következmény: A három tükrözés tétele

Legyen a, b, c három egyenes a P ponton keresztül. Ekkor valamely P -n átmenő d egyenesre teljesül $\tau_a \circ \tau_b \circ \tau_c = \tau_d$.

Következmény: $4 = 2$

Négy tengelyes tükrözés szorzata felírható két tengelyes tükrözés szorzataként.

Biz. Komplikált, ha a tengelyek párhuzamosak és nem ultraparallelek.

Hiperbolikus izometriák jellemzése

Tétel: A hiperbolikus izometriák jellemzése

Az alábbiak ugyanazok:

- 1 Hiperbolikus izometriák.
- 2 Hiperbolikus tengelyes tükrözések szorzatai.
- 3 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ azon kögyenestartó transzformációi, melyek fixen hagyják $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ -t.
- 4 A félsíkmodell

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{és} \quad z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

alakú komplex törtlineáris leképezései, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

„Írányítástartó izometriák”: Mozgások

Definíció: Mozgások

A páros sok tükrözés szorzataként előálló izometriákat **mozgásoknak** nevezzük.

Állítás: A mozgások részcsoporthat alkotnak

A mozgások az izometriák csoportjában 2 indexű részcsoporthat alkotnak. A síkbeli mozgások az identitás és a két tengelyes tükrözés szorzataként előálló transzformációk.

Definíció: Középpontos tükrözések

Messe egymást a, b a P pontban merőlegesen. A $\tau_a \circ \tau_b$ izometriát **P középpontú tükrözésnek** nevezzük.

Példa: Mozgások az euklideszi síkon

Eltolások és forgatások. Középpontos tükrözések.

1-paraméteres mozgáscsoportok

Definíció: 1-paraméteres mozgáscsoportok és azok pályái

Jelölje $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ a hiperbolikus sík mozgásainak csoportját és legyen

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \text{Möb}^+(\mathbb{H}), \quad t \mapsto \alpha_t$$

csoport-homomorfizmus, azaz minden $t, s \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha_t \circ \alpha_s = \alpha_{t+s}$.

Ekkor az $\{\alpha_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ halmazt **1-paraméteres mozgáscsoportnak**

nevezzük. A P pont **pályája** az $\{\alpha_t(P) \mid t \in \mathbb{R}\}$ halmaz.

Példa: 1-paraméteres mozgáscsoportok az euklideszi síkon

Jelölje α_t az $\mathbf{0}$ -körüli t -szögű forgást. Legyen $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ vektor és jelölje β_t az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + t\mathbf{u}$ eltolást. Ekkor $\{\alpha_t\}$ és $\{\beta_t\}$ 1-paraméteres mozgáscsoportok. A pályák az első esetben körök, a másodikban $\mathbf{u}$ irányvektorú egyenesek.

Forgások a hiperbolikus síkon I.

Tekintsük az

$$\alpha_t : z \mapsto \frac{\cos(t)z + \sin(t)}{-\sin(t)z + \cos(t)}$$

mozgásokat.

Állítás: Hiperbolikus forgások

- 1 $\{\alpha_t\}$ 1-paraméteres mozgáscsoport.
- 2 Ha $t = k\pi$, akkor $\alpha_t = \text{id}$.
- 3 Minden t -re $\alpha_t(i) = i$.
- 4 Minden α_t előáll két i -n átmenő hiperbolikus egyenesre vett tengelyes tükrözés szorzataként.

Biz. (1)–(3) könnyű számolás. (4): Mutassuk meg, hogy

$\tau_t : z \mapsto \frac{\cos(t)\bar{z} + \sin(t)}{\sin(t)\bar{z} - \cos(t)}$ i -n átmenő hiperbolikus egyenesre vett tengelyes tükrözés és $\alpha_t = \tau_0 \circ \tau_t$.

Forgások a hiperbolikus síkon II.

Következmény

A $P = z$ hiperbolikus pont pályája i középpontú hiperbolikus kör.

Biz. $d_{\mathbb{H}}(i, z) = d_{\mathbb{H}}(\alpha_t(i), \alpha_t(z)) = d_{\mathbb{H}}(i, \alpha_t(z))$.

Feladat

Mutassuk meg, hogy a $P = xi$ hiperbolikus pont pályája az $O = \frac{(x^2+1)}{2x}i$ középpontú euklideszi kör. Határozzuk meg ezen kör euklideszi és hiperbolikus sugarát.

Állítás: Hiperbolikus körök

A Poincaré-féle félsíkmodellben a hiperbolikus körök pontosan az $\overline{\mathbb{R}}$ -et nem metsző euklideszi körök.

Biz. A mozgások kögyenestartók és tranzitívan hatnak az r sugarú körökön.

Parabolikus transzformációk

Tekintsük a

$$\beta_t : z \mapsto z + t$$

hiperbolikus mozgásokat. Könnyen leellenőrizhető:

- 1 $\{\beta_t\}$ 1-paraméteres mozgáscsoport.
- 2 $\{\beta_t\}$ pályái $\mathbb{R}$ -el párhuzamos euklideszi egyenesek. Más szóval, a pályák az $\overline{\mathbb{R}}$ -at ∞ -ben érintő kögyenesek.
- 3 Minden β_t előáll két ultraparalel tengelyű tükrözés szorzataként.

Definíció: Paraciklusok

Az $\overline{\mathbb{R}}$ -at érintő kögyeneseket **paraciklusoknak** nevezzük.

Következmény: Minden paraciklus előáll, mint a $\{\beta_t\}$ csoport egy **konjugáltjának** pályája. $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ tranzitívan hat a paraciklusokon.

Hiperbolikus eltolások I.

Definíció: Hiperbolikus eltolások

Két középpontos tükrözés szorzataként előálló hiperbolikus mozgásokat **hiperbolikus eltolásoknak** nevezzük. A centrumokat összekötő egyenes az eltolás **tengelye**.

Állítás: Hiperbolikus eltolások

- 1 A hiperbolikus eltolások pontosan a két tengelyes tükrözés szorzataként előálló mozgások, ahol a tengelyek párhuzamosak, de nem ultraparalelek.
- 2 A hiperbolikus eltolás egyetlen fixegyenes a tengelye.
- 3 Két hiperbolikus eltolás szorzata akkor és csak akkor hiperbolikus eltolás, ha tengelyük közös.

Biz. Csak (1): Legyen a, b két megfelelő egyenes, m a közös merőleges, $A = a \cap m, B = b \cap m$. Ekkor $\tau_a \tau_b = \tau_A \tau_B$.

Hiperbolikus eltolások II.

Állítás: Hiperbolikus eltolások

Tekintsük a $\gamma_t : z \mapsto e^t z$ hiperbolikus mozgásokat. Ekkor

- 1 $\{\gamma_t\}$ 1-paraméteres mozgáscsoport.
- 2 A γ_t -k pontosan az ℓ tengelyű hiperbolikus eltolások, ahol ℓ a fél képzetes tengely.
- 3 Minden hiperbolikus eltolás konjugált valamely γ_t -hez.
- 4 Bármely A, B pontokhoz pontosan egy γ hiperbolikus eltolás van, melyre $\gamma(A) = B$.

Állítás: Távolságvonalak (hiperciklusok)

$\{\gamma_t\}$ pályái euklideszi egyenesek. Általában, az m tengelyű eltolások csoportjának pályái $\overline{\mathbb{R}}$ -t két pontban metsző kögyenesek. Ezek az m -től azonos távolságra lévő pontok halmazai.

„Vektortér” struktúra $\mathbb{H}$ -n

A hiperbolikus eltolások **nem** alkotnak csoportot. Rögzítsünk egy O pontot és vezessük be az $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ helyvektorokon az

$$\overrightarrow{OA} \oplus \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O\gamma(B)}$$

műveletet, ahol $\gamma(O) = A$ hiperbolikus eltolás. Ez **„kvázi”** csoport: invertálható és egységelemes, de nem asszociatív.

A hiperbolikus sík Cayley-Klein-féle körlapmodelljében ez a művelet megfelel a **sebességvektorok Einstein-féle addíciójának**.

Hiperbolikus kör, paraciklus, távolságvonal

Állítás: Hiperbolikus kör, paraciklus, távolságvonal

- 1 Legyen A, B, C három hiperbolikus pont. Ekkor pontosan egy hiperbolikus kör vagy paraciklus vagy távolságvonal létezik, mely átmegy ezen a három ponton.
- 2 A hiperbolikus kör, a paraciklus és a távolságvonal a Poincaré-féle félsík- és körlapmodellben kögyenesek. A félgömbmodellben körök. A Cayley-Klein-féle körlapmodellben pedig ellipszisek.
- 3 A hiperbolikus kör, a paraciklus és a távolságvonal a hiperbolikus síkon pontosan az önmagukba eltolható görbék. Ezen görbék geodetikus görbülete konstans.

Az előadásban hivatkozott matematikusok I.

- **Euklidesz**, görög matematikus, Kr.e. 325–265
- **Omar Khayyám**, perzsa matematikus, csillagász és író, 1048–1131
- **Gérard Desargues**, francia mérnök és matematikus, 1591–1661
- **Gottfried Wilhelm von Leibniz**, német matematikus és filozófus, 1646–1713
- **Giovanni Gerolamo Saccheri**, olasz jezsuita pap és matematikus, 1667–1733
- **Carl Friedrich Gauss**, német matematikus, csillagász és fizikus, 1777–1855
- **Nikoláj Ivanovics Lobacsevszkij**, orosz matematikus, 1792–1856
- **Bolyai János**, magyar matematikus, 1802–1860

Az előadásban hivatkozott matematikusok II.

- **Pierre Ossian Bonnet**, francia matematikus, 1819–1892
- **Bernhard Riemann**, német matematikus, 1826–1866
- **August Ferdinand Möbius**, német matematikus és elméleti csillagász, 1790–1868
- **Arthur Cayley**, brit matematikus, 1821–1895
- **Henri Poincaré**, francia matematikus, elméleti fizikus és filozófus, 1854–1912
- **Felix Klein**, német matematikus, 1849–1925
- **Moritz Pasch**, német matematikus, 1843–1930
- **David Hilbert**, német matematikus, 1862–1943
- **Werner Karl Heisenberg**, német fizikus, 1901–1976