

Bevezetés a matematikába

matematika BSc előadás és gyakorlat

Nagy Gábor Péter

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet, Geometria Tanszék

2012/2013-os tanév I. féléve

Tagolás I

- 1 Matematikai alapfogalmak
 - Axiómák, alapfogalmak, matematikai logika
 - Halmazok és leképezések
- 2 Összeszámlálási feladatok
 - Összeszámlálási feladatok
 - Közepek, nevezetes egyenlőtlenségek
- 3 Számfogalom és alpműveletek
 - A négy alpművelet az egész számok körében
 - A racionális számok
 - A valós számok
- 4 Elemi függvények
 - Polinomfüggvények
 - Polinomfüggvények gyöktényezős alakja
 - Racionális törtfüggvények és inverzeik
 - Az exponenciális függvény és a logaritmus

Tagolás II

- Szögfüggvények
- 5 Geometriai transzformációk
 - Az euklidészi geometria axiómáiról
 - A sík egybevágósági transzformációi
 - Hasonlósági transzformációk
- 6 Szintetikus geometria
 - Hossz, terület, felület, térfogat, szög
 - Vektorok, mint irányított szakaszok
 - A skalárszorzat
 - A vektoriális és a vegyes szorzat
- 7 Koordinátageometria
 - Vektorkalkulus
 - Koordinátarendszerek a síkon
 - A távolság és szög mérése
 - Geometriai transzformációk koordinátás alakja

Tagolás III

- A komplex számsík

- 1 **Matematikai alapfogalmak**
- 2 Összeszámlálási feladatok
- 3 Számfogalom és alpműveletek
- 4 Elemi függvények
- 5 Geometriai transzformációk
- 6 Szintetikus geometria
- 7 Koordinátageometria

Mi a matematika?

- A **matematika** a természettudománynak az a része, amely a mennyiségek, a struktúrák, a tér és a változások rendszerét leírja és kutatja.
- **Pontosan definiált** elvont fogalmakkal **állításokat** mondunk ki, és ezeket a következtetési szabályok szigorú alkalmazásával **bizonyítjuk**.
- A matematika eredetileg a számolásból, a számításból és a mérésből származik, és ezektől mind a mai napig elválaszthatatlan.
- A matematikus a struktúrák szabályosságait és rejtett összefüggéseit keresi.
- ALAPELV: A matematikában minden fogalmat definiálunk, és minden állítást bizonyítunk. Ez nyilván nem lehetséges.
- FONTOS: Semelyik fogalmat **nem definiálhatom önmagával**, és semelyik állítást **nem bizonyíthatom önmagával** (tautológia).

Axiómák és alapfogalmak

- **Alapfogalom:** Olyan fogalom, amit nem definiálunk. Pl. a halmaz, vagy a geometriában a pont és az egyenes. Általában elvárjuk, hogy az alapfogalmak egyszerűek, és szemléletesen ismertek legyenek.
- **Axióma:** Olyan állítás, amit nem bizonyítunk. Pl. az üres halmaz létezése, vagy hogy két pontra pontosan egy egyenes illeszkedik. Axiómák esetében is általános elvárás, hogy rövidek és egyszerűek legyenek.
- Az, hogy mit értünk matematikailag korrekt bizonyításon, erősen függ a kulturális közegtől, és ezt a matematika maga csak korlátozott mértékben tudja meghatározni.

Megjegyzés. A jelen kurzusban nem célunk a matematikának egy precíz axiomatikus felépítését megadni.

Logikai műveletek

- A fontosabb állításokat **tételeknek**, míg a kevésbé fontosakat **segédtételeknek** vagy **lemmának**.
- A matematikai állítások **kifejezésekből** és köztük fennálló **logikai kapcsolatokból** állnak.
- A fontosabb logikai műveletek:

$A \vee B$	VAGY művelet	igaz, ha A vagy B igaz,
$A \wedge B$	ÉS művelet	igaz, ha A és B igaz,
$\neg A$	NEGÁCIÓ művelet	igaz, ha A nem igaz,
$A \rightarrow B$		A -ból következik B , ugyanaz, mint $\neg A \vee B$,
$A \leftrightarrow B$		A ekvivalens B -vel, azaz $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

De Morgan-azonosságok

Tétel: Logikai műveletek azonosságai

A logikai műveletek az alábbi azonosságoknak tesznek eleget:

$$\text{asszociativitás: } \begin{cases} A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C \\ A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C \end{cases}$$

$$\text{disztibutivitás: } \begin{cases} A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{cases}$$

$$\text{De Morgan-azonosságok: } \begin{cases} \neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B) \\ \neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B) \end{cases}$$

$$\text{kontrapozíció: } A \rightarrow B = (\neg B) \rightarrow (\neg A)$$

$$\text{tagadás tagadása: } \neg(\neg A) = A.$$

Logikai azonosságok bizonyítása

Bizonyítás. A kontrapozícióra vonatkozóan:

$$(\neg B) \rightarrow (\neg A) = \neg(\neg B) \vee \neg A = \neg A \vee B = A \rightarrow B.$$

A disztributivitást az **értéktáblázat** felhasználásával mutatjuk meg:

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	i	i	i
i	h	i	h	i	i	i	i
i	h	h	h	h	h	h	h
h	i	i	h	h	i	h	h
h	i	h	h	h	i	h	h
h	h	i	h	h	i	h	h
h	h	h	h	h	h	h	h



Szükséges és elegendő feltételek

Feladat

A következő állítások (ítéletek) közül melyik szükséges/elegendő feltétele a másoknak?

- ① Az egész szám nullára végződik. Az egész szám 5-tel osztható.
- ② A természetes szám 2-vel és 3-mal osztható. A természetes szám 6-tal osztható.
- ③ Ma kedd van. Holnap szerda van.
- ④ A háromszög derékszögű. A háromszög két oldalhosszának a négyzetösszege egyenlő a harmadik oldalhosszának négyzetével.
- ⑤ A sokszög szabályos. A sokszög csúcsai egy körvonalon vannak.
- ⑥ A két négyszög hasonló. A két négyszög megfelelő oldalainak aránya egyenlő.

A görög ábécé

α	A	alfa	ν	N	nű
β	B	béta	ξ	Ξ	kszi
γ	Γ	gamma	$\omicron$	O	omikron
δ	Δ	delta	π, ϖ	Π	pí
ϵ, ε	E	epszilon	ρ, ϱ	P	ró
ζ	Z	zéta	σ, ς	Σ	szigma
η	H	éta	τ	T	tau
θ, ϑ	Θ	téta	υ	Υ	upszilon
ι	I	ióta	ϕ, φ	Φ	fí
κ	K	kappa	χ	X	khí
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	pszí
μ	M	mű	ω	Ω	omega

Számhalmazok jelölése

$\mathbb{N}$	a természetes számok (<i>natural</i>) halmaza, $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	a természetes számok halmaza és a 0, $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	az egész számok (<i>Zahlen, német</i>) halmaza,
$\mathbb{Q}$	a racionális számok (<i>quotient</i>) halmaza,
$\mathbb{R}$	a valós számok (<i>real</i>) halmaza,
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	a nemnegatív valós számok halmaza,
$\mathbb{R}_{> 0}$	a pozitív valós számok halmaza,
$\mathbb{P}$	a prímszámok halmaza.

Definíció: Prímszám

Azokat a természetes számokat, melyeknek pontosan két osztójuk van, prímszámoknak nevezzük.

Szumma és produktum jelölés

Summa (latin) = összeg: $\sum_{i=n}^m a_i = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1} + a_m$.

(Ejtsd: *Szumma ái, i megy n-től m-ig.*)

$$\sum_{k=1}^{100} k = \sum_{1 \leq k \leq 100} k = 1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$$

Productum (latin) = szorzat: $\prod_{i=n}^m a_i = a_n a_{n+1} \cdots a_{m-1} a_m$.

$$\prod_{k=1}^{15} k = \prod_{k \in \{1, \dots, 15\}} k = 15! = 1\,307\,674\,368\,000.$$

Egzsztenciális és univerzális kvantorok

Az egzisztenciális és univerzális kvantorok jelölése

Minden (*all*, angol): $\forall$, létezik (*exists*, angol): $\exists$.

Példa: A számelmélet alaptétele

Minden egynél nagyobb egész szám előáll prímszámok szorzataként.

$$\forall n \in \mathbb{Z}_{>1} \exists p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}, \exists a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N} : n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}.$$

Példa: Thalész-tétel

Legyen k az AB szakaszra, mint átmérőre rajzolt kör. Ekkor $\forall C \in k, C \neq A, B$ esetén $\angle ACB = 90^\circ$.

Kvantált kifejezések tagadása

Példák

- Minden gyakorlaton röpdolgozatot írunk.
→ Van olyan gyakorlat, amikor nem írunk röpdolgozatot.
- Van páros prímszám.
→ Minden prímszám páratlan.
- A Szigeten minden nap van olyan koncert, ami nekem nem tetszik.
→ A Szigeten van olyan nap, amikor minden koncert tetszik nekem.

$$\neg(\forall N \exists K : \neg T) = \exists N \forall K : T.$$

Állítás: Kvantált kifejezések tagadása

Az olyan kifejezések tagadásakor, amelyek tartalmazznak egzisztenciális vagy univerzális kvantort, a $\forall$ és a $\exists$ felcserélődik.

A természetes számok Peano-féle axiómarendszere

(Giuseppe Peano 1858-1932, olasz matematikus)

A természetes számok Peano-féle axiómarendszere

Alapfogalmak: Természetes számok, 1, rákövetkezés.

- 1 Az 1 természetes szám.
- 2 Minden n természetes számhoz létezik egy n' -vel jelölt természetes szám, amelyet az n **rákövetkezőjének** nevezünk.
- 3 Nincsen olyan n természetes szám, amelyre $n' = 1$.
- 4 Különböző természetes számok rákövetkezője is különböző.
- 5 Ha az 1 természetes számnak megvan valamely T tulajdonsága, és valahányszor az n természetes számnak megvan a T tulajdonsága, mindannyiszor n' -nek is megvan, akkor minden természetes számnak megvan a T tulajdonsága.

Megj. Általában, történeti okból, $0 \notin \mathbb{N}$.

A rekurziós elv

Példa: Fibonacci-számok

$a_1 = a_2 = 1$ és $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

(Leonardo Fibonacci, kb. 1170-1250, olasz matematikus.)

Tétel: A rekurziós elv

Legyen $M_1, M_2, \dots$ halmazok sorozata, $a \in M_1$ és $f_1, f_2, \dots$ függvényeknek egy sorozata, $f_k : M_k \rightarrow M_{k+1}$. Ekkor pontosan egy olyan $a_1, a_2, \dots$ sorozat létezik, melyre $a_1 = a$ és $a_{n+1} = f_n(a_n)$ minden n természetes számra.

Bizonyítás. A tétel leegyszerűsítve azt mondja, hogy ha az $a_1, a_2, \dots$ sorozatnak adott az első tagja, és minden további egy jól meghatározott módon kiszámolhatunk a korábbiakból, akkor a sorozat egyértelműen meghatározott. A probléma az, hogy... (folyt. köv.)

A rekurziós elv (folyt.)

A rekurzió alkalmazhatóságánál az alábbi kérdések merülnek fel:

- 1 Igaz-e, hogy minden 1-től különböző természetes számnak van megelőzője, azaz olyan természetes szám, melynek ő a rákövetkezője?
- 2 Lehet-e egy természetes számnak több megelőzője?
- 3 Igaz-e, hogy minden természetes szám különbözik a rákövetkezőjétől, illetve az őt megelőző természetes számtól?

Ha ezekre a válasz igen, akkor először definiáljuk az $\{1, \dots, n\}$ halmazt, majd értelmezzük az $n < m$ relációt. Ezen fogalmak felhasználásával a tétel viszonylag kézenfekvő módon bizonyítható. □

Példa az axiómák használatára

Lemma

Minden természetes szám különbözik a rákövetkezőjétől.

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Az 1 rákövetkezőjét jelölje $2 = 1'$. A 3-as axióma miatt $1 \neq 2$, tehát a tétel teljesül $n = 1$ -re, ez az indukciós kezdő lépés. Legyen T az n természetes szám azon tulajdonsága, hogy $n \neq n'$. A 4-es axióma miatt $n \neq n'$ -ből következik, hogy $n' \neq n''$, azaz ha T teljesül n -re, akkor teljesül n' -re is (indukciós lépés). Az 5-ös axióma miatt T minden természetes számra teljesül. □

Természetes számok összeadása és szorzása

Definíció: Természetes számok összeadása és szorzása

Természetes számok összeadását defináljuk az

$$n + 1 = n' \quad \text{és} \quad n + m' = (n + m)' \quad \text{képletekkel.}$$

Hasonlóan, természetes számok szorzatát defináljuk az

$$n \cdot 1 = n \quad \text{és} \quad n \cdot m' = n \cdot m + n \quad \text{képletekkel.}$$

Vigyázat: Egyenlőre ez mind csak elnevezés, a legalapvetőbb tulajdonságokat is (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) igazolni kell!

Az összeadás tulajdonságai

Tétel: Az összeadás és szorzás tulajdonságai

A természetes számok összeadása kommutatív és asszociatív művelet:

$$n + m = m + n, \quad (n + m) + k = n + (m + k).$$

A bizonyítás főbb lépései. Minden lépésben teljes indukcióval alkalmazunk, és sehol nem használunk mást, mint az axiómákat, a definíciókat és a korábban már bizonyított tulajdonságokat.

- 1 $(m + n) + p = m + (n + p)$, p szerinti indukcióval, rögzített n, m -re. A $p = 1$ kezdőlépés az összeadás definíciójából adódik.
- 2 $n + 1 = 1 + n$, indukció n -re.
- 3 $n + m = m + n$, indukció m -re, rögzített n mellett. Használjuk az összeadás (már bizonyított) asszociativitását. □

A szorzás tulajdonságai

Tétel: A szorzás tulajdonságai

A természetes számok szorzása kommutatív és asszociatív művelet, valamint teljesül a disztributivitás tulajdonsága:

$$nm = mn, \quad (nm)k = n(mk), \quad m(n + p) = mn + mp.$$

Biz. A főbb lépések:

- 1 $1 \cdot n = n \cdot 1$, indukció n -re.
- 2 $m(n + p) = mn + mp$, p szerinti indukcióval, rögzített n, m -re. A $p = 1$ kezdőlépés a szorzás definíciójából adódik.
- 3 Az **asszociativitás** és a **kommutativitás** egyszerűen adódik a szokásos indukcióval. Az indukciós lépéseknél több alkalommal felhasználjuk a már bizonyított disztributivitást és az összeadás asszociativitását és kommutativitását.



Példák teljes indukcióra: számtani és mértani sorösszeg

Állítás: A számtani és mértani sor összegképlete

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}, \quad (1)$$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}. \quad (2)$$

Biz. Az $n = 1$ kezdőlépés mindkét esetben könnyen leellenőrizhető. Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás. Az (1) esetben:

$$1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)n}{2} + n + 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

A (2) esetben:

$$1 + q + \cdots + q^n + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}.$$

A halmaz fogalma

- A halmazt **alapfogalomnak** tekintjük a matematikában, azaz nem definiáljuk.
- A halmazt szemléletesen úgy szoktuk körülírni, mint „bizonyos jól meghatározott objektumok (dolgok) összessége.”
- A halmazt alkotó objektumokat a halmaz elemeinek nevezzük. Az adott elem és az őt tartalmazó halmaz között fennáll a „tartalmazás” reláció, jelöléssel: $x \in H$.
- Két halmaz egyenlőnek tekintünk, ha pontosan ugyanazokat az elemeket tartalmazzák.
- Azt a halmazt, amelyik nem tartalmaz egyetlen elemet sem, **üres halmaznak** nevezzük és $\emptyset$ -al jelöljük.

Példák halmazokra

$\emptyset$, $\{1, 2\}$, $\{\text{piros, fehér, zöld}\}$, $\{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathbb{N}$, $\{n \in \mathbb{N} \mid 10 < n < 100\}$.

Műveletek halmazokkal

Definíció: Halmazok metszete, uniója

- Az $A_1, \dots, A_n$ halmazok **uniója**: $A_1 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid \exists k : x \in A_k\}$.
- Az $A_1, \dots, A_n$ h.-ok **metszete**: $A_1 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid \forall k : x \in A_k\}$.
- Az A, B halmazok **különbsége**: $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.
- Ha az A halmaz elemei egy „közismert” Ω univerzum elemei közül kerülnek ki, akkor beszélhetünk az $\bar{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$ **komplementer halmazról**.

Megj. Beszélhetünk végtelen sok halmaz metszetéről és uniójáról is.

Definíció: Diszjunkt halmazok

Azt mondjuk, hogy az $A_1, \dots, A_n$ halmazok **diszjunktak**, ha közülük bármely kettő metszete az üres halmaz.

Részhalmaz, hatványhalmaz

Definíció: Részhalmaz, valódi részhalmaz

Azt mondjuk, hogy a A halmaz **részhalmaza** a B halmaznak (jelöléssel $A \subseteq B$), ha az A minden eleme eleme B -nek is. Az $\emptyset$ és A az A halmaz **triviális** részalmazai, az ezektől különböző részalmazokat **valódi részalmazoknak** hívjuk.

Definíció: A hatványhalmaz

Az A halmaz **$\mathcal{P}(A)$ hatványhalmaza** alatt az A részalmazainak halmazát értjük.

Nyilván $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$ és $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. **Megj.** A $\mathcal{P}$ jelölés a német *Potenzmenge* szóra utal. A halmaz németül *Menge*, angolul *set*, franciául *ensemble*.

Állítás: Halmazok egyenlősége

Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.

Halmazelméleti azonosságok

A halmazelméleti $\cup$, $\cap$, $\bar{}$ és a logikai $\vee$, $\wedge$, $\neg$ műveletek kapcsolata:

Tétel: A halmazelméleti műveletek tulajdonságai

Tetszőleges A, B, C halmazokra teljesül:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Az első két azonosság fontos következménye:

$$A \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap \cdots \cap (A \cup B_n),$$

$$A \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_n).$$

Halmazok Descartes-szorzata

(René Descartes 1596-1650, francia filozófus és matematikus)

Definíció: Halmazok Descartes-szorzata

Az $A_1, \dots, A_n$ halmazok **Descartes-szorzata** alatt az olyan $(a_1, \dots, a_n)$ **rendezett n -esek** halmazát értjük, ahol $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Ha $A_1 = \cdots = A_n = A$, akkor az A^n jelölést használjuk.

Leggyakrabban két A, B halmaz

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Descartes-szorzatával találkozhatunk.

Példák nem-halmazokra

Nem minden „összesség” alkot halmazt. Legyen például H azon A halmazok összessége, melyre $A \notin A$ teljesül, és tegyük fel, hogy H halmaz. Ekkor két eset lehetséges:

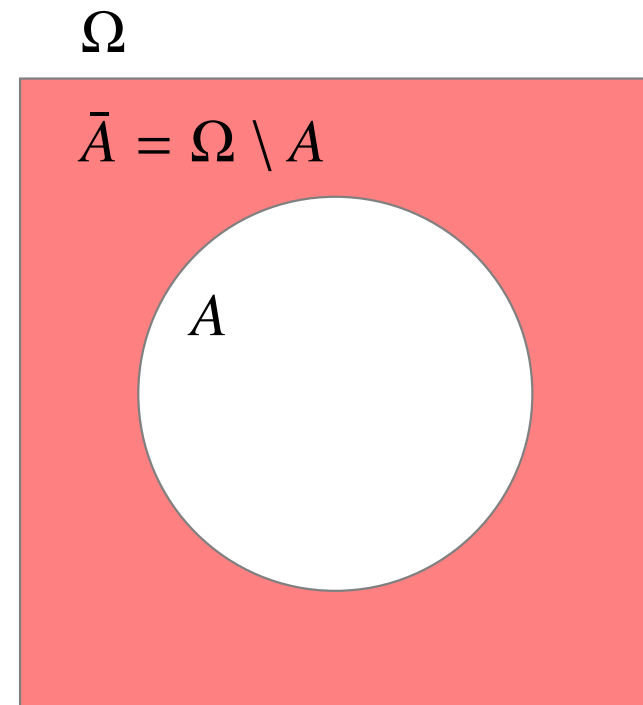
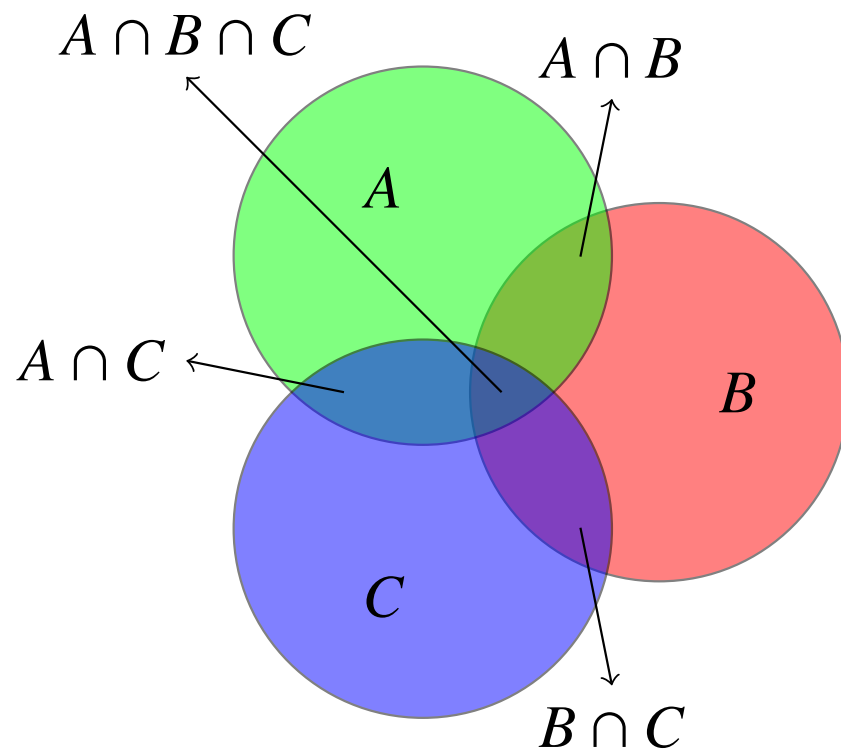
- ① $H \in H$, ami H definíciója szerint azt jelenti, hogy $H \notin H$.
- ② $H \notin H$, amikor szintén H definíciója maga után vonja, hogy $H \in H$.

Mindkét eset ellentmondáshoz vezet, tehát sem a $H \in H$, sem pedig $H \notin H$ nem teljesül, ami nem lehetséges.

Megjegyzés. Hangsúlyozzuk, hogy itt a probléma nem H „méretével” van, hanem a „jóldefiniáltságával” van.

Venn-diagrammok

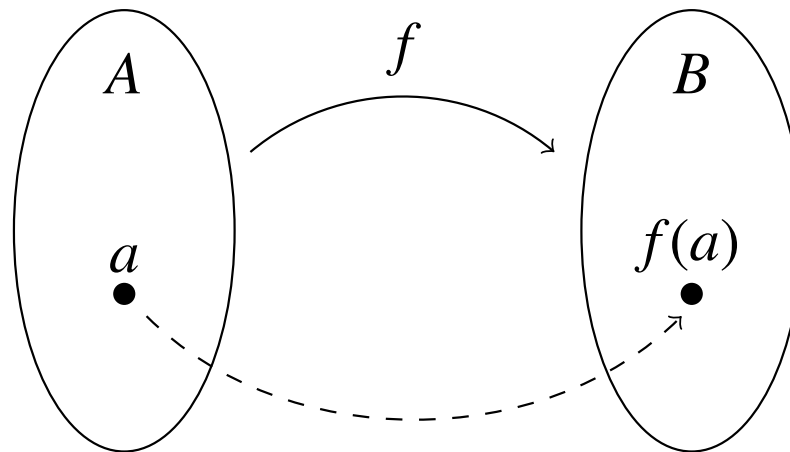
Halmazok szemléletes ábrázolására használjuk a jól ismert
Venn-diagrammokat:



Leképezések

Definíció: Leképezés (függvény), értelmezési tartomány, értékkészlet

Legyenek adottak az A, B halmazok és f egy olyan hozzárendelés, amely tetszőleges $a \in A$ elemhez a B halmaz egy meghatározott $b = f(a)$ elemét rendeli hozzá. Ekkor f -et **leképezésnek** vagy **függvénynek** nevezzük, az A az f **értelmezési tartománya**, B pedig az f **értékkészlete**. Jelölés: $f : A \rightarrow B$.



Leképezések tulajdonságai, az identikus leképezés

- Szinte minden idegen nyelven a függvény szó *function*.
- Történeti (és nyelvtani) okai vannak, hogy a függvényt jelölő betű megelőzi a helyettesítési értéket: $f(a)$. A matematikában használatosak még az fa , af , a^f jelölések is.
- $X \subseteq A$ esetén az **X képhalmaza** $f(X) = \{f(a) \mid a \in X\}$. $Y \subseteq B$ esetén az **Y ősképe** $f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$.
- Két $f : A \rightarrow B$ és $g : C \rightarrow D$ leképezést egyenlőnek tekintünk, ha $A = C$, $B = D$ és minden $a \in A$ esetén $f(a) = g(a)$.

Definíció: Identikus leképezés

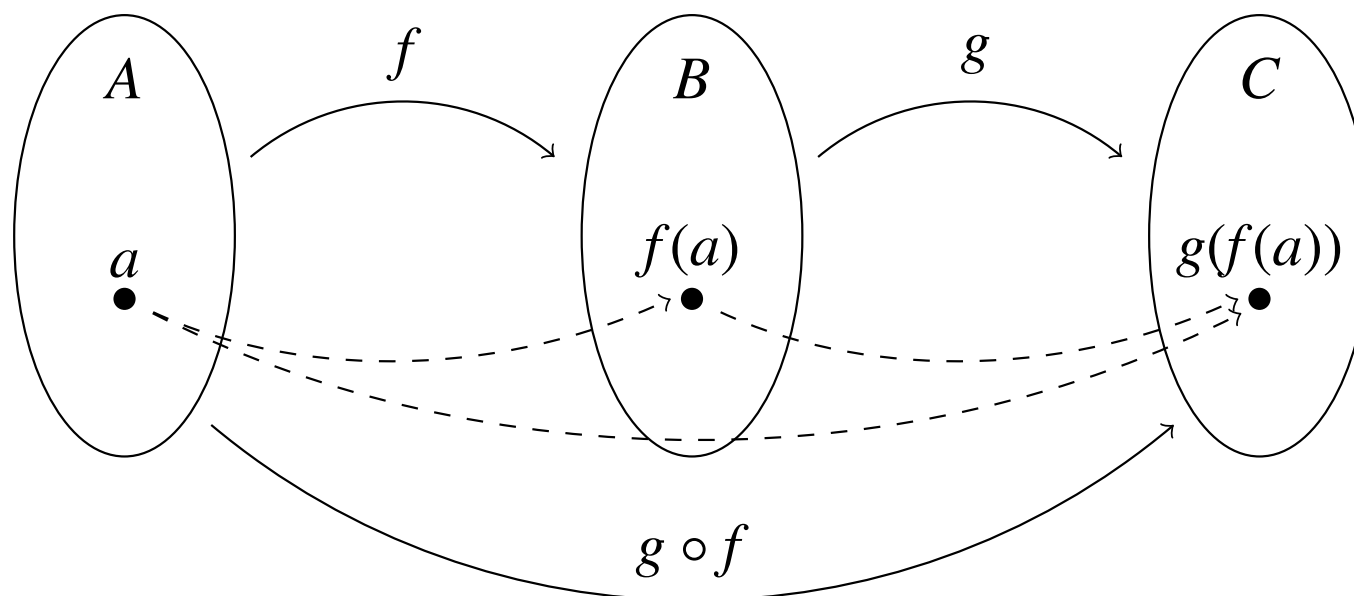
Ha $A = B$ és minden $a \in A$ esetén $f(a) = a$, akkor f -et az A halmazon értelmezett **identikus leképezésnek** nevezzük; $f = \text{id}_A$.

Leképezések szorzata

Definíció: Leképezések szorzata

Az $f : A \rightarrow B$ és $g : B \rightarrow C$ leképezések **szorzata** alatt azt a $h : A \rightarrow C$ leképezést értjük, amelyre $a \in A$ esetén $h(a) = g(f(a))$ teljesül. Jelöléssel: $h = g \circ f$, azaz $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Megjegyzés. NAGYON KELLEMETLEN, hogy az $f \circ g$ leképezésnél először mindig a g -t kell alkalmazni!!



Példák leképezések szorzatára

Példák

- Az f leképezés minden hallgatóhoz hozzárendeli a mobilszámát 06... alakban. A g leképezés minden 10^{11} -nél kisebb számhoz hozzárendeli a számjegyeinek összegét. A $g \circ f$ leképezés minden hallgatóhoz egy 0 és 100 közé eső számot rendel.
- $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3, g(x) = -3x + 5$. Határozzuk meg a $g \circ f$ szorzat leképezést!
- Az f leképezés minden síkbeli P ponthoz hozzárendeli a koordinátáit (x, y) alakban egy rögzített Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben. A $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ekkor a $g \circ f$ leképezés P ponthoz az origótól vett távolságát rendel.

Injektív, szürjektív és bijektív leképezések

Definíció: Injektív, szürjektív és bijektív leképezések

- Azt mondjuk, hogy az $f : A \rightarrow B$ leképezés **szürjektív**, ha minden $b \in B$ -hez létezik $a \in A$ úgy, hogy $f(a) = b$.
Más szóval, minden B -beli elemnek van ősképe.
- Azt mondjuk, hogy az $f : A \rightarrow B$ leképezés **injektív**, ha bármely két különböző $a_1, a_2 \in A$ elemre $f(a_1) \neq f(a_2)$.
Más szóval, minden B -beli elemnek legfeljebb egy ősképe van.
- Azt mondjuk, hogy az $f : A \rightarrow B$ leképezés **bijektív**, ha injektív és szürjektív, azaz minden B -beli elemnek pontosan egy ősképe van.

Megj. A bijektív leképezéseket szokás **kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésnek** is nevezni.

Leképezések inverze

Definíció: Leképezések inverze

Azt mondjuk, hogy a $g : B \rightarrow A$ leképezés **inverze** az $f : A \rightarrow B$ leképezésnek, ha minden $a \in A$ esetén $g(f(a)) = a$ és minden $b \in B$ esetén $f(g(b)) = b$ teljesül. Jelölés: $g = f^{-1}$.

Állítás: Az invertálhatóság és a bijektivitás kapcsolata

Egy leképezésnek akkor és csak akkor van inverze, ha bijektív.

Biz. Ha bijektív, akkor az $f^{-1}(b)$ ősképe egyértelmű. Fordítva, ha nem bijektív, akkor vagy nem szürjektív, és ekkor valamely $b \in B$ -nek nincs ősképe, vagy pedig nem injektív, és ekkor valamely $b \in B$ -nek több ősképe is van.

Feladat

Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ leképezés inverzét.

Lképezések szorzatának tulajdonságai

Tétel: Lképezések szorzatának tulajdonságai

Tetszőleges $f : A \rightarrow B$ és $g : B \rightarrow C$ leképezésekre teljesülnek a következők:

- 1 Ha f és g injektív (szürjektív, bijektív), akkor $g \circ f$ is injektív (szürjektív, bijektív).
- 2 Ha $g \circ f$ injektív, akkor f injektív.
- 3 Ha $g \circ f$ szürjektív, akkor g szürjektív.

Biz. Tfh. f, g injektív és legyen $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$. Ekkor $f(a_1) \neq f(a_2)$ az f , és $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ a g injektivitása miatt, azaz $g \circ f$ injektív.

Tfh. f, g szürjektív és $c \in C$. Ekkor $\exists b \in B$, amire $g(b) = c$ és $\exists a \in A$, amire $f(a) = b$, azaz $g(f(a)) = c$. Tehát $g \circ f$ szürjektív.

Ezzel beláttuk (1)-et. (2) és (3) indirekt módon hasonlóan adódik. □

Véges halmazok, számosság

Definíció: Véges halmazok számossága

- Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága** az n természetes szám, ha létezik egy $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$ bijekció. Jelölés: $|A| = n$.
- Az A halmaz **véges**, ha $|A| = n$ teljesül valamilyen n -re.
- A nem véges halmazokat **végtelennek** nevezzük: $|A| = \infty$.

Állítás: Véges halmazok leképezései

Legyenek A, B véges halmazok és $f : A \rightarrow B$ leképezés.

- 1 Ha f bijektív, akkor $|A| = |B|$.
- 2 Ha f szürjektív, akkor $|A| \geq |B|$. Ha f injektív, akkor $|A| \leq |B|$.
- 3 Ha $|A| = |B|$, akkor a bijektivitás, a szürjektivitás és az injektivitás ekvivalens fogalmak.

Biz. (1) $|A| = n$ azt jelenti, hogy $\exists g : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$ bijekció. Ekkor $f \circ g$ egy $\{1, \dots, n\} \rightarrow B$ **bijekció**. (2)-nél és (3)-nál a **skatulya-elvet** alkamazzuk.

Végtelen halmazok

Definíció: Megszámlálhatóan végtelen halmazok

Az A halmaz **megszámlálhatóan végtelen**, ha bijekcióba állítható a természetes számok halmazával.

Állítás: Végtelen halmazok jellemzése

Az A halmaz akkor és csak akkor végtelen, ha bijekcióba állítható valamely valódi részhalmazával.

Biz. Ha A nem véges, akkor képezhetünk az elemeiből egy $a_1, a_2, \dots$ végtelen sorozatot úgy, hogy $i \neq j$ esetén $a_i \neq a_j$. Ekkor az $a_n \mapsto a_{n+1}$, $b \mapsto b$, $b \notin \{a_1, a_2, \dots\}$ leképezés bijekció A és $A \setminus \{a_1\}$ között.

Állítás: Megszámlálható halmaz részhalmazai

A megszámlálhatóan végtelen halmazok részhalmazai végesek vagy megszámlálhatóan végtelenek.

Biz. Elegendő megmutatni $\mathbb{N}$ -re, ami a következő állításban szerepel.

Megszámlálható halmaz részhalmazai

Állítás: $\mathbb{N}$ részhalmazai

- 1 $\mathbb{N}$ minden korlátos részhalmaza véges.
- 2 $\mathbb{N}$ minden nem üres részhalmazának van legkisebb eleme.
- 3 $\mathbb{N}$ minden részhalmaza véges vagy megszámlálható.

Biz. (1) és (2) következik abból a módból, ahogy a „ $\leq$ ” relációt $\mathbb{N}$ -en definiáltuk. (3)-hoz rögzítsük a nem üres $A \subseteq \mathbb{N}$ részhalmazt és definiáljuk az $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ leképezést **rekurzív módon**:

$$f(1) = \min A \quad \text{és} \quad f(n+1) = \min\{a \in A \mid a > f(n)\}.$$

$f(n+1)$ akkor **nem értelmes**, ha $\{a \in A \mid a > f(n)\} = \emptyset$, ez viszont pontosan azt jelenti, hogy $|A| = n$.

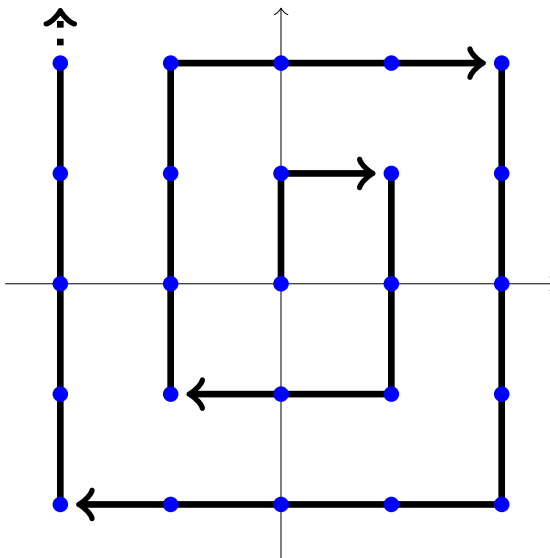
Tfh. A nem véges, ekkor f jól definiált. Továbbá f szigorúan monoton növény, tehát **injektív**. **Tfh.** nem szürjektív és jelölje b a legkisebb olyan A -beli elemet, amely nem áll elő képként. Az $A' = \{a \in A \mid a < b\}$ halmaz nem üres, ennek maximuma $a' = f(n)$. Ekkor $b = f(n+1)$, ellentmondás. □

Példa megszámlálható halmazokra

Állítás: $\mathbb{Q}$ megszámlálható.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ és $\mathbb{Q}$ megszámlálható halmazok.

Biz. $\mathbb{Z}^2$ elemei lényegében a négyzetrács csúcsai, amik pedig az alábbi spirál alakban felsorolhatók:



A $\mathbb{Q}$ elemeit az $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}^2, f(q) = (n, m)$ leképezés bijekcióba állítja $\mathbb{Z}^2$ egy részhalmazával, ahol n, m relatív prímek, $q = \frac{n}{m}$ és $m > 0$. □

Példa nem megszámlálható végtelen halmazokra

Állítás: $\mathbb{R}$ nem megszámlálható.

A valós számok halmaza nem megszámlálható.

Biz. (Átlós módszer.) Tfh. a $(0, 1)$ nyílt intervallum megszámlálható és legyen $x_1, x_2, \dots$ egy felsorolása. Legyen az x_n tizedes tört alakja $0, a_{n1}a_{n2} \dots$. Minden n -re definiáljuk a b_n egészt az alábbi módon:

$$b_n = \begin{cases} 2 & \text{ha } a_{nn} = 5, \\ 5 & \text{ha } a_{nn} \neq 5. \end{cases}$$

Definiáljuk az $y = 0, b_1b_2 \dots$ tizedes tört alakú valós számot. Egyrészt $y \in (0, 1)$, másrészt y nem szerepel a felsorolásban. Ellentmondás. □

Megjegyzés. VIGYÁZAT! Egy valós szám tizedes tört alakja nem mindig egyértelmű, gondoljunk arra, hogy $1 = 0,999 \dots$. Szerencsére a bizonyítás helyességét ez nem befolyásolja.

A szitaformula

Tétel: Szitaformula

Tetszőleges $A_1, \dots, A_n$ véges halmazokra teljesül

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + \dots + |A_n| - \\ &\quad |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + \\ &\quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots - \\ &\quad \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

A bizonyítandó egyenlőség így is felírható:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{|I|=k} |A_I|,$$

ahol $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ és $A_I = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$.

A szitaformula bizonyítása

Bizonyítás. n szerinti teljes indukcióval, $n = 1$ esetén $|A_1| = |A_1|$ triviális, míg $n = 2$ -re a szitaformula

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$$

ami könnyen belátható. Legyen $n \geq 3$ és tfh. a szitaformula teljesül tetszőleges $n - 1$ halmazra. Bontsuk szét az alábbi szummát három részre:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{|I|=k} |A_I| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{|I|=k, n \notin I} |A_I| + \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^{k-1} \sum_{|I|=k, n \in I} |A_I| + \quad (4)$$

$$\sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \sum_{|I|=k, n \in I} |A_I| \quad (5)$$

A szitaformula bizonyítása (folyt.)

Az indukciós feltevést az $A_1, \dots, A_{n-1}$ halmazokra alkalmazva kapjuk, hogy az (3) rész $|A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}|$. A (4) részt jobban megnézve láthatjuk, hogy az $|A_n|$.

Vezessük be a $B_1 = A_1 \cap A_n, \dots, B_{n-1} = A_{n-1} \cap A_n$ és $B_I = \cap_{i \in I} B_i$ jelöléseket. Ha $n \in I \subseteq \{1, \dots, n\}$, akkor

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I'} B_i = B_{I'},$$

ahol $I' = I \setminus \{n\}$. Írjuk át (5)-at és helyettesítsünk $m = k - 1$ -et:

$$\sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \sum_{|I|=k, n \in I} |A_I| = \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \sum_{|I'|=k-1} |B_{I'}| = \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^m \sum_{|I'|=m} |B_{I'}|.$$

Ez utóbbi a B_i -re alkalmazott indukciós feltétel miatt

$$-|B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}| = -|(A_1 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cap A_n)| = -|(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n|.$$

Számsorozatok

- Absztrakt értelemben az $x_1, x_2, \dots$ számsorozat nem más, mint egy $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = x_n$ leképezés. A számsorozatokra az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, vagy gyakran csak az (x_n) jelölést használjuk.
- Az $x_1, x_2, \dots$ értékeket a sorozat **elemeinek** nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy az (x_n) számsorozat rendelkezik egy **zárt képlettel**, ha x_n -et kifejezhetjük n segítségével bizonyos egyszerű műveletek alkalmazásával. Sok olyan számsorozat van, amelyre nem ismert zárt képlet.
- Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat **rekurzív módon** van megadva, ha x_n -t az $x_1, \dots, x_{n-1}$ értékekből, viszonylag egyszerű műveletek segítségével ki tudjuk számolni. Természetesen az ilyen sorozatok első néhány tagját külön meg kell adnunk.

Példák számsorozatokra

Példák

- Rögzített $a, d \in \mathbb{R}$ számokra az $x_n = a + (n - 1)d$ képlettel definiált sorozatot **számtani sorozatnak** nevezzük.
- Rögzített $a, q \in \mathbb{R}$ számokra az $x_n = aq^{n-1}$ képlettel definiált sorozatot **mértani sorozatnak** nevezzük.
- A mértani és a számtani sorozat megadható **rekurzív módon** is. Fontos rekurzív sorozat a **Fibonacci-számok** sorozata is.
- Az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ sorozatot **harmonikus sorozatnak** nevezzük.
- A **prímszámok** $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ sorozatára nem ismert zárt képlet.
- A $3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; \dots$ sorozattal tetszőlegesen megközelíthetjük π értékét.
- Link ajánló: **The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences** (<http://www.oeis.org>).

Monotonitás

Definíció: Sorozatok monotonitása

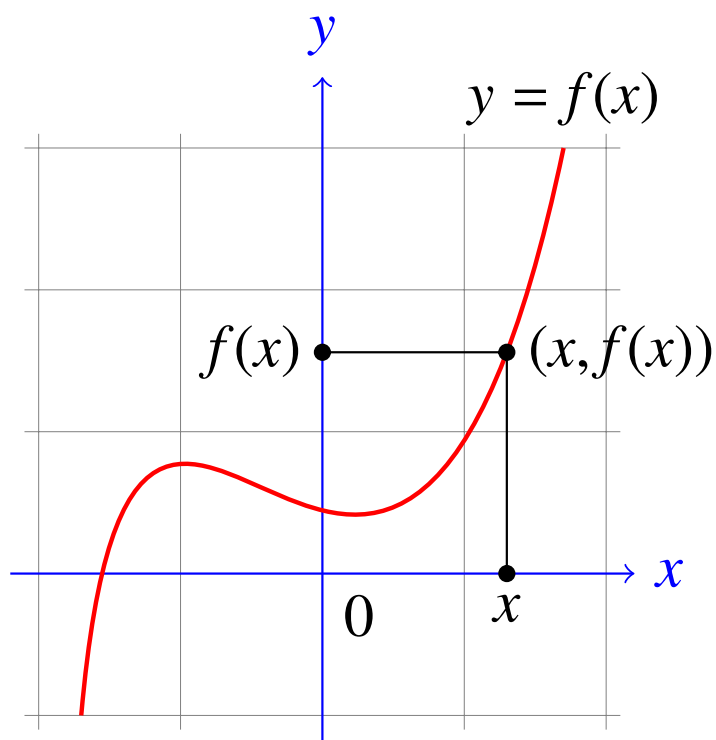
Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat

- **monoton növő**, ha minden $n < m$ esetén $x_n \leq x_m$.
 - **szigorúan monoton növő**, ha minden $n < m$ esetén $x_n < x_m$.
 - **monoton csökkenő**, ha minden $n < m$ esetén $x_n \geq x_m$.
 - **szigorúan monoton csökkenő**, ha minden $n < m$ esetén $x_n > x_m$.
-
- Ha egy sorozat egyszerre monoton csökkenő és növő, akkor konstans, azaz $x_n = x_1$ minden n -re.
 - A legtöbb sorozat se nem monoton növő, se nem monoton csökkenő.

Valós függvények grafikonja

Definíció: Valós függvény

Az $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ leképezéseket ($A \subseteq \mathbb{R}$) **valós függvényeknek** nevezzük.



- A középiskolában „függvény” alatt a legtöbb esetben valós függvényt értünk.
- Az $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény **grafikonja** (vagy **görbéje**) az

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

pontok halmaza a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben.

- Az $\{(x, f(x))\} \subseteq A \times B$ halmaz lehetővé teszi a leképezés **absztrakt definícióját**.

- 1 Matematikai alapfogalmak
- 2 Összeszámlálási feladatok**
- 3 Számfogalom és alpműveletek
- 4 Elemi függvények
- 5 Geometriai transzformációk
- 6 Szintetikus geometria
- 7 Koordinátageometria

Kombinatorika

- A **kombinatorika** a matematikának a véges struktúrák vizsgálataival foglalkozó ága.
- Ebben a fejezetben a legegyszerűbb leszámolási problémákat tekintjük át. A cél az, hogy a különböző megfogalmazású feladatok típusát be tudjuk azonosítani, és sikerrel meg tudjuk oldani.
- Emlékeztetőül: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1)n$.

Ismétléses variációk

Mintafeladat

Egy rádió 4 hallgató (Ági, Balázs, Cusi és Dodó) között sorsol 1-1 jegyet a DVSC-Liverpool és a DVSC-Fiorentina mérkőzésekre úgy, hogy egy hallgató több jegyet is nyerhet. Hányféleképpen lehetséges ez?

Megoldás. $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$.

ÁÁ	ÁB	ÁC	ÁD
BÁ	BB	BC	BD
CÁ	CB	CC	CD
DÁ	DB	DC	DD

Definíció: Ismétléses variációk

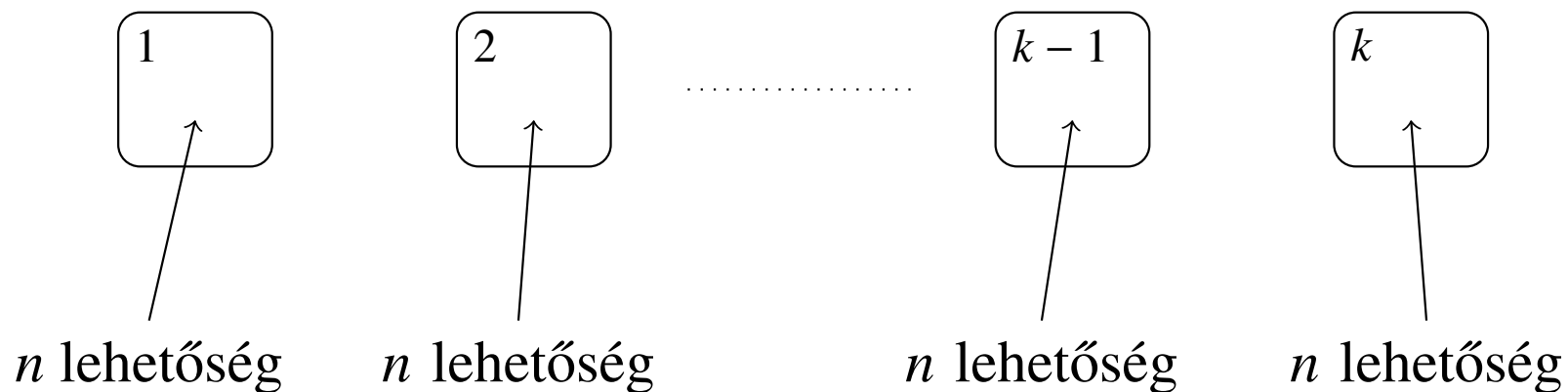
Az n különböző elemből képzett k -tagú sorozatokat az n elem k -tagú **ismétléses variációinak** nevezzük. Ezek számát $V_n^{k(i)}$ -vel jelöljük.

Ismétléses variációk száma

Állítás: Ismétléses variációk száma

$$V_n^{k(i)} = \overbrace{n \cdot n \cdots n}^k = n^k.$$

Biz. A k -tagú sorozat minden elemére n -féleképpen tudunk választani:



Ismétlés nélküli variációk

Mintafeladat

Egy rádió 4 hallgató (Ági, Balázs, Cusi és Dodó) között sorsol 1-1 jegyet a DVSC-Liverpool és a DVSC-Fiorentina mérkőzésekre úgy, hogy egy hallgató legfeljebb egy jegyet nyerhet. Hányféleképpen lehetséges ez?

Megoldás. A nyertes párok ÁB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC, ahol az első betű a Liverpool, a második a Fiorentina meccsre megy. Összesen $4 \cdot 3 = 12$.

Definíció: Ismétlés nélküli variációk

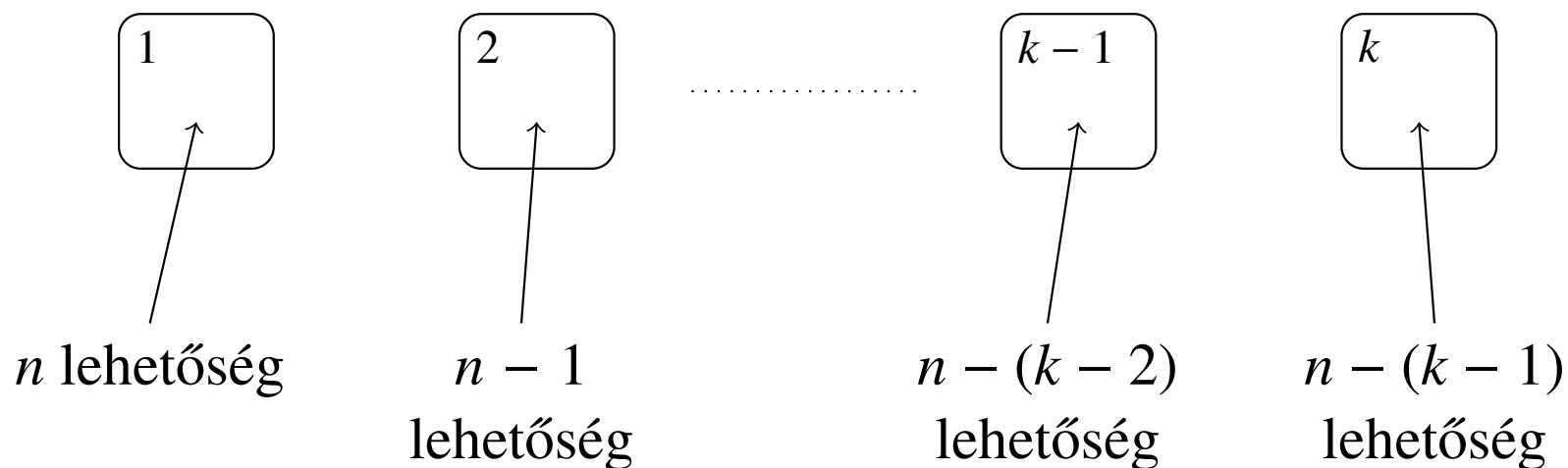
Az n különböző elemből képzett olyan k -tagú sorozatokat ($0 \leq k \leq n$), amelyekben a tagok mind különbözők, **n elem k -tagú ismétlés nélküli variációinak** nevezzük. Ezek számát V_n^k -val jelöljük.

Ismétlés nélküli variációk száma

Állítás: Az ismétlés nélküli variációk száma

$$V_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Biz. Az első, második, ..., k -dik helyekre választható elemek számát összeszorozva kapjuk az eredményt:



Ismétlés nélküli permutációk

Mintafeladat

Hányféleképpen alakulhat a BL E-csoport (DVSC, Fiorentina, Liverpool, Lyon) sorrendje a csoportmérkőzések után?

Megoldás. $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

D Li Ly F	Li D Ly F	Ly D Li F	F D Li Ly
D Li F Ly	Li D F Ly	Ly D F Li	F D Ly Li
D Ly Li F	Li Ly D F	Ly Li D F	F Li D Ly
D Ly F Li	Li Ly F D	Ly Li F D	F Li Ly D
D F Li Ly	Li F D Ly	Ly F D Li	F Ly D Li
D F Ly Li	Li F Ly D	Ly F Li D	F Ly Li D

Definíció: Ismétlés nélküli permutációk

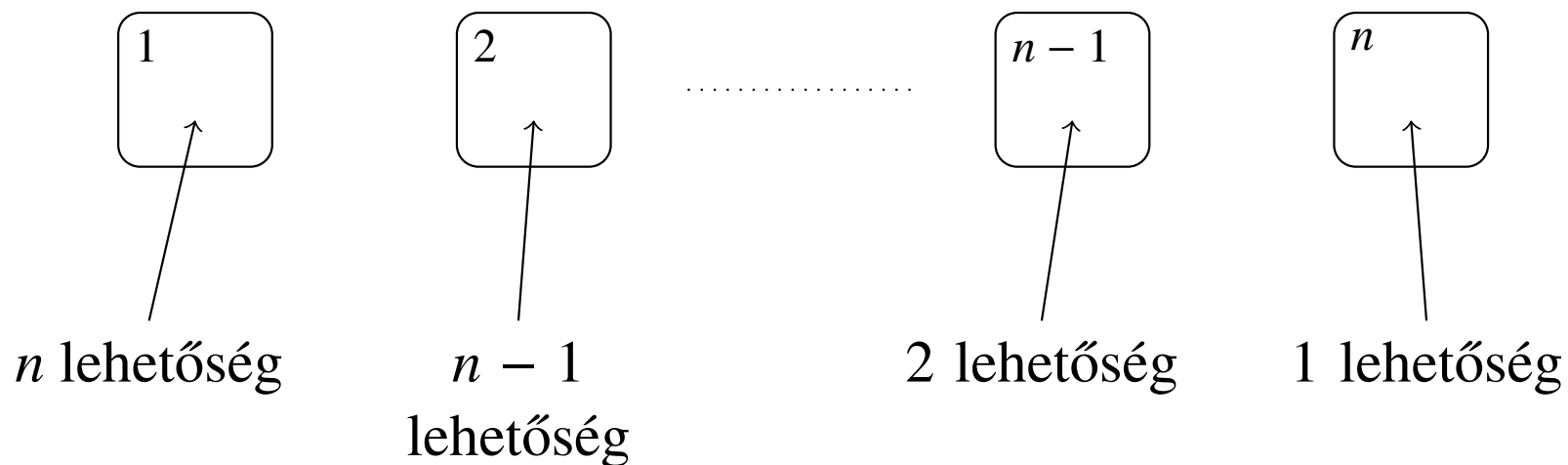
Az n különböző elem sorbarendezéseit nevezzük az n elem **ismétlés nélküli permutációinak**. Ezek számát P_n -el jelöljük.

Ismétlés nélküli permutációk száma

Állítás: Ismétlés nélküli permutációk száma

$$P_n = V_n^n = n!.$$

Biz. Vegyük észre, hogy az ismétlés nélküli permutációk az $n = k$ speciális esetei az ismétlés nélküli variációknak. Az első, második, ..., n -dik helyekre választható elemek számát összeszorozva kapjuk az eredményt:



Ismétléses permutációk

Mintafeladat

Egy rádió 4 hallgató (Ági, Balázs, Cusi és Dodó) között sorsol 2-2 jegyet a DVSC-Liverpool és a DVSC-Fiorentina mérkőzésekre úgy, hogy minden hallgató egy jegyet kap. Hányféleképpen lehetséges ez?

Megoldás. $\frac{24}{2 \cdot 2} = 6$. A jegyek ABCD sorrendben:

LLFF, LFLF, LFFL, FLLF, FLFL, FFLL.

Definíció: Ismétléses permutációk

Legyen $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ r -elemű halmaz, $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0$ és $n = k_1 + \dots + k_r$. Az olyan A -beli elemekből képzett n -tagú sorozatokat, amelyekben minden $i = 1, \dots, r$ esetén az a_i elem pontosan k_i -szer fordul elő, az A halmaz $(k_1, \dots, k_r)$ -típusú ismétléses permutációinak nevezzük. Ezek számát $P_n^{(k_1, \dots, k_r)}$ jelöli.

Ismétléses permutációk száma

Állítás: Ismétléses permutációk száma

$$P_n^{(k_1, \dots, k_r)} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}.$$

Bizonyítás.

- 1 Legyenek $B_1, \dots, B_r$ különböző elemekből álló halmazok, melyekre $|B_1| = k_1, \dots, |B_r| = k_r$, és legyen $C = B_1 \cup \dots \cup B_r$. Nyilván $|C| = k_1 + \dots + k_r = n$.
- 2 Legyen a $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ sorozat a C halmaz egy **sorbarendezése**; ilyenből van $n!$.
- 3 Gyártsunk $\mathbf{c}$ -ből egy $\mathbf{p}$ n -tagú sorozatot úgy, hogy a c_i helyett a_j -t írunk, ha $c_i \in B_j$.
- 4 Egyrészt $\mathbf{p}$ az A halmaz $(k_1, \dots, k_r)$ -típusú ismétl. permutációja.
- 5 Másrészt minden rögzített $\mathbf{p}$ -t pontosan $k_1! \cdots k_r!$ db $\mathbf{c}$ -ből tudjuk előállítani, hiszen $\mathbf{c}$ -n belül az azonos B_j -be eső elemeket permutálva a kapott $\mathbf{p}$ sorozat nem változik.

Ismétléses permutációk száma (folyt.)

Alkalmazzuk a mintafeladatban szereplő esetre a bizonyítást:

$$B_1 = \{L_1, L_2\}, B_2 = \{F_1, F_2\}, C = B_1 \cup B_2 = \{L_1, L_2, F_1, F_2\} :$$

c	p	c	p	c	p
$\left. \begin{array}{l} L_1 L_2 F_1 F_2 \\ L_1 L_2 F_2 F_1 \\ L_2 L_1 F_1 F_2 \\ L_2 L_1 F_2 F_1 \end{array} \right\}$	<i>LLFF</i>	$\left. \begin{array}{l} L_1 F_1 L_2 F_2 \\ L_1 F_2 L_2 F_1 \\ L_2 F_1 L_1 F_2 \\ L_2 F_2 L_1 F_1 \end{array} \right\}$	<i>LFLF</i>	$\left. \begin{array}{l} L_1 F_1 F_2 L_2 \\ L_1 F_2 F_1 L_2 \\ L_2 F_1 F_2 L_1 \\ L_2 F_2 F_1 L_2 \end{array} \right\}$	<i>LFFL</i>
$\left. \begin{array}{l} F_1 L_1 L_2 F_2 \\ F_2 L_1 L_2 F_1 \\ F_1 L_2 L_1 F_2 \\ F_2 L_2 L_1 F_1 \end{array} \right\}$	<i>FLLF</i>	$\left. \begin{array}{l} F_1 L_1 F_2 L_2 \\ F_2 L_1 F_1 L_2 \\ F_1 L_2 F_2 L_1 \\ F_2 L_2 F_1 L_1 \end{array} \right\}$	<i>FLFL</i>	$\left. \begin{array}{l} F_1 F_2 L_1 L_2 \\ F_2 F_1 L_1 L_2 \\ F_1 F_2 L_2 L_1 \\ F_2 F_1 L_2 L_1 \end{array} \right\}$	<i>FFLL</i>

Ismétlés nélküli kombinációk

Mintafeladat

Egy rádió 4 hallgató (Ági, Balázs, Cusi és Dodó) között sorsol 2 jegyet a DVSC-Liverpool meccsre úgy, hogy egy hallgató legfeljebb egy jegyet nyerhet. Hányféleképpen lehetséges ez?

Megoldás. $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. A nyertesek halmazai: {Á,B}, {Á,C}, {Á,D}, {B,C}, {B,D}, {C,D}.

Definíció: Ismétlés nélküli kombinációk

Az n -elemű halmaz k -elemű részhalmazait az n elem **k -tagú ismétlés nélküli kombinációinak** nevezzük; ezek számát C_n^k -val jelöljük.

Ismétlés nélküli kombinációk száma

Definíció: Binomiális együttható

$0 \leq k \leq n$ egész számok esetén az $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ szám jelölésére az $\binom{n}{k}$ (olvasd: n alatt a k) szimbólumot használjuk. Ezeket a számokat **binomiális együtthatóknak** nevezzük.

Állítás: Ismétlés nélküli kombinációk száma

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

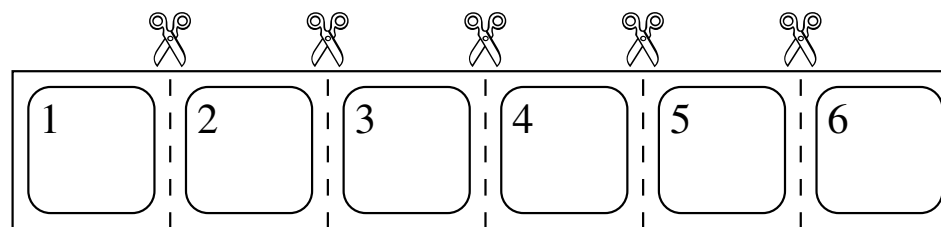
Biz. Az ismétlés nélküli variációk és az ismétlés nélküli kombinációk között az egyedüli különbség, hogy az utóbbi esetén a kiválasztott k elem sorrendje nem számít, tehát

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}. \quad \square$$

Ismétléses kombinációk

Mintafeladat 1

Egy rádió 4 hallgató (Ági, Balázs, Cusi és Dodó) között sorsol 6 jegyet a DVSC-Liverpool meccsre úgy, hogy minden hallgató legalább egy jegyet nyer. Hányféleképpen lehetséges ez?



Megoldás. A 6 jegyet 4 részre kell vágni, a megfelelő részeket kapja sorrendben a 4 hallgató. Ez 3 vágással történik, amire $\binom{5}{3} = 10$ lehetőség van.

Mintafeladat 2

Egy rádió 4 hallgató (Ági, Balázs, Cusi és Dodó) között sorsol 2 jegyet a DVSC-Liverpool meccsre úgy, hogy egy hallgató több jegyet is nyerhet. Hányféleképpen lehetséges ez?

Megoldás. Ugyanannyiféleképpen, mint az előző feladatban.

Ismétléses kombinációk száma

Definíció: Ismétléses kombinációk

Ha adott n különböző elem közül k elemet úgy választunk ki, hogy egy elem többször is választható és az elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor n elem egy **k -ad osztályú ismétléses kombinációját** kapjuk. Ezek számát $C_n^{k(i)}$ -vel jelöljük.

Állítás: Ismétléses kombinációk száma

$$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Biz. Legyen $A = \{1, \dots, n\}$ és $B = \{1, \dots, n+k-1\}$. Az A tetszőleges ismétléses kombinációja megadható az $\mathbf{k} = (a_1, \dots, a_k)$ sorozattal, ahol $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$. Rendeljük $\mathbf{k}$ -hoz a $\mathbf{k}' = (a_1, a_2 + 1, \dots, a_k + (k-1))$ sorozatot. Ekkor a $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{k}'$ bijekció az A ismétléses kombinációinak halmaza és B ismétlés nélküli kombinációinak halmaza között. □

A binomiális együtthatók tulajdonságai

Tétel: A binomiális együtthatók tulajdonságai

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad (6)$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}, \quad (7)$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k}, \quad (8)$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}. \quad (9)$$

Biz. (1) és (2) triviális. (3)-ban az $n+1$ -elemű halmaz $k+1$ -elemű részhalmazait számoljuk úgy, hogy először azokat, amiknek $n+1$ a legnagyobb eleme, majd aminek n , stb. (4)-ben az n -elemű halmaz összes részhalmazát számoljuk kétféleképpen.



Binomiális tétel

Tétel: Binomiális tétel

Bármely n természetes számra és tetszőleges a, b valós számokra

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^k b^{n-k} + \dots + \binom{n}{n}b^n.$$

Biz. Teljes indukció n -re, $n = 1$ triviális. Tegyük fel n -re, ekkor:

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= \left(\dots + \binom{n}{k}a^k b^{n-k} + \dots \right) (a + b) \\ &= \left(\dots + \binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \dots \right) + \left(\dots + \binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} + \dots \right) \\ &= \dots + \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + \dots \\ &= \dots + \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \dots \end{aligned}$$

Egy leszámplálási feladat

Mintafeladat

Hányféleképpen lehet a TISZA szót kiolvasni az alábbi ábrában:

T	I	S
I	S	Z
S	Z	A

Megoldás. A TISZ szócskát 2×3 -féleképpen, tehát a TISZA szót 6.

Házi feladat

Hányféleképpen lehet a MATEMATIKA szót kiolvasni?

M	A	T	E	M	A	T
A	T	E	M	A	T	I
T	E	M	A	T	I	K
E	M	A	T	I	K	A

Pascal-háromszög

Blaise Pascal (1623-1662), francia matematikus.

Definíció: Pascal-háromszög

A **Pascal-háromszög** csúcsán és oldalain 1-esek vannak, és a belső pontjainak értéke a felette elhelyezkedő két érték összege:

0. sor:	.	.	.	.	.	.	.	1							
1. sor:	.	.	.	.	.	.	.	1		1					
2. sor:	.	.	.	.	.	.	1		2		1				
3. sor:	.	.	.	.	.	1		3		3		1			
4. sor:	.	.	.	.	1		4		6		4		1		
5. sor:	.	.	.	1		5		10		10		5		1	
6. sor:	.	.	1		6		15		20		15		6		1

Állítás: A Pascal-háromszög és a binomiális együtthatók

A Pascal-háromszög n -dik sorának k -dik eleme $\binom{n}{k}$.

Számtani sorozat összegképlete

Definíció: Számtani sorozat

Legyen $d \in \mathbb{R}$ rögzített valós szám. Azt mondjuk, hogy az $a_1, a_2, \dots$ sorozat **számtani sorozat d differenciával**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+1} = a_n + d$.

A számtani sorozat **általános tagja** $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Állítás: Számtani sorozat összegképlete

Legyen $a_1, a_2, \dots$ számtani sorozat d differenciával. Ekkor

$$\sum_{i=1}^n a_i = na_1 + d \frac{n(n-1)}{2}.$$

Biz. n -re vonatkozó teljes indukcióval.

Mértani sorozat összegképlete

Definíció: Mértani sorozat

Legyen $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$ rögzített valós szám. Azt mondjuk, hogy az $a_1, a_2, \dots$ sorozat **mértani sorozat q hányadossal**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+1} = qa_n$.

A mértani sorozat **általános tagja** $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Állítás: Mértani sorozat összegképlete

Legyen $a_1, a_2, \dots$ mértani sorozat $q \neq 1$ hányadossal. Ekkor

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Biz. n -re vonatkozó teljes indukcióval.

A Bernoulli-féle egyenlőtlenség

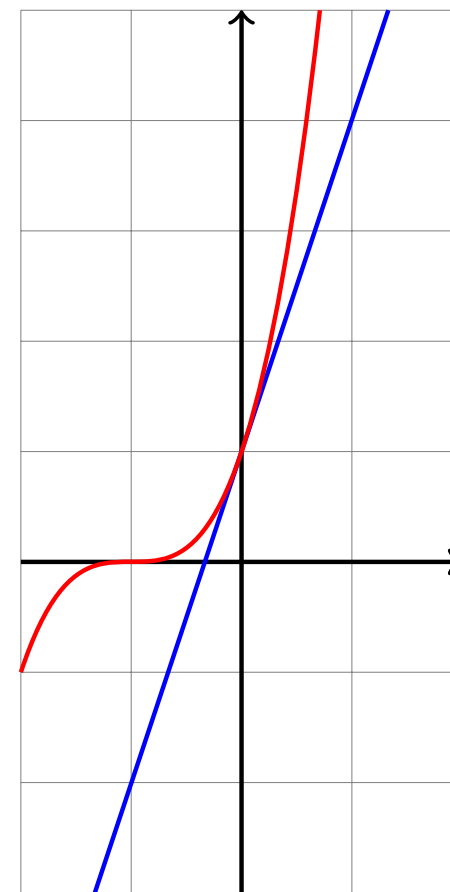
(Bernoulli-család, svájci matematikusok, 17-18. sz.)

Tétel: Bernoulli-egyenlőtlenség

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \geq -1$ valós szám, akkor
 $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.

Biz. Ha $\alpha = -1$, akkor az állítás igaz. Ha $\alpha > -1$, akkor teljes indukció n -re; $n = 1$ igaz, tegyük fel n -re. Ekkor:

$$\begin{aligned}(1 + \alpha)^{n+1} &= (1 + \alpha)^n(1 + \alpha) \\ &\geq (1 + n\alpha)(1 + \alpha) \\ &= 1 + (n + 1)\alpha + n\alpha^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)\alpha.\end{aligned}$$



Az $n = 3$ esetben látható
 $y = (1 + x)^n$ és $y = 1 + nx$
kapcsolata.

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

Tétel: Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség

Tetszőleges $u_1, \dots, u_n$ és $v_1, \dots, v_n$ valós számokra teljesül

$$(u_1v_1 + \dots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + \dots + v_n^2),$$

ahol akkor és csak akkor van egyenlőség, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ szám, melyre $v_1 = cu_1, \dots, v_n = cu_n$ teljesül.

A vektorok nyelvére is át lehet fogalmazni a fenti tételt. Definiáljuk az $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vektorokat, mint szám n -eseket. Ezek **hossza** valamint **skalárszorzata**

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}, \quad \mathbf{u}\mathbf{v} = u_1v_1 + \dots + u_nv_n.$$

Az egyenlőtlenség ekkor $\mathbf{u}\mathbf{v} \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ alakba írható. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ valamely c -re. (Lineáris függőség.)

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség bizonyítása

Bizonyítás. Rögzítsük az u_i, v_i számokat és vizsgáljuk a

$$\begin{aligned} 0 &\leq (u_1 - xv_1)^2 + \cdots + (u_n - xv_n)^2 \\ &= u_1^2 + \cdots + u_n^2 - 2x(u_1v_1 + \cdots + u_nv_n) + x^2(v_1^2 + \cdots + v_n^2) \end{aligned}$$

kifejezést. Egyrészt ez pontosan akkor oldható meg x -re, ha létezik a tételben szereplő c szám, ekkor a megoldás $x = c$ egyértelmű. Másrészt tudjuk, hogy egy másodfokú egyenletnek pontosan akkor van 1, illetve 0 megoldása, ha a

$$4(u_1v_1 + \cdots + u_nv_n)^2 - 4(u_1^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + \cdots + v_n^2)$$

diszkriminánsa 0, illetve negatív. Ez pontosan a kívánt egyenlőtlenséget szolgáltatja. □

Megjegyzés. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) francia, illetve Herman Schwarz (1843-1921) német matematikusok.

A számtani és a mértani közép

Definíció: A számtani és a mértani közép

Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ nemnegatív valós számok **számtani közepének** az

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

mértani közepének pedig a

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

valós számot nevezzük.

Megjegyzés. Az $n = 2$ esetben a számtani és a mértani közepek

$$\frac{a + b}{2}, \text{ illetve } \sqrt{ab}.$$

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség

Tétel: A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség

Tetszőleges $a_1, \dots, a_n$ nemnegatív valós számokra igaz az

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

egyenlőtlenség, és egyenlőség pontosan az $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ esetben teljesül.

Biz. A bizonyítás négy lépésben történik. Az **első lépés** az $n = 2$ eset:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} &\Leftrightarrow a_1 + a_2 \geq 2 \sqrt{a_1 a_2} \\ &\Leftrightarrow (a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 \geq 4a_1 a_2 \\ &\Leftrightarrow a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 = (a_1 - a_2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség bizonyítása

A **második lépésben** k szerinti indukciót hajtunk végre az $n = 2^k$ esetre. A $k = 1$ esetet már láttuk, és feltételezzük, hogy az állítás teljesül $n = 2^k$ -ra. Ekkor

$$\begin{aligned}
 \sqrt[2^{k+1}]{a_1 \cdots a_{2^{k+1}}} &= \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}} \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}}} \\
 &\leq \sqrt{\frac{a_1 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} \cdot \frac{a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}} \\
 &\leq \frac{\frac{a_1 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} \\
 &= \frac{a_1 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}.
 \end{aligned}$$

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség bizonyítása (folyt.)

A **harmadik lépésben** legyen n tetszőleges és $m = 2^k$ n -nél nagyobb 2-hatvány. Jelölje s az $a_1, \dots, a_n$ számok számtani közepét és definiáljuk az $a_{n+1} = \dots = a_m = s$ számokat. Ekkor ezek számtani közepe

$$\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_m}{m} = \frac{ns + (m - n)s}{m} = s,$$

amire a korábban bizonyítottak szerint teljesül

$$s \geq \sqrt[m]{a_1 \cdots a_n a_{n+1} \cdots a_m} = \sqrt[m]{a_1 \cdots a_n s^{m-n}}.$$

Mindkét oldalt m -dik hatványra emelve és s^{m-n} -el leegyszerűsítve kapjuk, hogy $s^n \geq a_1 \cdots a_n$, ami pont a bizonyítandó egyenlőtlenség n -dik hatványa.

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség bizonyítása (folyt.)

Az utolsó, **negyedik lépésben** vizsgáljuk az egyenlőség esetét. Nyilván, ha $a_1 = \dots = a_n$, akkor a számtani és mértani közepék egyenlők. Tegyük fel, hogy $a_1, \dots, a_n$ nem mind egyenlők, legyen pl. $a_1 \neq a_2$. Ekkor $\frac{a_1+a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}$ és

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \dots + a_n}{n} \\ &> \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_2} + a_3 + \dots + a_n}{n} \\ &\geq \sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_1 a_2} \cdot a_3 \cdots a_n} \\ &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \end{aligned}$$

tehát itt sem teljesül egyenlőség.



A négyzetes és a harmonikus közép

Definíció: Négyzetes és harmonikus közép

Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ nemnegatív valós számok **négyzetes közepének** az

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}},$$

harmonikus közepének pedig a

$$\frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

valós számot nevezzük.

Az általános hatványközép

Definíció: Az általános hatványközép

Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valós számok és $r \neq 0$ racionális szám. Az $a_1, \dots, a_n$ számok **r -dik hatványközepe** az

$$M_r(a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}$$

valós szám. **Megállapodás szerint** az $r = 0$ esetben a **mértani közepet** tekintjük az r -dik hatványközépnek.

Az eddigi közepek mind speciális hatványközepek:

Számtani közép: $r = 1$.

Négyzetes közép: $r = 2$.

Harmonikus közép: $r = -1$.

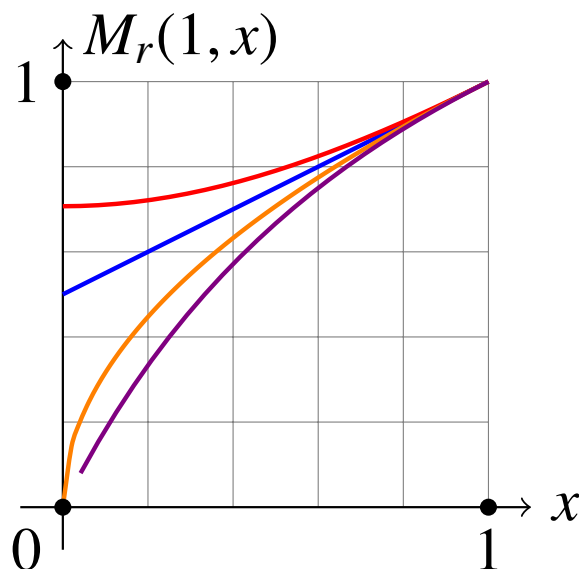
Az általános hatványközépre vonatkozó egyenlőtlenség

Tétel: Az általános hatványközépre vonatkozó egyenlőtlenség

Ha $a_1, \dots, a_n$ pozitív valós és r, s racionális számok, és $r < s$, akkor

$$\left(\frac{a_1^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{a_1^s + \dots + a_n^s}{n} \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha $a_1 = \dots = a_n$.



$$\begin{aligned} r = 2, & \quad M_r(1, x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{2}} \\ r = 1, & \quad M_r(1, x) = \frac{1+x}{2} \\ r = 0, & \quad M_r(1, x) = \sqrt{x} \\ r = -1, & \quad M_r(1, x) = \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

A harmonikus és a mértani közép kapcsolata

Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$ valós számokra:

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdots a_n}}.$$

Ezen egyenlőtlenség reciprokát véve kapjuk a harmonikus és a mértani közép közötti

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

egyenlőtlenséget. Az egyenlőség esete is közvetlenül adódik.

A számtani és a négyzetes közép kapcsolata

Alkalmazzuk a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget az $u_1 = a_1, \dots, u_n = a_n$ és $v_1 = \dots = v_n = 1$ valós számokra:

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(1 + \dots + 1) = n(a_1^2 + \dots + a_n^2).$$

Leosztva n^2 -tel és négyzetgyököt vonva kapjuk a négyzetes és a számtani közép közötti

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

egyenlőtlenséget. Az egyenlőség esete is közvetlenül adódik.

- 1 Matematikai alapfogalmak
- 2 Összeszámlálási feladatok
- 3 Számfogalom és alpműveletek**
- 4 Elemi függvények
- 5 Geometriai transzformációk
- 6 Szintetikus geometria
- 7 Koordinátageometria

A négy alpművelet

Definíció: Számok különbsége és hányadosa

- Az a, b számok **különbsége** az az $a - b$ -vel jelölt c szám, amelyre $c + b = a$ teljesül.
- Az a, b ($b \neq 0$) számok **hányadosa** az az a/b -vel jelölt c szám, amelyre $c \cdot b = a$ teljesül.
- **A négy alpművelet** az összeadás, a kivonás, a szorzás és az osztás.
- Az alpműveletek legfontosabb tulajdonságai: **asszociativitás**, **kommutativitás** és **disztributivitás**.
- $\mathbb{N}$ **zárt** az összeadásra és a szorzásra, de **nem zárt** a kivonásra és az osztásra. Azaz, előfordul, hogy $n - m$ vagy $n/m \notin \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$ **zárt** az összeadásra, a kivonásra és a szorzásra, de **nem zárt** az osztásra.

Oszthatóság a természetes számok körében

Definíció: Oszthatóság

Azt mondjuk, hogy az $a \in \mathbb{N}$ szám **osztható** a $b \in \mathbb{N}$ számmal, ha létezik olyan $c \in \mathbb{N}$ szám, amire $a = bc$ teljesül. Jelölés: $b \mid a$.

- $b \mid a$ esetén azt is mondjuk, hogy **b osztója a -nak**, illetve **a többszöröse b -nek**.
- Könnyű meggondolni, hogy $a = bc$ esetén a **c szám egyértelmű**.
- Kis óvatossággal bárki ki tudja terjeszteni az oszthatóság fogalmát **$\mathbb{Z}$ -re**. Az óvatosság a **0** és a **-1** szerepére vonatkozik.

Állítás: Az oszthatósági reláció alaptulajdonságai

Tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{N}$ elemekre

- | | |
|--|--|
| (1) $1 \mid a$ és $a \mid a$. | (2) ha $a \mid b$ és $b \mid a$, akkor $a = b$. |
| (3) ha $a \mid b$ és $b \mid c$, akkor $a \mid c$. | (4) ha $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid b+c$. |
| (5) ha $a \mid b$, akkor $a \mid bc$. | (6) ha $ac \mid bc$, akkor $a \mid b$. |

A maradékos osztás

Tétel: A maradékos osztás tétele

Legyen $a \in \mathbb{N}_0$ és $b \in \mathbb{N}$. Ekkor léteznek olyan egyértelműen meghatározott $q, r \in \mathbb{N}_0$ számok, amelyekre $a = bq + r$ és $0 \leq r < b$ teljesül.

Megj. q -t a maradékos osztás **hányadosának**, r -et pedig a **maradékának** nevezzük.

Biz. Létezés: Ha $a < b$, akkor $q = 0$ és $r = a$ megfelelő. A továbbiakra nézve tegyük fel, hogy $a \geq b$. Alkalmazzunk teljes indukciót a -ra. Ha $a = 1$, akkor $b = 1$ és $q = 1, r = 0$ megfelelő.

Tegyük most fel, hogy $a > 1$ és minden a -nál kisebb természetes számra beláttuk a tételt. Legyen $a_0 = a - b < a$ és tekintsük a hozzá tartozó megfelelő q_0, r_0 -at:

$$a - b = a_0 = bq_0 + r_0 \text{ és } 0 \leq r_0 < b.$$

Ekkor $q = q_0 + 1$ és $r = r_0$ megfelelő hányados és maradék a -hoz és b -hez. $\square$

A maradékos osztás (folyt.)

Egyértelműség: Tegyük fel, hogy

$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$$

megfelelő q_1, q_2, r_1, r_2 számokra. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $r_1 \geq r_2$, azaz $0 \leq r_1 - r_2 < b$. Ekkor

$$0 = a - a = b(q_1 - q_2) + r_1 - r_2,$$

azaz $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$ osztható b -vel. Ez csak úgy lehetséges, ha $r_1 - r_2 = 0$, vagyis $r_1 = r_2$ és $q_1 = q_2$. □

Megjegyzés. A természetes számok körében a négy alpművelet (ideértve a maradékos osztást) elvégzésére nagyon hatékony algoritmus áll rendelkezésre: az a 10-es számrendszert használó több évszázados eljárás, amit az általános iskolában is tanulunk.

Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös

Definíció: Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös

Az $a, b \in \mathbb{N}$ számok **legnagyobb közös osztója** az a lehetséges legnagyobb $d \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $d \mid a$ és $d \mid b$.

Az $a, b \in \mathbb{N}$ számok **legkisebb közös többszöröse** az a lehetséges legkisebb $m \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $a \mid m$ és $b \mid m$.

Jelölés: **$lnko(a, b)$** , **$lkkt(a, b)$** .

- A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös kiszámítására az általános iskolában tanult eljárás a számok **prímtényezős felbontását** használja. Erre azonban nagy számok esetén (pl. 100 számjegyű) nem ismert hatékony eljárás.
- Egy másik módszer, az ún. **euklidészi algoritmus** a maradékos osztáson alapuló gyors eljárás a l.n.k.o. és a l.k.k.t. kiszámítására.

A legnagyobb közös osztó kikombinálása

Állítás: A legnagyobb közös osztó kikombinálása

Legyen d az $a, b \in \mathbb{N}$ számok legnagyobb közös osztója. Ekkor léteznek $n, m \in \mathbb{Z}$ számok úgy, hogy $d = ma + nb$.

Biz. Jelöljük c -vel a

$$H = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

halmaz **legkisebb pozitív** elemét. Egyrészt nyilvánvaló, hogy $d \mid c$.

Megmutatjuk, hogy $c \mid a$ és $c \mid b$, amiből következik, hogy $c \mid d$, azaz $c = d$.

Tegyük fel, hogy $c \nmid a$ és osszuk el a -t c -vel maradékosan:

$$a = qc + r, \text{ ahol } 0 < r < c.$$

Ekkor

$$r = a - qc = a - q(ma + nb) = (1 - qm)a - qnb \in H,$$

ami ellentmond $c \in H$ minimalitásának. $c \mid b$ hasonlóan adódik.



A prímtulajdonság

Állítás: A prímtulajdonság

Legyen p prímszám és $a, b \in \mathbb{N}$ természetes számok. Ha $p \mid ab$, akkor $p \mid a$ vagy $p \mid b$.

Biz. Tegyük fel, hogy $ab = pc$ és $p \nmid a$. Ekkor $\text{lnko}(a, p) = 1$, azaz léteznek $n, m \in \mathbb{Z}$ számok úgy, hogy $1 = na + mp$ teljesül.

$$b = b \cdot 1 = b(na + mp) = npc + bmp = p(ac + mb), \text{ tehát } p \mid b. \quad \square$$

Tétel: A számelmélet alaptétele

Minden 1-nél nagyobb természetes szám felbontható véges sok prímszám szorzatára. A felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Biz. A prímtényezős felbontás **létezése** könnyű. A felbontás **egyértelműségéhez** viszont szükséges a fenti állítás.

□

Számrendszerek

Definíció: Szám felírása g -alapú számrendszerben

Legyen $g > 1$ természetes szám. Azt mondjuk, hogy az $a \geq 0$ egész számot g alapú számrendszerben írtuk fel, ha

$$a = a_n g^n + \cdots + a_1 g + a_0,$$

ahol $n, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$ és $0 \leq a_0, a_1, \dots, a_n < g$. Jelölés: $a = (a_n \dots a_0)_g$. Az a_i -t a g^i -s helyiértékhez tartozó számjegynek nevezzük.

Példák

- $428 = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$ a 10-es számrendszerben.
- $213_4 = 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 3$ a 39 felírása a 4-es számrendszerben.
- $1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$ a 13 felírása a 2-es számrendszerben.

Szám felírása g -alapú számrendszerben

Tétel: Szám felírása g -alapú számrendszerben

Bármely $a \in \mathbb{N}_0$ szám a szám elején elhelyezett 0-któl eltekintve egyértelműen felírható g alapú számrendszerben.

Biz. Megadjuk a felírást szolgáltató eljárást, a helyesség bizonyításától eltekintünk. Legyen $b_0 = a$ és definiáljuk az a_i, b_i számokat rendre az alábbi **maradékos osztással**:

$$\begin{aligned} b_0 &= b_1 g + a_0 & (0 \leq a_0 < g), \\ b_1 &= b_2 g + a_1 & (0 \leq a_1 < g), \\ &\vdots \\ b_n &= b_{n-1} g + a_n = 0 & (0 \leq a_n < g). \end{aligned}$$

Az algoritmus akkor áll meg, ha $b_n = 0$.



A racionális számok

Definíció: A racionális számok fogalma

A racionális számok $\frac{a}{b}$ alakú kifejezések, ahol $a \in \mathbb{Z}$ és $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Az $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ racionális számokat akkor és csak akkor **tekintjük egyenlőnek**, ha $ad = bc$ teljesül. A racionális számok halmazát $\mathbb{Q}$ -val jelöljük.

VIGYÁZAT! Az „egyenlőnek tekintjük” viszony kapcsán tisztázni kell, hogy

- minden racionális számot „egyenlőnek tekintünk-e” saját magával?
- ha az $\frac{a}{b}$ racionális számot „egyenlőnek tekintjük” $\frac{c}{d}$ -vel, akkor $\frac{c}{d}$ -t is „egyenlőnek tekintjük-e” $\frac{a}{b}$ -vel?
- ha az $\frac{a}{b}$ -t „egyenlőnek tekintjük” $\frac{c}{d}$ -vel, és $\frac{c}{d}$ -t „egyenlőnek tekintjük” $\frac{e}{f}$ -el, akkor $\frac{a}{b}$ -t is „egyenlőnek tekintjük-e” $\frac{e}{f}$ -el?

A négy alpművelet a racionális számok halmazán

Definíció: Az alpműveletek a racionális számok halmazán

Legyenek $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ racionális számok. Ekkor a négy alpműveletet a következőképpen értelmezzük:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{és } c \neq 0 \text{ esetén} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Megj. Ez természetesen nem más, mint a **közös nevezőre hozás**, valamint **törtek szorzására** és **osztására** tanult szabályok alkalmazása.

Feladatok

- Mutassuk meg, hogy az így értelmezett műveletek asszociatívak, kommutatívak és teljesül a disztributivitás.
- Mutassuk meg, hogy az „egyenlőnek tekintés” szempontjából a műveletek definíciója **értelmes**.

A racionális számok rendezése

- Az $\frac{a}{b}$ racionális szám **pozitív**, ha $ab > 0$. Az $\frac{a}{b}$ racionális szám **negatív**, ha $ab < 0$.
- Minden racionális szám pozitív, negatív vagy 0.
- A pozitív racionális számok $\mathbb{Q}^+$ halmaza **zárt** az összeadásra és a szorzásra.
- Az x racionális szám **nagyobb**, mint a y racionális szám, ha az $x - y$ különbségük pozitív. Jelöléssel: $x > y$.
- Értelemszerűen használjuk a $\geq, <, \leq$ relációkat. Ezeket összefoglalóan **rendezési relációknak** nevezzük.

Állítás: A „kisebb” reláció alaptulajdonságai

- 1 Ha $x \neq y \in \mathbb{Q}$, akkor vagy $x < y$ vagy pedig $y < x$ teljesül.
- 2 Ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$.
- 3 Ha $x < y$ és $x' < y'$, akkor $x + x' < y + y'$.
- 4 Ha $x < y$ és $0 < z$, akkor $xz < yz$.

A $\sqrt{2}$ nem racionális szám

Állítás: A $\sqrt{2}$ nem racionális szám

Nincs olyan $x \in \mathbb{Q}$ racionális szám, melyre $x^2 = 2$.

Bizonyítás. (Indirekt.) Tegyük fel, hogy $x = \frac{a}{b}$ -re ($a, b \in \mathbb{N}$) igaz, hogy $2 = (\frac{a}{b})^2$, azaz $a^2 = 2b^2$.

Tegyük fel továbbá, hogy $\text{luko}(a, b) = 1$.

Mivel 2 prím és $2 \mid a^2$, így a prím tulajdonság miatt $2 \mid a$, vagyis $a = 2c$ valamely $c \in \mathbb{N}$ számra. Ekkor viszont

$$a^2 = 4c^2 = 2b^2 \implies b^2 = 2c^2 \implies 2 \mid b^2 \implies 2 \mid b,$$

ami ellentmond az $\text{luko}(a, b) = 1$ feltételünknek. □

Megjegyzés. A bizonyítást könnyen általánosíthatjuk 2-től tetszőleges p prímszámmra.

A valós számok

A valós számok mibenlétét illetően szinte mindenkinek van egy meglehetősen **szilárd elképzelése**. Ezért is meglepő, hogy mennyire **körülményes** ezt a fogalmat **matematikailag precízen felépíteni**.

A valós számok legfontosabb definiáló tulajdonságai

- 1 A valós számokon értelmezve van a **négy alpművelet** és a „**<**” reláció.
- 2 A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza **tartalmazza** $\mathbb{Q}$ -t.
- 3 **(Archimédészi axióma)** Minden valós számnál van nagyobb természetes szám.
- 4 **(Cantor-axióma)** Valós számoknak egymásba ágyazott zárt intervallumainak mindig van közös elemük.

Megj. Archimédész (vagy Arkhimédész) i.e. 287-212, görög tudós.
Georg Cantor 1845-1918, német matematikus.

Valós intervallumok

Definíció: Intervallum

Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok és legyen $a \leq b$.

- Az $[a, b]$ **zárt intervallum** azon $x \in \mathbb{R}$ valós számok halmaza, melyre $a \leq x \leq b$ teljesül.
- Az (a, b) **nyílt intervallum** azon $x \in \mathbb{R}$ valós számok halmaza, melyre $a < x < b$ teljesül. (Tehát $a, b \notin (a, b)$.)
- Értelemszerűen definiáljuk az $(a, b]$ és $[a, b)$ **félzig zárt, félzig nyitott intervallumokat**.
- Azt mondjuk, hogy az $[a, b]$ intervallum **be van skatulyázva** a $[c, d]$ intervallumba, ha része neki, azaz ha $c \leq a$ és $b \leq d$.
- Könnyű meggondolni, hogy tetszőleges számú zárt intervallum **metszete** is zárt (esetleg üres) intervallum.
- Az archimédész-i axióma következménye, hogy **minden nemüres valós intervallum tartalmaz racionális számot**.

$\sqrt{2}$ közelítése racionális számokkal

Definiáljuk az alábbi a_n, b_n sorozatokat:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{4a_n}{2 + a_n^2}, \quad b_1 = 2, b_{n+1} = \frac{2 + b_n^2}{2b_n}.$$

- Nyilván minden n -re $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$.
- Megmutatjuk, hogy az (a_n) alulról, monoton növekvő módon, a (b_n) pedig felülről, monoton csökkenő módon közelíti a $\sqrt{2}$ értékét.

n	a_n	b_n	$b_n - a_n$
1	1	2	1
2	1,333333333	1,5	0,166666667
3	1,411764706	1,416666667	0,004901960784
4	1,414211438	1,414215686	0,000004247799640
5	1,414213562	1,414213562	$3,19 \cdot 10^{-12}$

$\sqrt{2}$ közelítése racionális számokkal (folyt.)

Állítás: $\sqrt{2}$ közelítése racionális számokkal

Az imént definált a_n, b_n számokra teljesülnek az alábbiak:

- ① $a_n b_n = 2$.
- ② $a_n < a_{n+1} < \sqrt{2} < b_{n+1} < b_n$.
- ③ $b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
- ④ $b_{n+1} - a_{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Más szóval, az $[a_n, b_n]$ intervallumok olyan egymásba skatulyázott intervallumok, melyeknek egyetlen közös eleme $\sqrt{2}$.

Biz. Minden lépésben indukciót alkalmazunk n -re és használjuk a korábbi lépések eredményeit.

Megjegyzés. Láthatjuk, hogy ha az $[a_n, b_n]$ intervallumokat csak $\mathbb{Q}$ -ban tekintjük, akkor ott a metszetük üres halmaz. Erre utalunk, amikor azt mondjuk, hogy „a racionális számok halmaza lyukas.”

Tizedes törtek

Definíció: Tizedes törtek

Legyenek $e_0, \dots, e_n, t_1, t_2, \dots$ elemei a $\{0, 1, \dots, 9\}$ halmaznak. Az

$$\pm e_n e_{n-1} \cdots e_0, t_1 t_2 \cdots t_m \cdots$$

alakú „jelsorozatok” **tizedes törteknek** nevezzük.

Tizedes törteken értelmezni tudjuk a négy alpműveletet (az általános iskolában tanult eljárásokkal), valamint a „<” relációt.

Állítás: Valós számok tizedes tört alakja

Minden tizedes tört meghatároz egy egyértelmű valós számot. Fordítva, minden valós számhoz pontosan egy tizedes tört alak tartozik, ha nem engedjük meg, hogy a tizedesjegyek valahonnét kezdve csupa 9-esek legyenek.

Valós számok tizedes tört alakja (biz.)

Biz. Ha a tizedes jegyek valahonnét $t_{m+1} = t_{m+2} = \dots = 0$, akkor

$$\pm e_n \cdots e_0, t_1 t_2 \cdots t_m \mapsto \pm \left(\sum_{i=0}^n e_i 10^i + \sum_{j=1}^m t_j \frac{1}{10^j} \right) \in \mathbb{Q}.$$

Végtelen tizedes tört esetén minden m -re tekintsük az

$$I_m = \left[\pm e_n \cdots e_0, t_1 t_2 \cdots t_m, \pm e_n \cdots e_0, t_1 t_2 \cdots t_m + \frac{1}{10^m} \right] \subset \mathbb{R}$$

zárt intervallumokat. Ezek egymásba ágyazottak és hosszuk $\frac{1}{10^m}$, azaz metszetük egyetlen $x \in \mathbb{R}$ számot tartalmaz:

$$\{x\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m.$$

Ezt az $x \in \mathbb{R}$ számot rendeljük a tizedes törtünkhöz. (A tétel megfordításának bizonyítását mellőzzük.)



Szakaszos tizedes törtek

Definíció: Véges, végtelen és szakaszos tizedes törtek

Azt mondjuk, hogy az $x = \pm e_n e_{n-1} \cdots e_0, t_1 t_2 \cdots t_m \cdots$ tizedes tört

- **véges**, ha valahonnét kezdve $t_{m+1} = t_{m+2} = \cdots = 0$. Ellenkező esetben **végtelen tizedes törtről** beszélünk.
- **szakaszosan ismétlődő**, vagy röviden csak **szakaszos**, ha egy idő után a tizedesjegyek periodikusan ismétlődnek.

Állítás: A szakaszos tizedes törtek a racionális számok

A szakaszos tizedes törtek pontosan a racionális számok.

Biz. Bizonyítás helyett vizsgáljuk meg az $x = 0, \overline{237} = 0, 237237 \dots$ végtelen szakaszos tizedes törtet. Ekkor

$$999x = 1000x - x = 237, 237237 \dots - 0, 237237 \dots = 237,$$

azaz $x = \frac{237}{999} = \frac{79}{333}.$



Valós számok egész része, tört része, abszolút értéke

Definíció: Egész rész, tört rész, abszolút érték

- Az $x \in \mathbb{R}$ valós szám **egész része** az x -nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobb. Jelölés: $[x]$.
- Az $x \in \mathbb{R}$ valós szám **tört része** az x -nek és az x egész részének a különbsége. Jelöléssel: $\{x\} = x - [x]$.
- Az $x \in \mathbb{R}$ valós szám **abszolút értéke** $|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

- 1 Ezeket **valós $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek** tekintjük.
- 2 Pl. $[2,75] = 2$ és $\{2,75\} = 0,75$. Nyilván $[x] = x$, illetve $\{x\} = 0$ akkor és csak akkor, ha $x \in \mathbb{Z}$ egész szám.
- 3 **Vigyázat!** $[-2,75] = -3$ és

$$\{-2,75\} = -2,75 - [-2,75] = -2,75 + 3 = 0,25.$$

- 1 Matematikai alapfogalmak
- 2 Összeszámlálási feladatok
- 3 Számfogalom és alpműveletek
- 4 Elemi függvények**
- 5 Geometriai transzformációk
- 6 Szintetikus geometria
- 7 Koordinátageometria

Alapműveletek valós függvényekkel

Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvények.

Definíció: Valós függvények pontonkénti összege és szorzata

Az f és g függvények **pontonkénti összege, illetve szorzata** alatt azt az **$f + g$ -vel**, illetve **fg -vel** jelölt $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értjük, amelyre teljesül

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ illetve } (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Vigyázat! Két valós függvény pontonkénti szorzata nem keverendő össze a függvények, mint leképezések $f \circ g$ szorzatával.

Állítás: A pontonkénti függvénytűveletek alaptulajdonságai

A valós függvények pontonkénti összeadása és szorzása **asszociatív**, **kommutatív** és **disztributív**.

Bizonyítás. Házi feladat.



Polinomfüggvények

Definíció: Polinomfüggvény

Azt mondjuk, hogy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **n -edfokú polinomfüggvény**, ha valamilyen rögzített $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ valós számokra $a_n \neq 0$ és

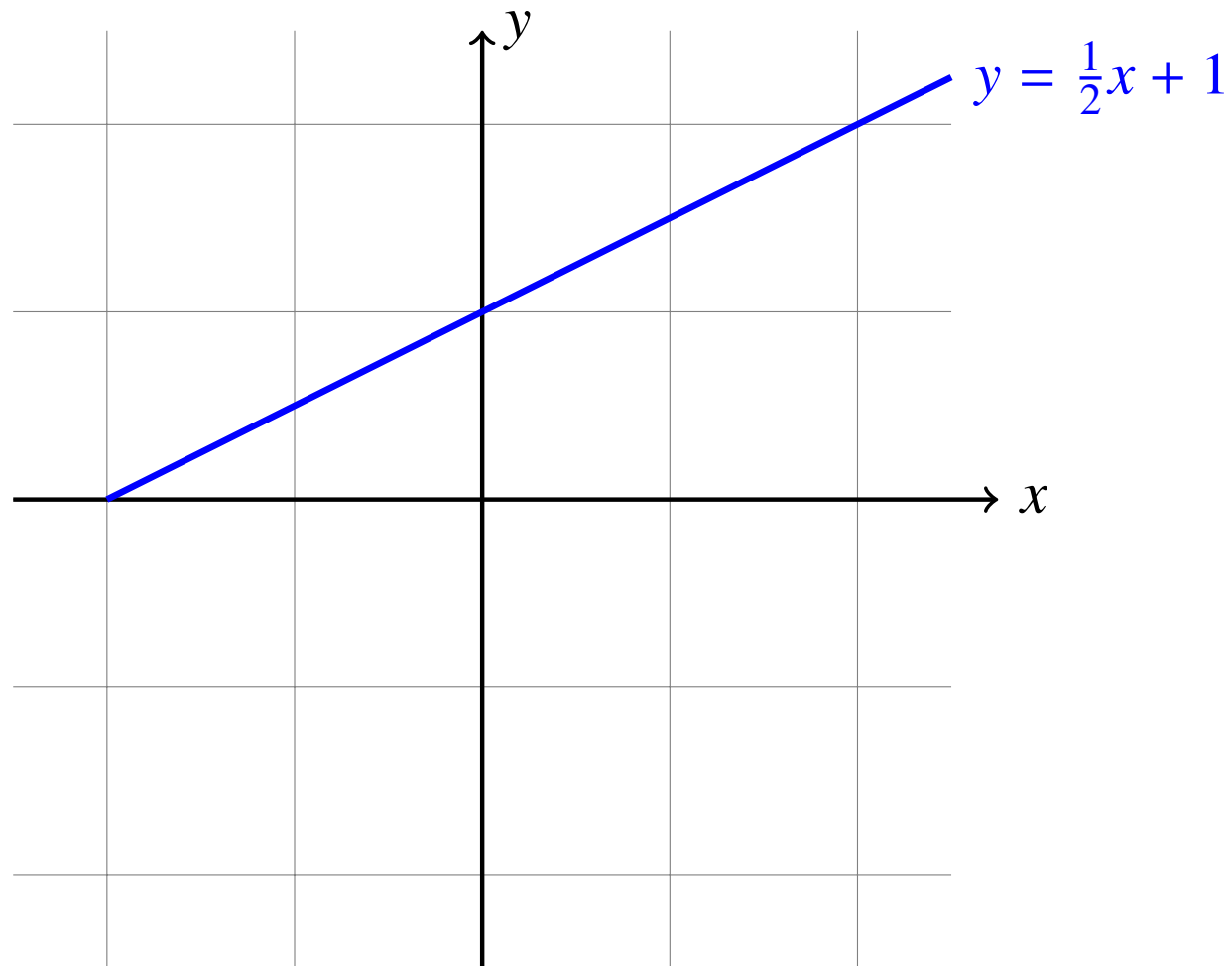
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

teljesül. Az $a_0, \dots, a_n$ számokat az f **együtthatóinak**, x -et pedig az f **változójának**, vagy **határozatlanjának** nevezzük.

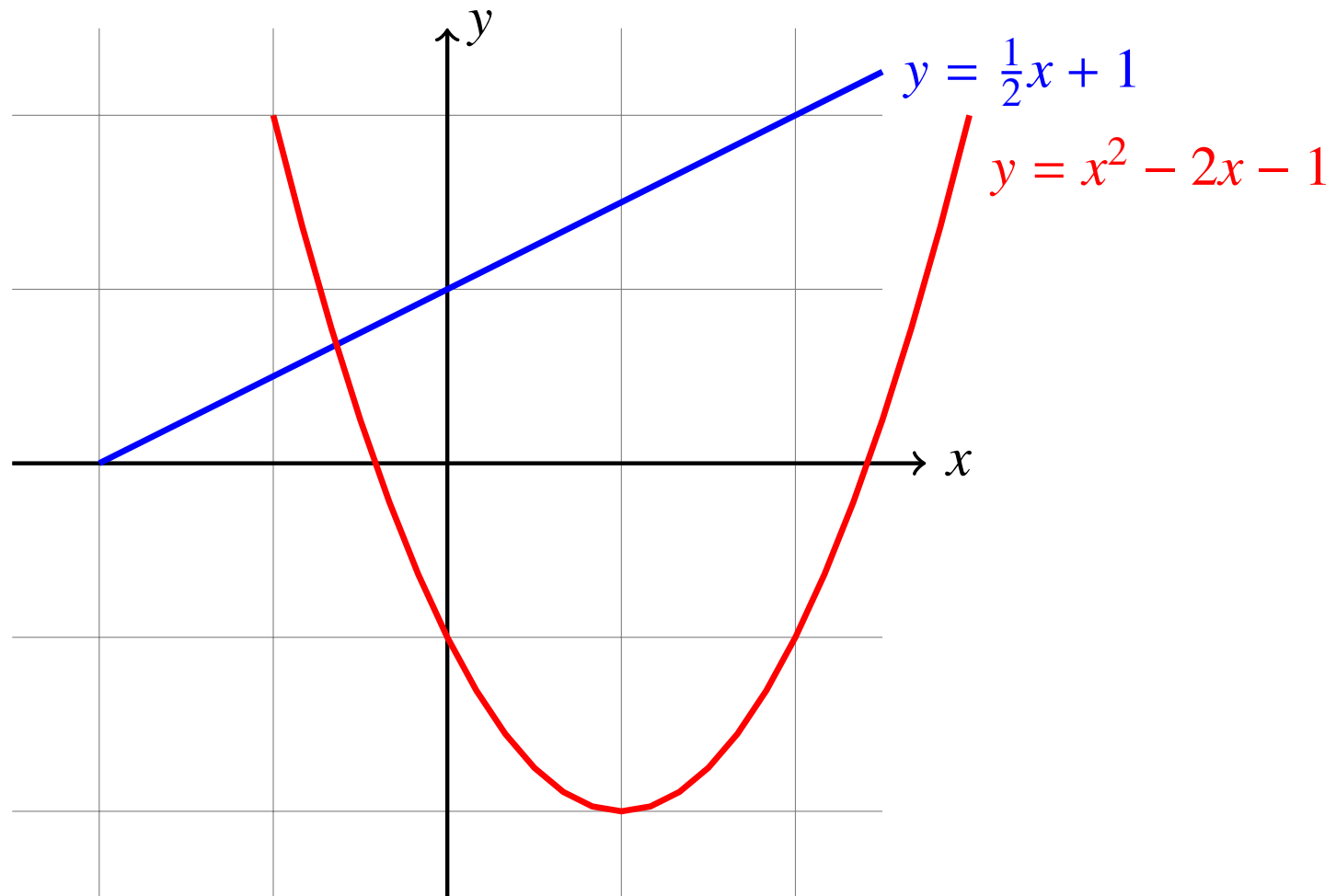
Példák:

- $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ elsőfokú, vagy **lineáris** polinomfüggvény.
- $f(x) = x^2 - 2x - 1$ másodfokú polinomfüggvény 1, -2 és -1 együtthatókkal.
- $f(x) = x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ harmadfokú pfv.
- $f(x) = x^4 - 2x^2 - \frac{1}{2}$ negyedfokú pfv. 1, 0, -2, 0, $-\frac{1}{2}$ együtthatókkal.

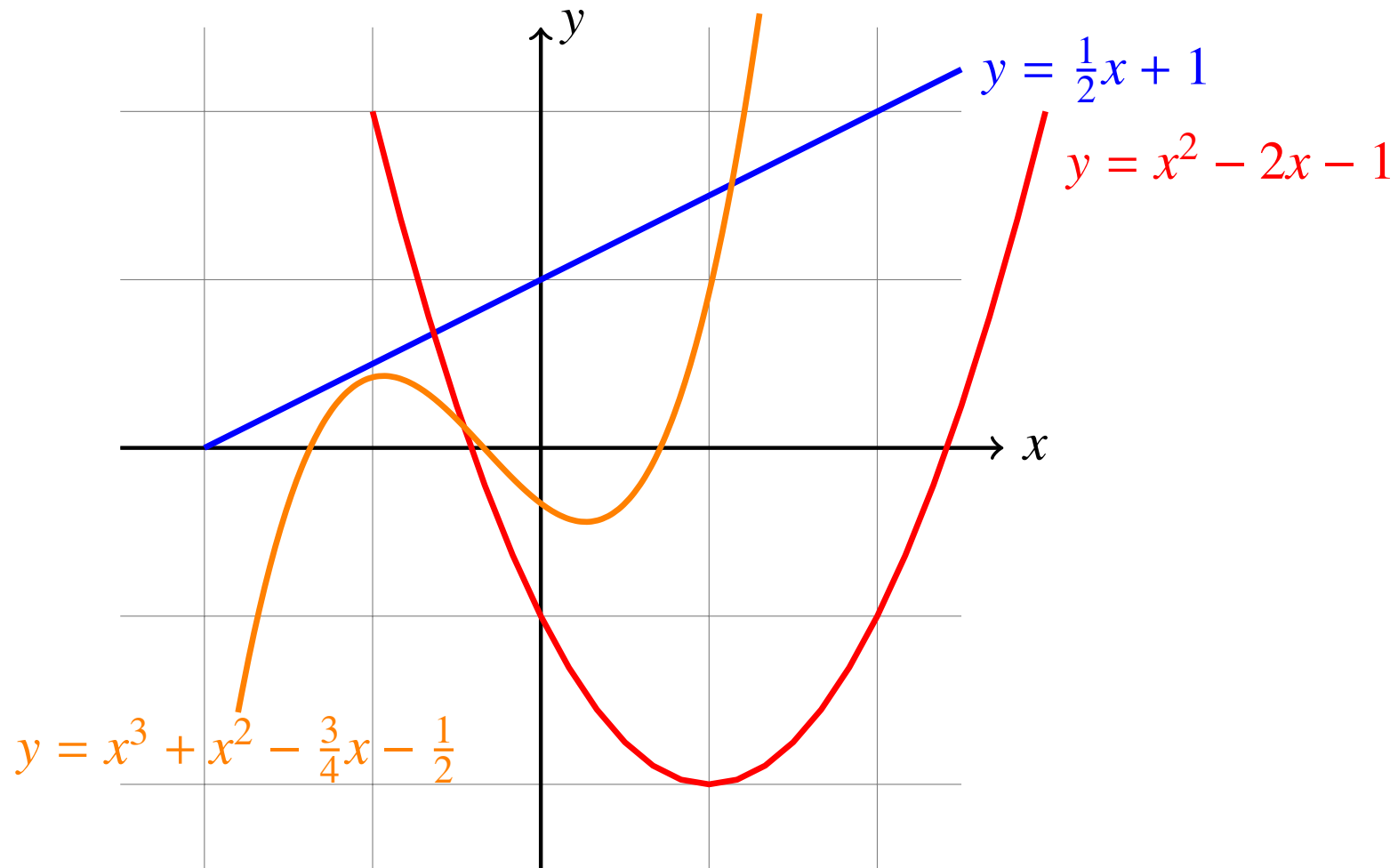
Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



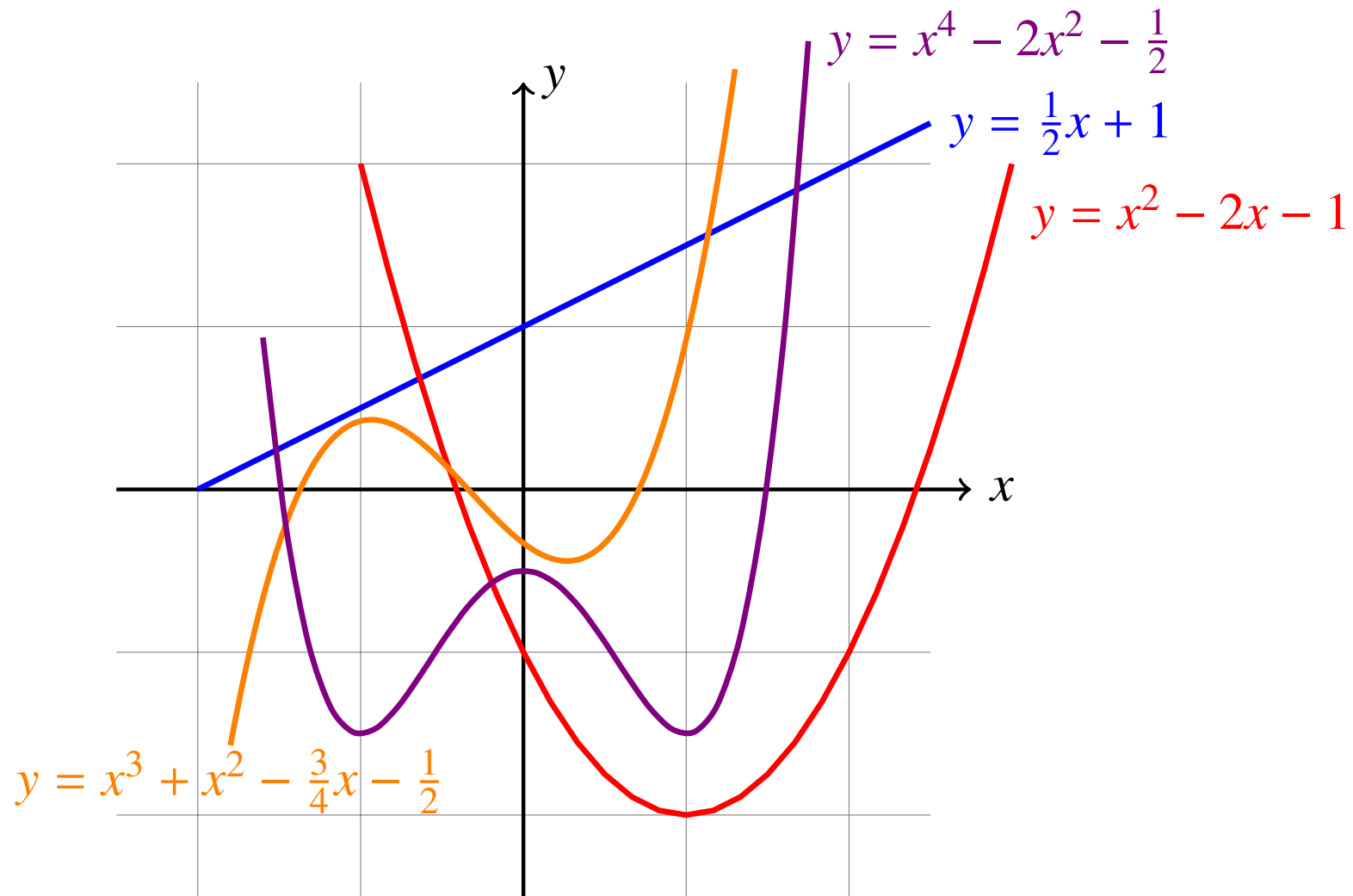
Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



Polinomfüggvény kiszámítása Horner-elrendezéssel

- Mivel a polinomfüggvények rendkívül fontos szereppel bírnak, így lényeges a gyors és pontos kiszámításuk.
- A **Horner-elrendezésben** egy n -edfokú polinomfüggvényt n db összeadás és szorzás alkalmazásával ki tudunk számolni.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
 &= (((a_n x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &= (((\underbrace{a_n}_{c_{n-1}=a_n} x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_{n-2}=c_{n-1}x+a_{n-1}\cdots} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_1=c_2x+a_2} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_0=c_1x+a_1} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{d=c_0x+a_0=f(x)}
 \end{aligned}$$

Táblázattal:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x \rightarrow$	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_1	c_0	$d \rightarrow f(x)$

Polinomfüggvény kiszámítása Horner-elrendezéssel

- Mivel a polinomfüggvények rendkívül fontos szereppel bírnak, így lényeges a gyors és pontos kiszámításuk.
- A **Horner-elrendezésben** egy n -edfokú polinomfüggvényt n db összeadás és szorzás alkalmazásával ki tudunk számolni.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
 &= (((a_n x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &= (((\underbrace{a_n}_{c_{n-1}=a_n} x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_{n-2}=c_{n-1}x+a_{n-1}\cdots} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_1=c_2x+a_2} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_0=c_1x+a_1} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{d=c_0x+a_0=f(x)}
 \end{aligned}$$

Táblázattal:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x \rightarrow$	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_1	c_0	$d \rightarrow f(x)$

Polinomfüggvény kiszámítása Horner-elrendezéssel

- Mivel a polinomfüggvények rendkívül fontos szereppel bírnak, így lényeges a gyors és pontos kiszámításuk.
- A **Horner-elrendezésben** egy n -edfokú polinomfüggvényt n db összeadás és szorzás alkalmazásával ki tudunk számolni.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
 &= (((a_n x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &= (((\overbrace{a_n}^{c_{n-1}=a_n} x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_{n-2}=c_{n-1}x+a_{n-1}\cdots} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_1=c_2x+a_2} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_0=c_1x+a_1} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{d=c_0x+a_0=f(x)}
 \end{aligned}$$

Táblázattal:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x \rightarrow$	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_1	c_0	$d \rightarrow f(x)$

Polinomfüggvény kiszámítása Horner-elrendezéssel

- Mivel a polinomfüggvények rendkívül fontos szereppel bírnak, így lényeges a gyors és pontos kiszámításuk.
- A **Horner-elrendezésben** egy n -edfokú polinomfüggvényt n db összeadás és szorzás alkalmazásával ki tudunk számolni.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
 &= (((a_n x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &= (((\underbrace{a_n}_{c_{n-1}=a_n} x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_{n-2}=c_{n-1}x+a_{n-1}\cdots} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_1=c_2x+a_2} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_0=c_1x+a_1} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{d=c_0x+a_0=f(x)}
 \end{aligned}$$

Táblázattal:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x \rightarrow$	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_1	c_0	$d \rightarrow f(x)$

Polinomfüggvény kiszámítása Horner-elrendezéssel

- Mivel a polinomfüggvények rendkívül fontos szereppel bírnak, így lényeges a gyors és pontos kiszámításuk.
- A **Horner-elrendezésben** egy n -edfokú polinomfüggvényt n db összeadás és szorzás alkalmazásával ki tudunk számolni.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
 &= (((a_n x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &= (((\underbrace{a_n}_{c_{n-1}=a_n} x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_{n-2}=c_{n-1}x+a_{n-1}\cdots} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_1=c_2x+a_2} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_0=c_1x+a_1} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{d=c_0x+a_0=f(x)}
 \end{aligned}$$

Táblázattal:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x \rightarrow$	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_1	c_0	$d \rightarrow f(x)$

Polinomfüggvény kiszámítása Horner-elrendezéssel

- Mivel a polinomfüggvények rendkívül fontos szereppel bírnak, így lényeges a gyors és pontos kiszámításuk.
- A **Horner-elrendezésben** egy n -edfokú polinomfüggvényt n db összeadás és szorzás alkalmazásával ki tudunk számolni.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
 &= (((a_n x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &= (((\overbrace{a_n}^{c_{n-1}=a_n} x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_{n-2}=c_{n-1}x+a_{n-1}\cdots} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_1=c_2x+a_2} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_0=c_1x+a_1} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{d=c_0x+a_0=f(x)}
 \end{aligned}$$

Táblázattal:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x \rightarrow$	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_1	c_0	$d \rightarrow f(x)$

Polinomfüggvény kiszámítása Horner-elrendezéssel

- Mivel a polinomfüggvények rendkívül fontos szereppel bírnak, így lényeges a gyors és pontos kiszámításuk.
- A **Horner-elrendezésben** egy n -edfokú polinomfüggvényt n db összeadás és szorzás alkalmazásával ki tudunk számolni.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
 &= (((a_n x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &= (((\underbrace{a_n}_{c_{n-1}=a_n} x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_{n-2}=c_{n-1}x+a_{n-1}\cdots} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_1=c_2x+a_2} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_0=c_1x+a_1} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{d=c_0x+a_0=f(x)}
 \end{aligned}$$

Táblázattal:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x \rightarrow$	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_1	c_0	$d \rightarrow f(x)$

Polinomfüggvény kiszámítása Horner-elrendezéssel

- Mivel a polinomfüggvények rendkívül fontos szereppel bírnak, így lényeges a gyors és pontos kiszámításuk.
- A **Horner-elrendezésben** egy n -edfokú polinomfüggvényt n db összeadás és szorzás alkalmazásával ki tudunk számolni.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
 &= (((a_n x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &= (((\underbrace{a_n}_{c_{n-1}=a_n} x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0 \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_{n-2}=c_{n-1}x+a_{n-1}\cdots} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_1=c_2x+a_2} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{c_0=c_1x+a_1} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{d=c_0x+a_0=f(x)}
 \end{aligned}$$

Táblázattal:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
$x \rightarrow$	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_1	c_0	$d \rightarrow f(x)$

Példa a Horner-elrendezés alkalmazására

Tekintsük a

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 11 \\ &= (((2x - 4)x - 5)x + 7)x + 11 \end{aligned}$$

polinomfüggvény értékét $x = 2$ helyettesítés mellett.

Emlékeztetőül:

- A táblázat felső sora az f együtthatóit tartalmazza.
- Az alsó sorban $c_{n-1} = a_n$ és a k -dik lépésben

$$\begin{array}{c|c} & a_k \\ \hline c_k & c_{k-1} = c_k x + a_k \end{array}$$

Ezért

2	-4	-5	7	11
$x = 2 \rightarrow 2$	0	-5	-3	$5 \rightarrow f(2)$

(William George Horner (1786-1837) angol matematikus.)

Példa a Horner-elrendezés alkalmazására

Tekintsük a

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 11 \\ &= (((2x - 4)x - 5)x + 7)x + 11 \end{aligned}$$

polinomfüggvény értékét $x = 2$ helyettesítés mellett.

Emlékeztetőül:

- A táblázat felső sora az f együtthatóit tartalmazza.
- Az alsó sorban $c_{n-1} = a_n$ és a k -dik lépésben

$$\begin{array}{c|c} & a_k \\ \hline c_k & c_{k-1} = c_k x + a_k \end{array}$$

Ezért

2	-4	-5	7	11
$x = 2 \rightarrow 2$	0	-5	-3	$5 \rightarrow f(2)$

(William George Horner (1786-1837) angol matematikus.)

Példa a Horner-elrendezés alkalmazására

Tekintsük a

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 11 \\ &= (((2x - 4)x - 5)x + 7)x + 11 \end{aligned}$$

polinomfüggvény értékét $x = 2$ helyettesítés mellett.

Emlékeztetőül:

- A táblázat felső sora az f együtthatóit tartalmazza.
- Az alsó sorban $c_{n-1} = a_n$ és a k -dik lépésben

$$\begin{array}{c|c} & a_k \\ \hline c_k & c_{k-1} = c_k x + a_k \end{array}$$

Ezért

2	-4	-5	7	11
$x = 2 \rightarrow 2$	0	-5	-3	$5 \rightarrow f(2)$

(William George Horner (1786-1837) angol matematikus.)

Példa a Horner-elrendezés alkalmazására

Tekintsük a

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 11 \\ &= (((2x - 4)x - 5)x + 7)x + 11 \end{aligned}$$

polinomfüggvény értékét $x = 2$ helyettesítés mellett.

Emlékeztetőül:

- A táblázat felső sora az f együtthatóit tartalmazza.
- Az alsó sorban $c_{n-1} = a_n$ és a k -dik lépésben

$$\begin{array}{c|c} & a_k \\ \hline c_k & c_{k-1} = c_k x + a_k \end{array}$$

Ezért

2	-4	-5	7	11
$x = 2 \rightarrow 2$	0	-5	-3	$5 \rightarrow f(2)$

(William George Horner (1786-1837) angol matematikus.)

Példa a Horner-elrendezés alkalmazására

Tekintsük a

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 11 \\ &= (((2x - 4)x - 5)x + 7)x + 11 \end{aligned}$$

polinomfüggvény értékét $x = 2$ helyettesítés mellett.

Emlékeztetőül:

- A táblázat felső sora az f együtthatóit tartalmazza.
- Az alsó sorban $c_{n-1} = a_n$ és a k -dik lépésben

$$\begin{array}{c|c} & a_k \\ \hline c_k & c_{k-1} = c_k x + a_k \end{array}$$

Ezért

2	-4	-5	7	11
$x = 2 \rightarrow 2$	0	-5	-3	$5 \rightarrow f(2)$

(William George Horner (1786-1837) angol matematikus.)

Példa a Horner-elrendezés alkalmazására

Tekintsük a

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 11 \\ &= (((2x - 4)x - 5)x + 7)x + 11 \end{aligned}$$

polinomfüggvény értékét $x = 2$ helyettesítés mellett.

Emlékeztetőül:

- A táblázat felső sora az f együtthatóit tartalmazza.
- Az alsó sorban $c_{n-1} = a_n$ és a k -dik lépésben

$$\begin{array}{c|c} & a_k \\ \hline c_k & c_{k-1} = c_k x + a_k \end{array}$$

Ezért

2	-4	-5	7	11
$x = 2 \rightarrow 2$	0	-5	-3	5 $\rightarrow f(2)$

(William George Horner (1786-1837) angol matematikus.)

Példa a Horner-elrendezés alkalmazására

Tekintsük a

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 7x + 11 \\ &= (((2x - 4)x - 5)x + 7)x + 11 \end{aligned}$$

polinomfüggvény értékét $x = 2$ helyettesítés mellett.

Emlékeztetőül:

- A táblázat felső sora az f együtthatóit tartalmazza.
- Az alsó sorban $c_{n-1} = a_n$ és a k -dik lépésben

$$\begin{array}{c|c} & a_k \\ \hline c_k & c_{k-1} = c_k x + a_k \end{array}$$

Ezért

2	-4	-5	7	11
$x = 2 \rightarrow 2$	0	-5	-3	$5 \rightarrow f(2)$

(William George Horner (1786-1837) angol matematikus.)

Alapműveletek polinomfüggvényekkel

Legyen $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ polinomfüggvény, $a_n \neq 0$. Ekkor a_n -et az f **főegyütthatójának** nevezzük. Az f fokszámát **$\deg(f)$ -el** jelöljük. A konstans $f(x) \equiv 0$ polinomfüggvény esetén a fokszám nem értelmezett.

Állítás: Polinomfüggvények összege és szorzata

- A polinomfüggvények halmaza **zárt** a pontonkénti összeadás és a szorzás műveleteire.
- Legyenek f, g polinomfüggvények. Ekkor

$$\deg(f \pm g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\} \text{ és } \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g).$$

Biz. Házi feladat. □

Megjegyzés. Világos, hogy két polinomfüggvény **hányadosa** nem feltétlenül polinomfüggvény. Így aztán van értelme polinomfüggvények **oszthatóságáról** beszélni: Azt mondjuk, hogy az f pfv. **osztható** a g pfv.-el, ha $\exists h$ pfv., melyre $f(x) = g(x)h(x)$.

Polinomfüggvény maradékos osztása Horner-eljárással

Állítás: Polinomfüggvény maradékos osztása

Legyen $f(x)$ polinomfüggvény és $b \in \mathbb{R}$ valós szám. Ekkor létezik $q(x)$ polinomfüggvény, melyre $f(x) = q(x)(x - b) + f(b)$ teljesül.

Biz. Legyen $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ polinomfüggvény. Gyártsuk le a Horner-eljárással az $x = b$ helyettesítéshez tartozó $c_{n-1}, \dots, c_0$ számokat:

$$c_{n-1} = a_n, \quad c_{n-2} = c_{n-1}b + a_{n-1}, \dots, \quad c_0 = c_1b + a_1 \text{ és } f(b) = c_0b + a_0.$$

Definiáljuk a $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$ polinomfüggvényt. Ekkor

$$\begin{aligned} q(x)(x - b) &= (c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_1x + c_0)(x - b) \\ &= c_{n-1}x^n + (c_{n-2} - bc_{n-1})x^{n-1} + \dots + (c_0 - c_1b)x - c_0b \\ &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 - (a_0 + c_0b) \\ &= f(x) - f(b). \quad \square \end{aligned}$$

Polinomfüggvény gyöke és gyöktényezője

Definíció: Polinomfüggvény gyöke

Azt mondjuk, hogy a $b \in \mathbb{R}$ szám **gyöke** az $f(x)$ polinomfüggvénynek, ha $f(b) = 0$ teljesül.

Állítás: A gyöktényező kiemelhetősége

A $b \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak gyöke az f polinomfüggvénynek, ha $f(x) = q(x)(x - b)$ teljesül valamilyen q polinomfüggvényre.

Biz. Először tegyük fel, hogy $f(x) = q(x)(x - b)$ teljesül valamilyen q polinomfüggvényre. Ekkor nyilván $f(b) = q(b)(b - b) = 0$.

Másodjára tegyük fel, hogy b gyöke f -nek, azaz $f(b) = 0$. Az előző állításban megmutattuk, hogy létezik olyan q polinom, amire

$$f(x) = q(x)(x - b) + f(b) = q(x)(x - b)$$

teljesül.



Polinomfüggvény gyöktényezős alakja

Tétel: Polinomfüggvény gyöktényezős alakja

Legyen f n -edfokú polinomfüggvény és $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ az f gyökei. Ekkor $k \leq n$ és

$$f(x) = q(x)(x - b_1) \cdots (x - b_k)$$

egy olyan q polinomfüggvényre, aminek nincs valós gyöke.

Biz. (Teljes indukció n -re.) Ha $n = 0$, akkor $f \not\equiv 0$ konstans és az állítás igaz $k = 0$ -ra és $q = f$ -re. Szintén igaz az állítás, ha f -nek nincs valós gyöke.

Tegyük fel, hogy $n > 0$ és b_1 valós gyöke f -nek. Ekkor $f(x) = g(x)(x - b_1)$ valamely g polinomfüggvényre, és

$$\deg(g) = \deg(f) - 1 < n.$$

Az indukciós hipotézis miatt $g(x) = q(x)(x - b_2) \cdots (x - b_k)$, ahol q -nak nincs valós gyöke. Ez megadja f gyöktényezős alakját.

A $k \leq n$ összefüggés a két oldal fokszámának összehasonlításából adódik. $\square$

A gyöktényezős felbontás következményei

Következmény: Korlát a gyökök számára

Egy n -edfokú polinomfüggvénynek legfeljebb n gyöke van.

A gyöktényezős felbontásban a $b_1, \dots, b_k$ gyökök nem feltétlenül különbözőek. A felbontást szokás

$$f(x) = q(x)(x - c_1)^{m_1} \cdots (x - c_\ell)^{m_\ell}$$

alakban is írni, ahol a $c_1, \dots, c_\ell$ gyökök mind különbözőek. Ekkor azt mondjuk, hogy a c_i gyök multiplicitása m_i .

Tétel: Páratlan fokszerű polinomfüggvény gyökei

Minden páratlan fokszerű polinomfüggvénynek van valós gyöke.

Biz. Az analízis eszközeivel történik.



A másodfokú polinom gyöktényezős felbontása

Tekintsük az

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

általános másodfokú polinomfüggvényt és tfh. a főegyüttható $a \neq 0$. Ekkor

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Definiáljuk az $f(x)$ diszkriminánsát: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ha $\Delta < 0$, akkor $f(x)$ előjele minden $x \in \mathbb{R}$ esetén megegyezik a előjelével, azaz $f(x)$ -nek nincs valós gyöke.

Ha $\Delta \geq 0$, akkor tovább alakítva megkapjuk $f(x)$ gyöktényezős felbontását:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete

Tétel: A másodfokú egyenlet megoldóképlete

Az $ax^2 + bx + c = 0$ általános másodfokú egyenlet megoldóképlete

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad \square$$

Általában, a

$$0 = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

polinomegyenlet **megoldóképletének** nevezzük azokat a kifejezéseket, amelyek az egyenlet gyökeit az **együtthatókból a négy alapművelet és a gyökvonás** segítségével állítják elő.

- Az általános harmad- és negyedfokú polinomegyenletek megoldóképlete jóval bonyolultabb (Cardano- ill. Ferrari-képlet, 1501-1576, 1522-1565.)
- **Abel–Ruffini-tétel:** Az ötöd- és annál magasabb fokú általános polinomegyenletekre **nincs** gyökképlet. (1802-1829, 1765-1822)

Racionális törtfüggvények

Definíció: Racionális törtfüggvények

Az $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ alakú leképezéseket,

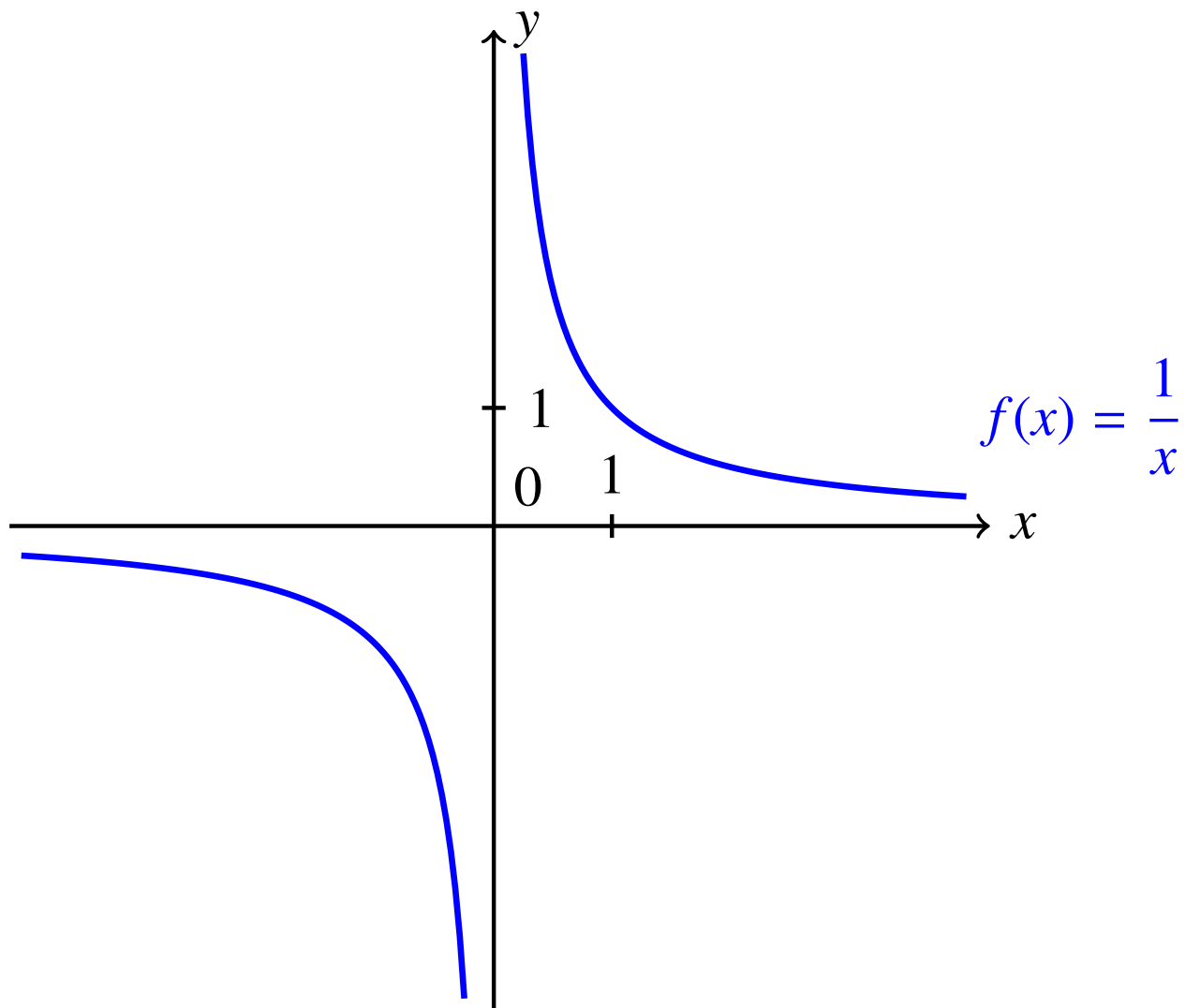
ahol $g(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ és $h(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ polinomfüggvények, **racionális törtfüggvényeknek** nevezzük.

- Mi lesz az $f(x)$ racionális törtfüggvény **értelmezési tartománya**?
- **„Majdnem jó” válasz:** $\mathbb{R} \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$, ahol $c_1, \dots, c_k$ a $h(x)$ nevező gyökei.
- **Baj van**, ha ezek a számlálónak is gyökei. Általában, problémás lehet a tört bővítése és egyszerűsítése. Vajon

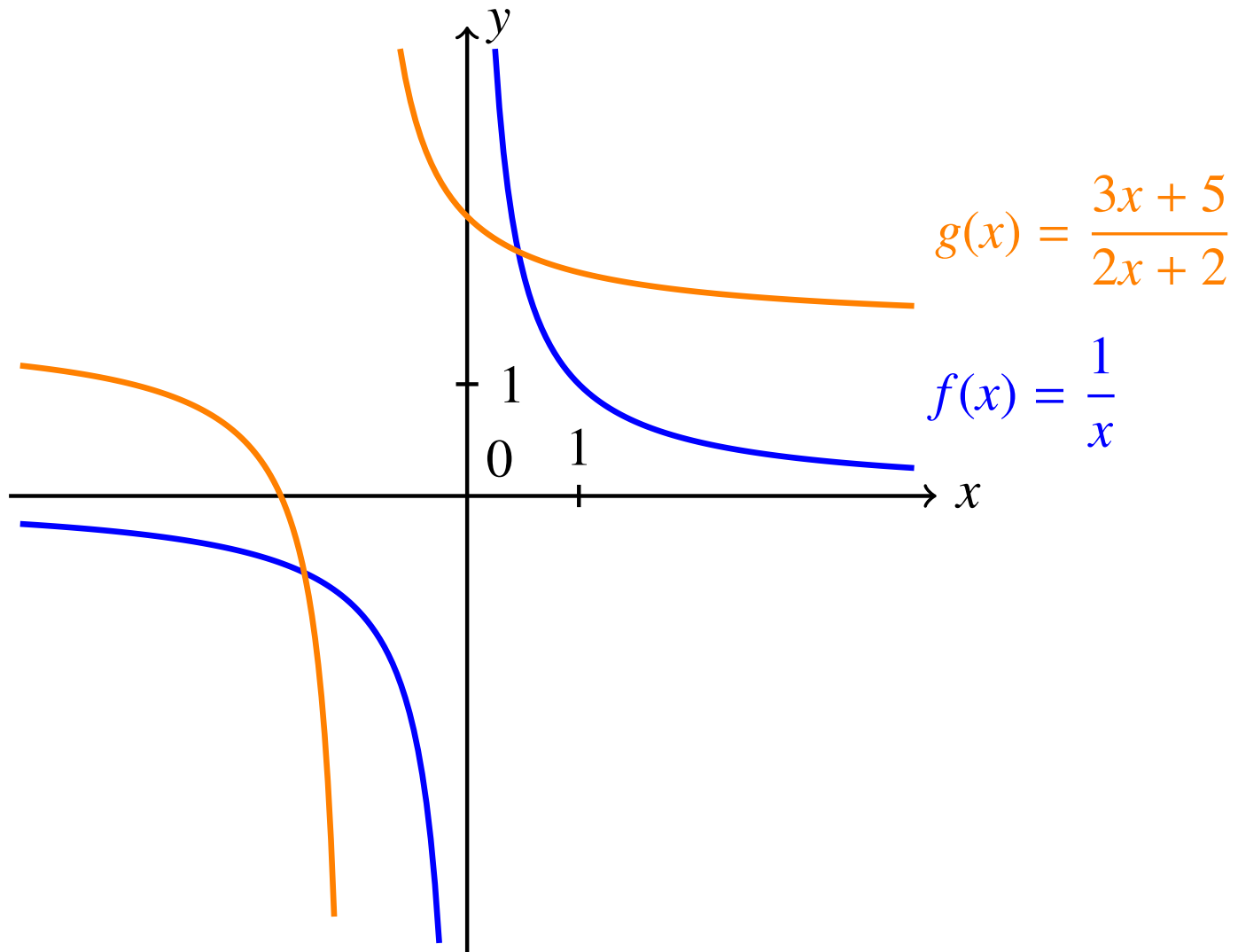
$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1?$$

(Ha igen, akkor mi az értelmezési tartomány?)

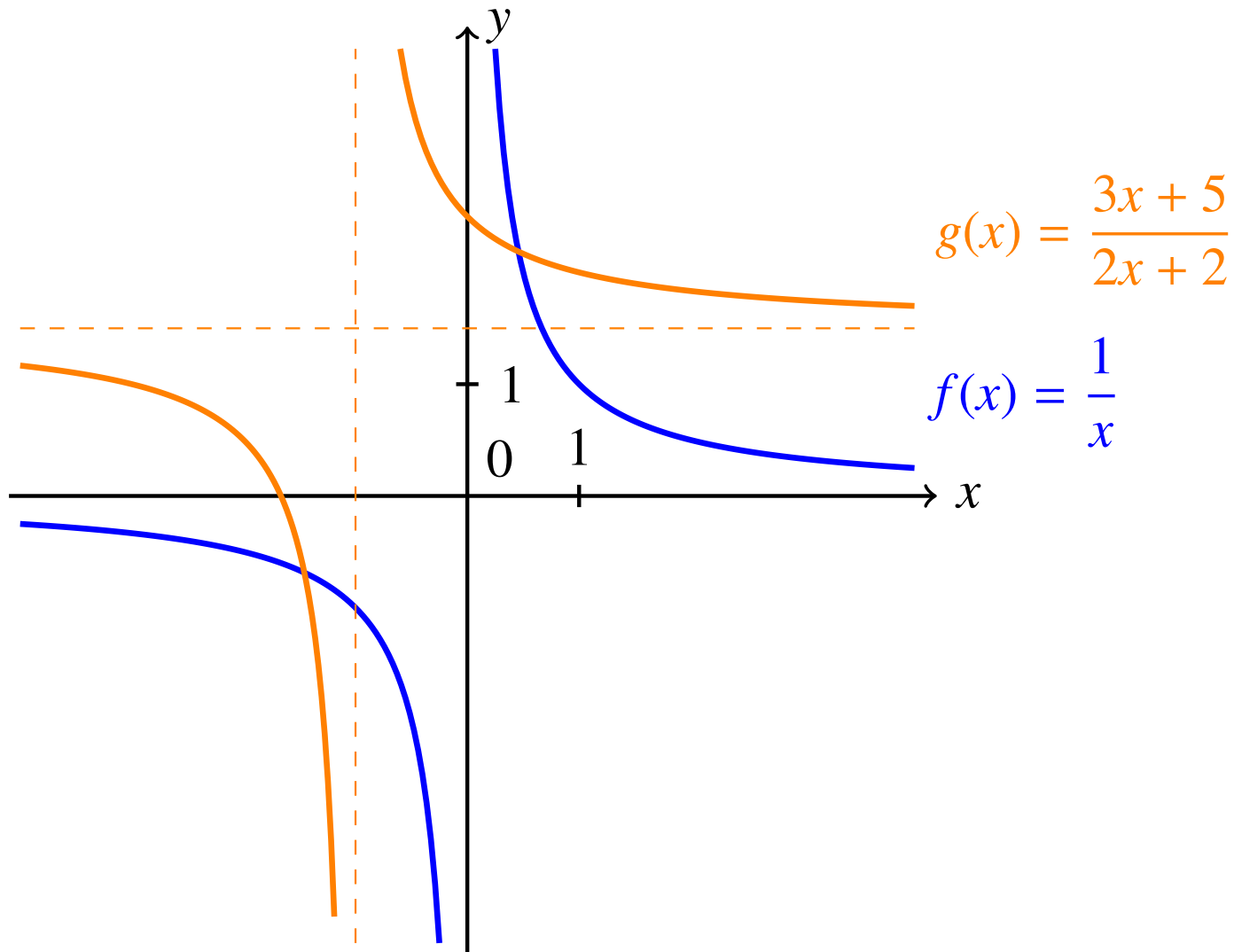
Példák racionális törtfüggvényekre



Példák racionális törtfüggvényekre



Példák racionális törtfüggvényekre



Hatványok és gyökök

Az **egész kitevős** hatványozás alaptulajdonságai:

$$(xy)^n = x^n y^n, \quad x^n x^m = x^{n+m}, \quad (x^n)^m = x^{nm}. \quad (10)$$

Definíció: Valós szám n -dik gyöke

Legyen n egész szám. Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{R}$ valós szám **n -dik gyöke** az az $y \in \mathbb{R}$ valós szám, melyre teljesül **$x = y^n$** .

Amennyiben **n páros**, akkor megköveteljük, hogy **$y \geq 0$** .

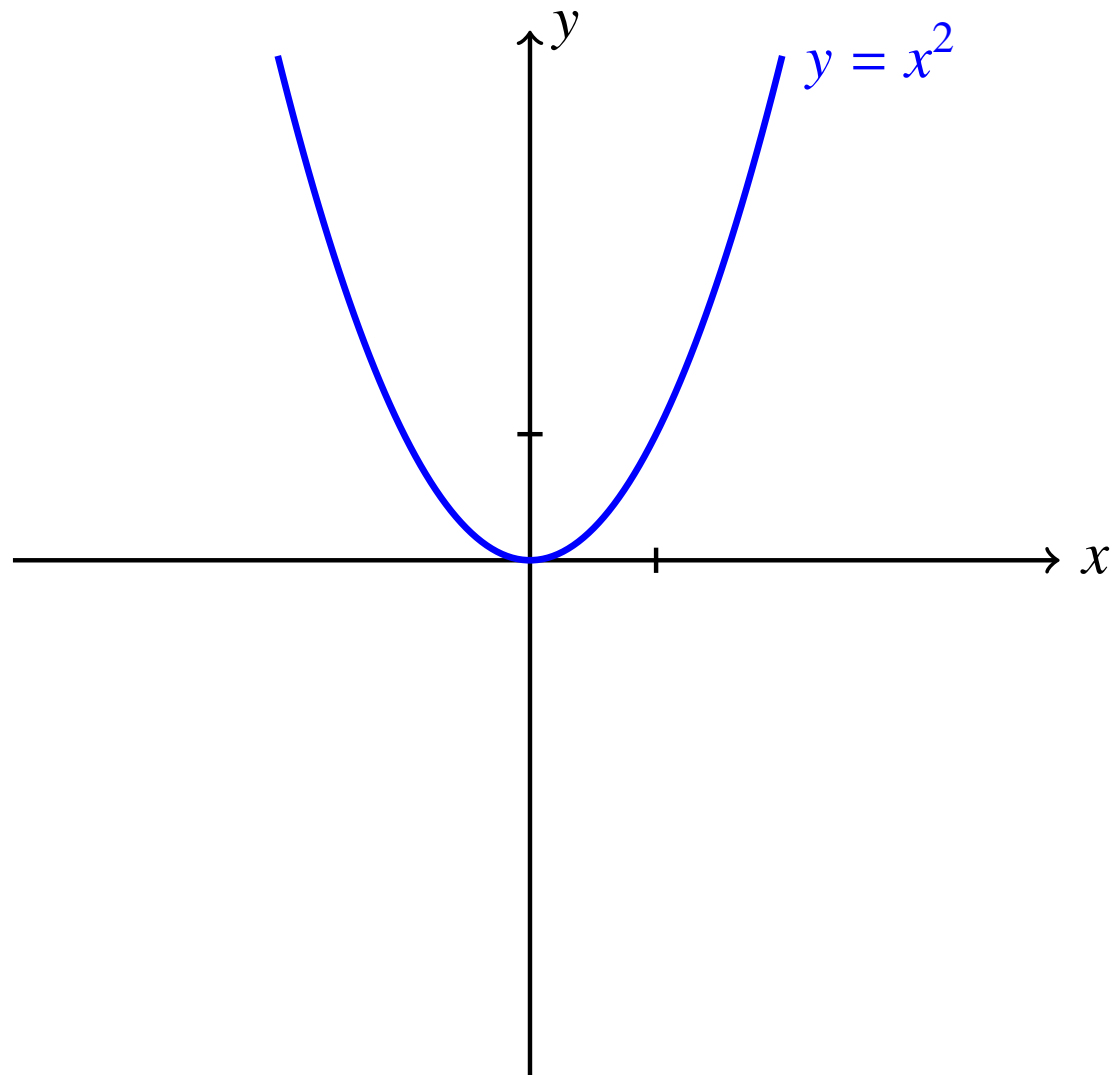
Jelölés: **$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$** .

Állítás: A gyökvonás alaptulajdonságai

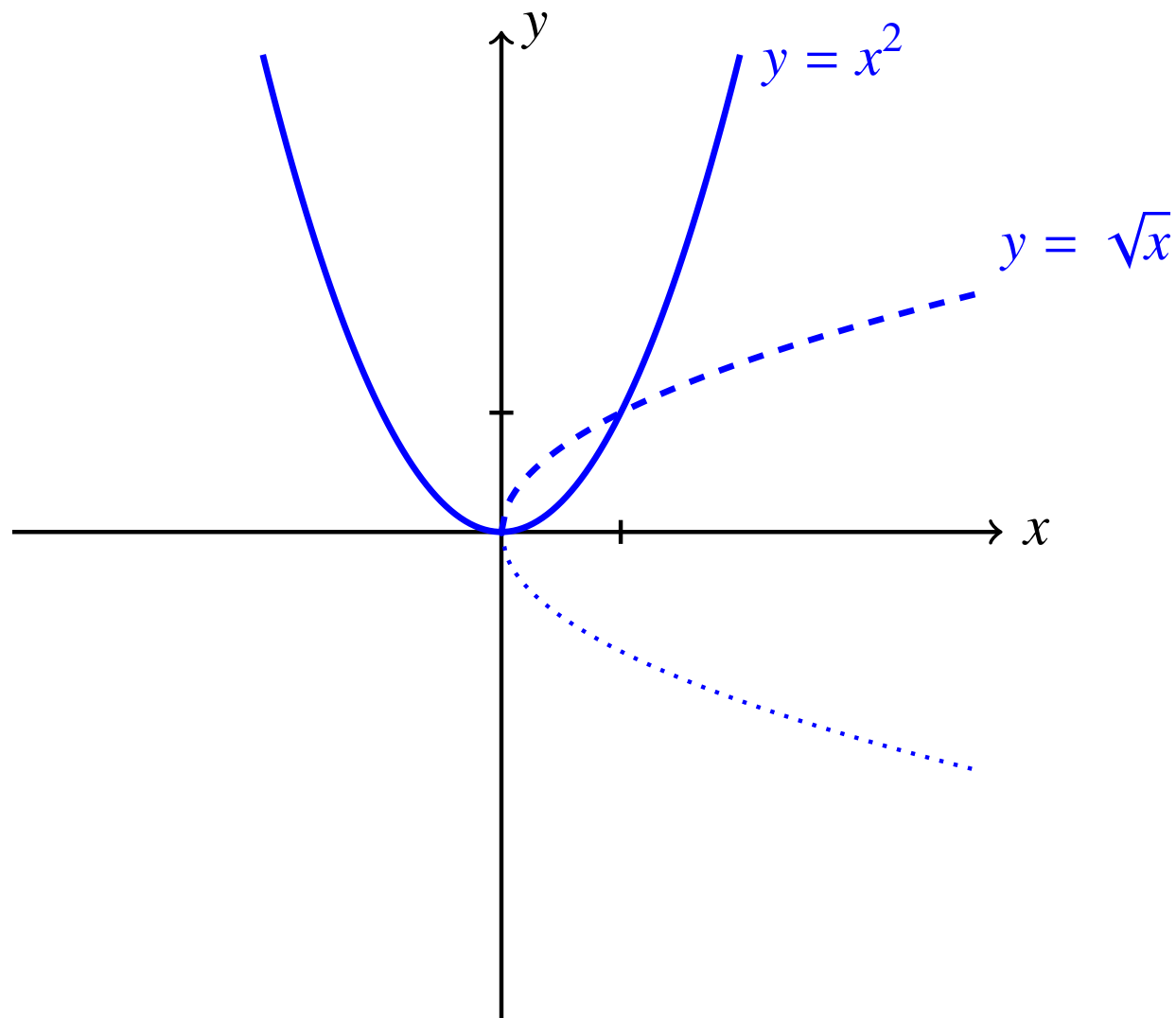
Az **$f(x) = \sqrt[n]{x}$** minden n esetén jól meghatározott függvény, melynek **értelmezési tartománya páratlan n esetén $\mathbb{R}$, páros n esetén pedig $\mathbb{R}_{\geq 0}$** . □

Tetszőleges racionális kitevők esetén teljesülnek a (10) azonosságok.

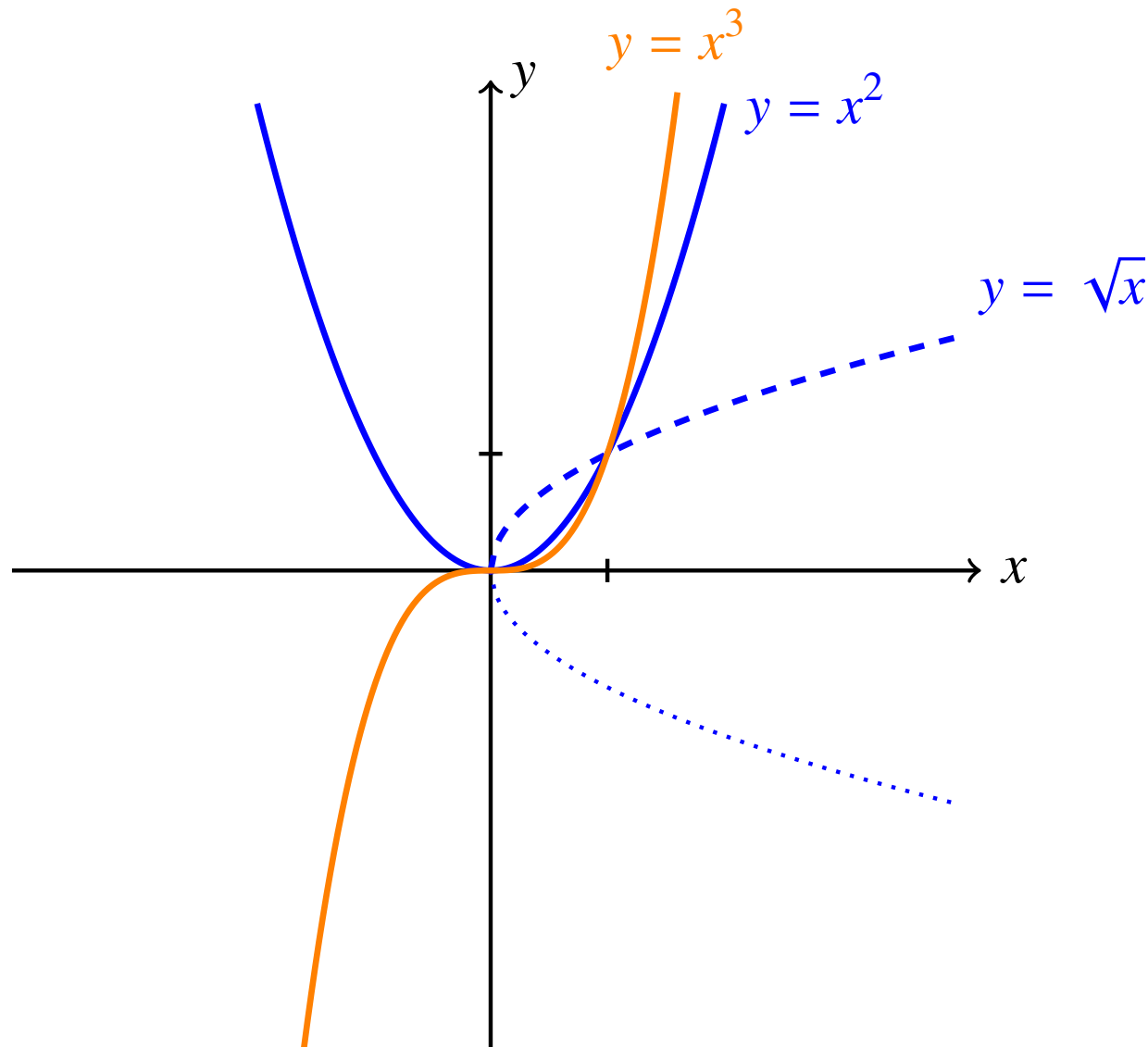
Példák hatvány- és gyökfüggvényekre



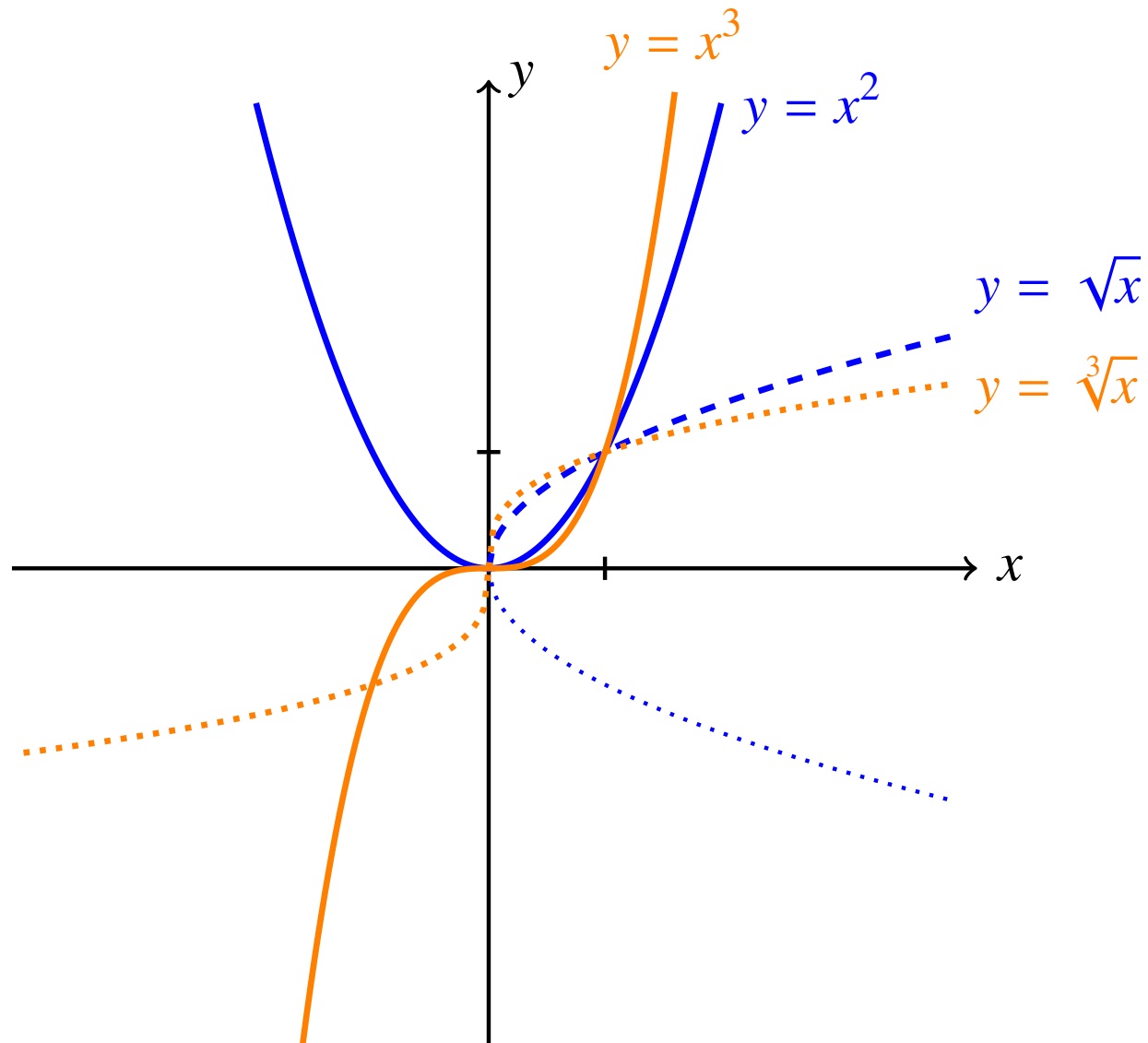
Példák hatvány- és gyökfüggvényekre



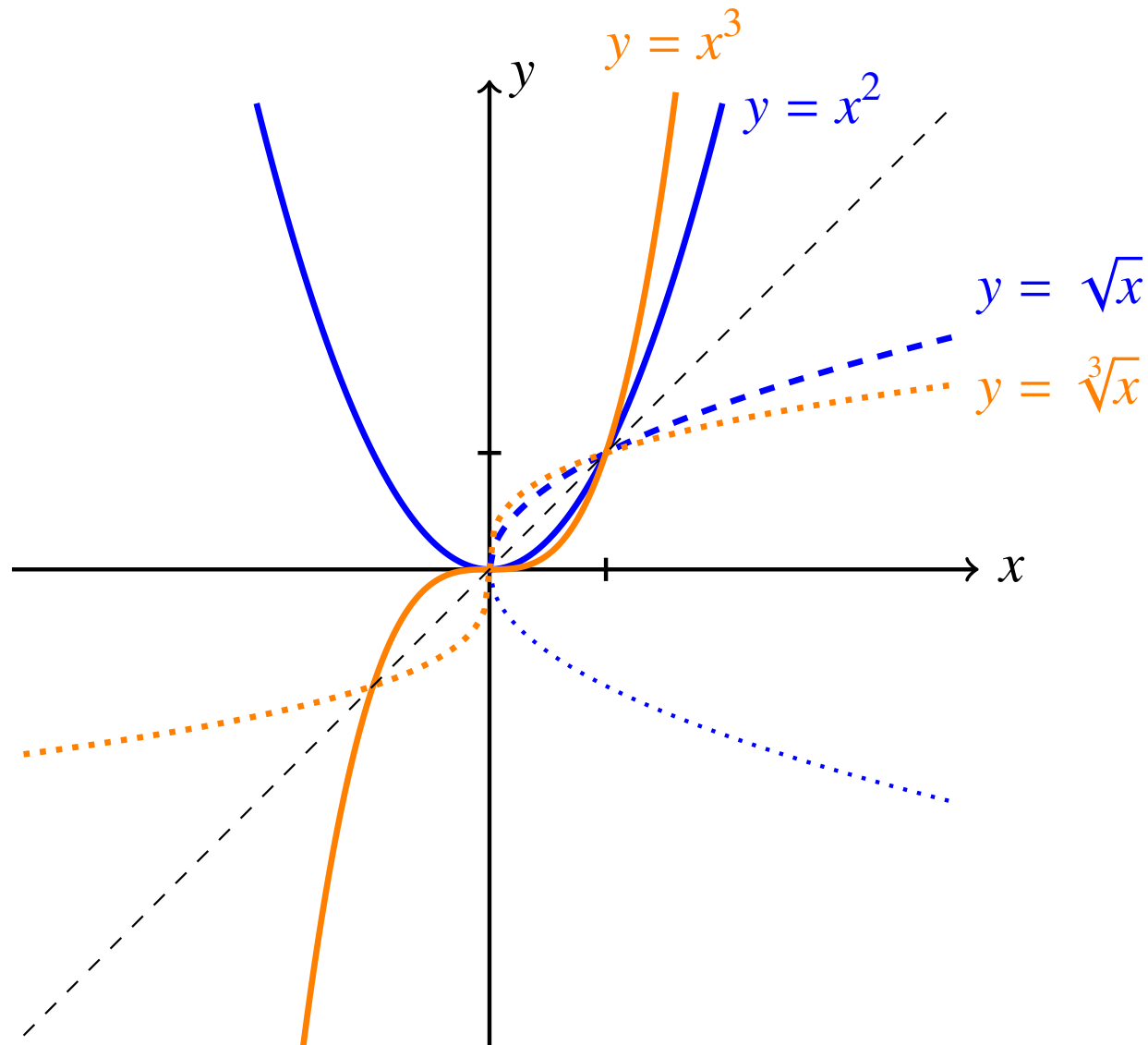
Példák hatvány- és gyökfüggvényekre



Példák hatvány- és gyökfüggvényekre



Példák hatvány- és gyökfüggvényekre



Az exponenciális függvény

Rögzítsünk egy $a > 1$ valós számot; ennek racionális hatványát az $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ kifejezés adja meg.

Feladat

Mutassuk meg, hogy a racionális kitevős hatványozás **szigorúan monoton növekvő**, azaz ha $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$, akkor $a^r < a^s$.

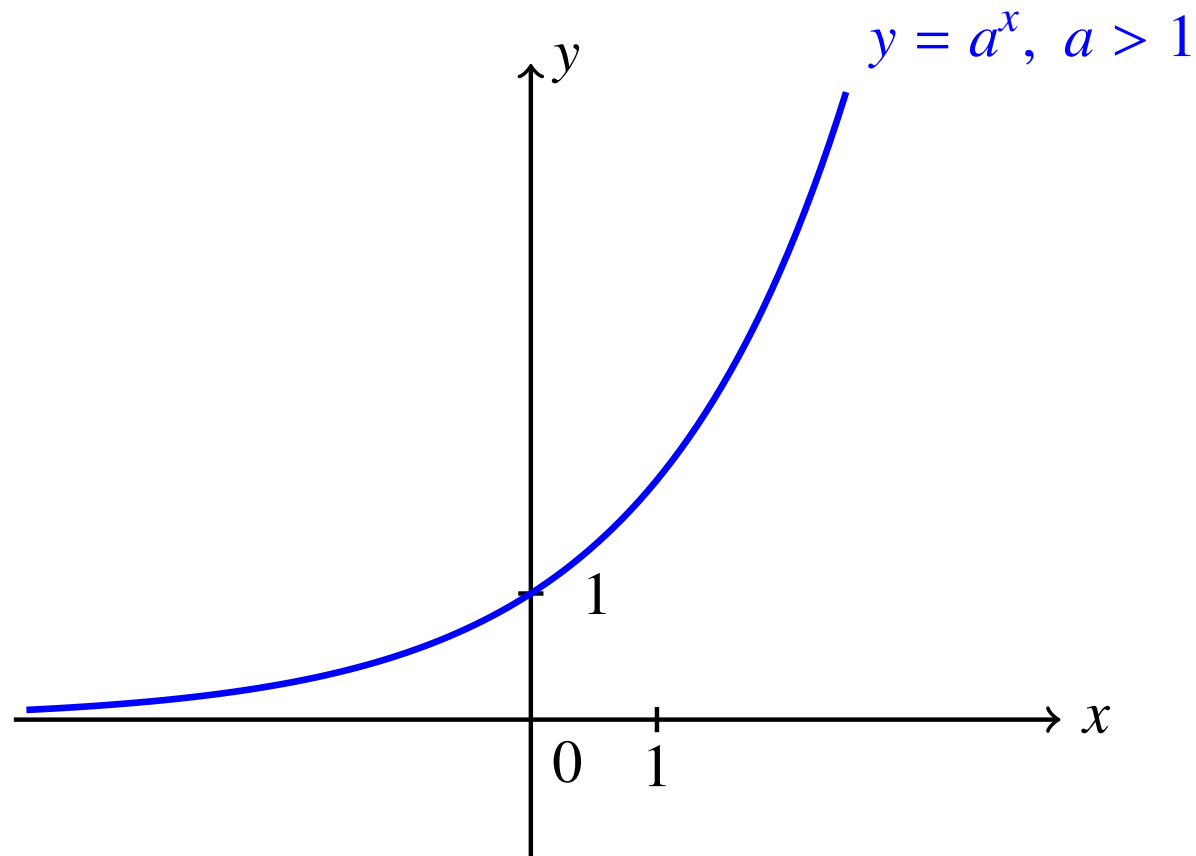
Definíció: Hatványozás valós kitevővel

Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. **Közelítsük x -et alulról és felülről** racionális számok (r_n) , ill. (s_n) sorozatával. Ekkor

$$I_n = [a^{r_n}, a^{s_n}]$$

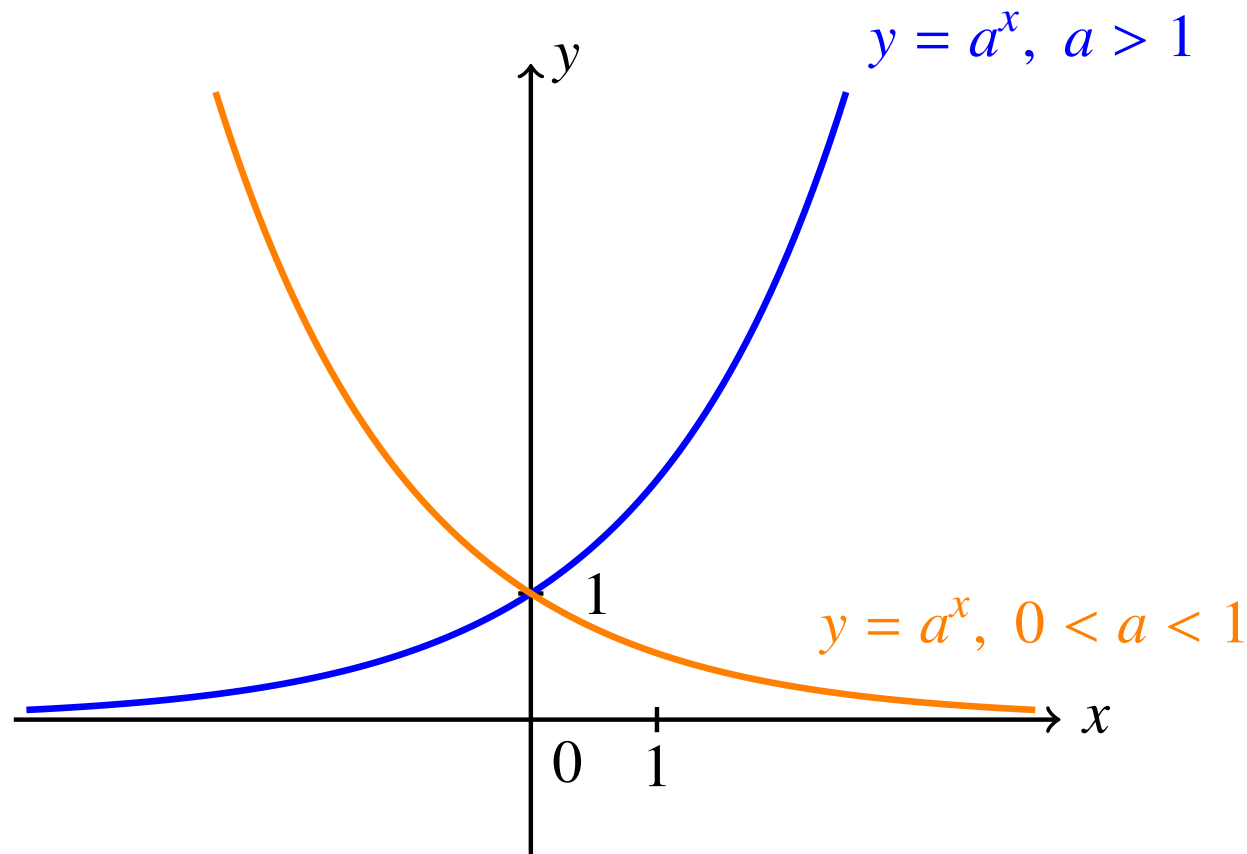
egymásba ágyazott zárt intervallumok sorozata. Ezek (nemüres) **metszete egyetlen b** valós számot tartalmaz. Azt mondjuk, hogy $b = a^x$.

Példák exponenciális függvényekre



Megjegyzés. a -t az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény **alapszámának** nevezzük. Ha $0 < a < 1$, akkor a^x -et **$a^x = (1/a)^{-x}$** -el definiáljuk.

Példák exponenciális függvényekre



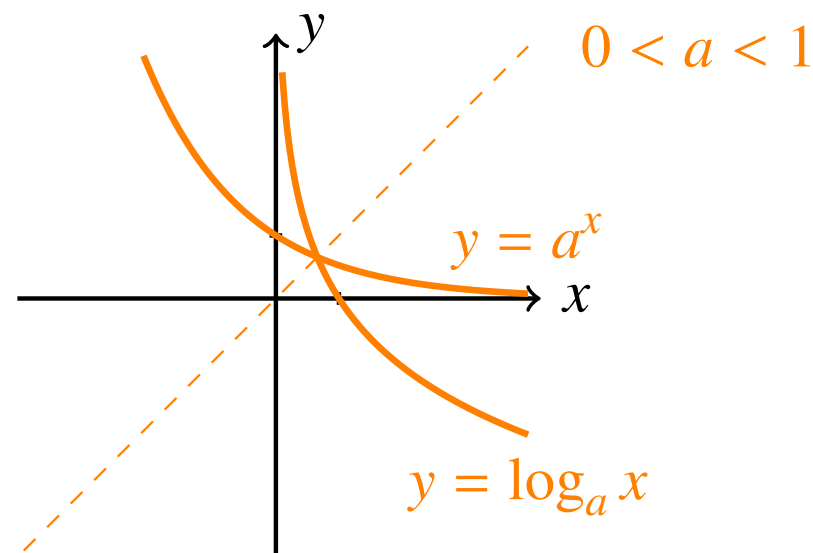
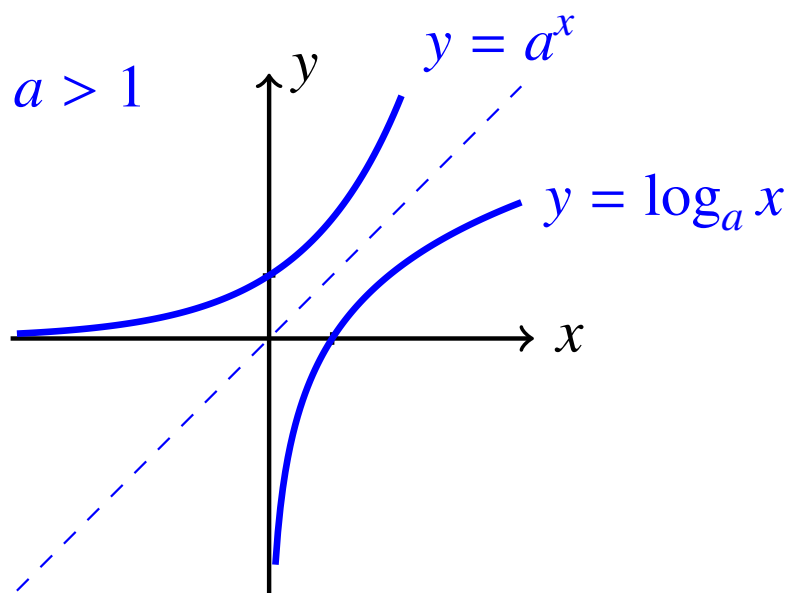
Megjegyzés. a -t az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény **alapszámának** nevezzük. Ha $0 < a < 1$, akkor a^x -et $a^x = (1/a)^{-x}$ -el definiáljuk.

A logaritmus függvény

Legyen továbbra is $a > 1$ valós szám. Az exponenciális függvény monotonitásából következik, hogy $f(x) = a^x$ **bijekciót** határoz meg $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}_{>0}$ között. Ezért beszélhetünk $f(x)$ **inverz függvényéről**.

Definíció: A logaritmus

Azt mondjuk, hogy az $x > 0$ valós szám **a alapú logaritmusa** az az $y \in \mathbb{R}$ valós szám, melyre $x = a^y$ teljesül. Jelöléssel: $y = \log_a(x)$.



A logaritmus és az exponenciális fv. alaptulajdonságai

Tétel: A logaritmus és az exponenciális függvény alaptulajdonságai

Legyenek $x, y, a, b > 0$ valós számok.

- | | |
|---|---|
| (1) $a^x a^y = a^{x+y}.$ | (2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$ |
| (3) $(a^x)^y = a^{xy}.$ | (4) $(ab)^x = a^x b^x.$ |
| (5) $x = a^{\log_a x}.$ | (6) $x = \log_a(a^x).$ |
| (7) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$ | (8) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$ |
| (9) $\log_a(x^u) = u \log_a x.$ | (10) $\log_a x = (\log_b x)(\log_a b).$ |

Biz. Az exp. fv.-re vonatkozó (1)-(4) azonosságok **öröklődnek** az egész ill. a racionális kitevős hatványozástól. Az (5) és (6) azonosságok a logaritmus (és az inverz fv. fogalmának) **definíciója**.

(7) következik (1)-ből: Legyen $u = \log_a x$, $v = \log_a y$, azaz $x = a^u$ és $y = a^v$. Ekkor $xy = a^{u+v}$, azaz $\log_a(xy) = u + v$. (7)-ből adódik (8). (9)-hez írjunk $v = \log_a x$ -et; ekkor (3) szerint $x^u = (a^v)^u = a^{uv}$, azaz $\log_a(x^u) = uv$.

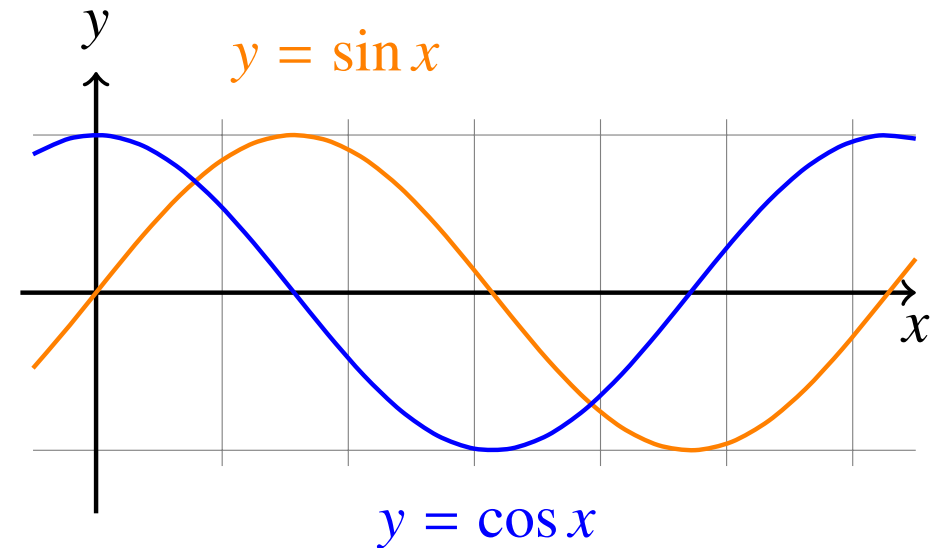
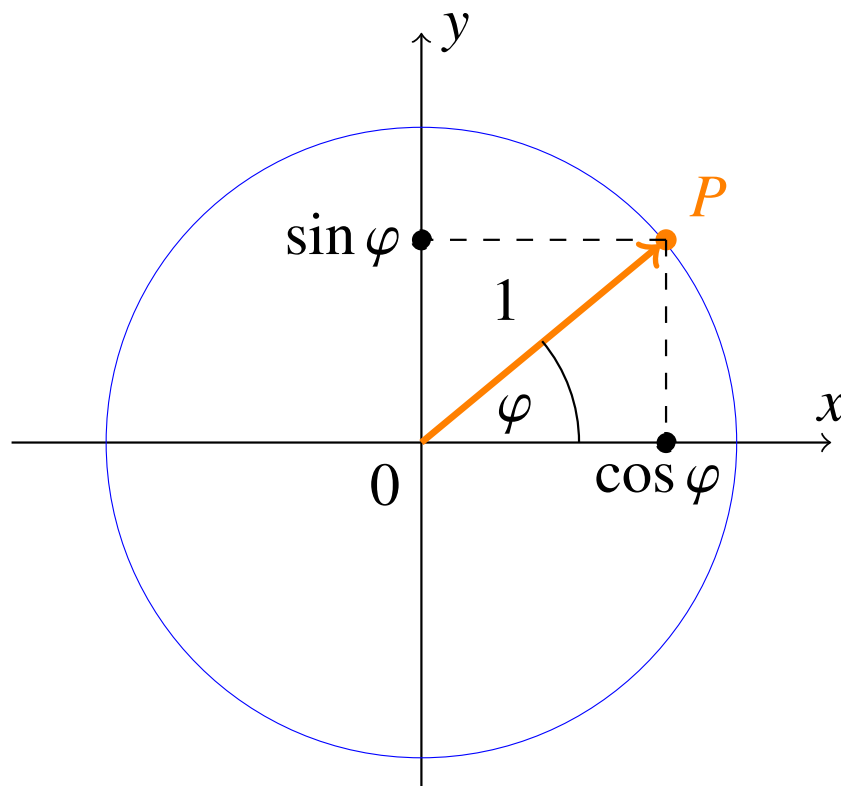
Végül (9) $\Rightarrow$ (10): $(\log_b x)(\log_a b) = \log_a(b^{\log_b x}) = \log_a x$.



Trigonometrikus függvények: szinusz, koszinusz

Definíció: Szinusz, koszinusz függvények

Legyen P az x -tengellyel φ szöget bezáró **egységvektor** végpontja. Ekkor P vetületei az x - illetve y -tengelyre **$\cos \varphi$** , illetve **$\sin \varphi$** .



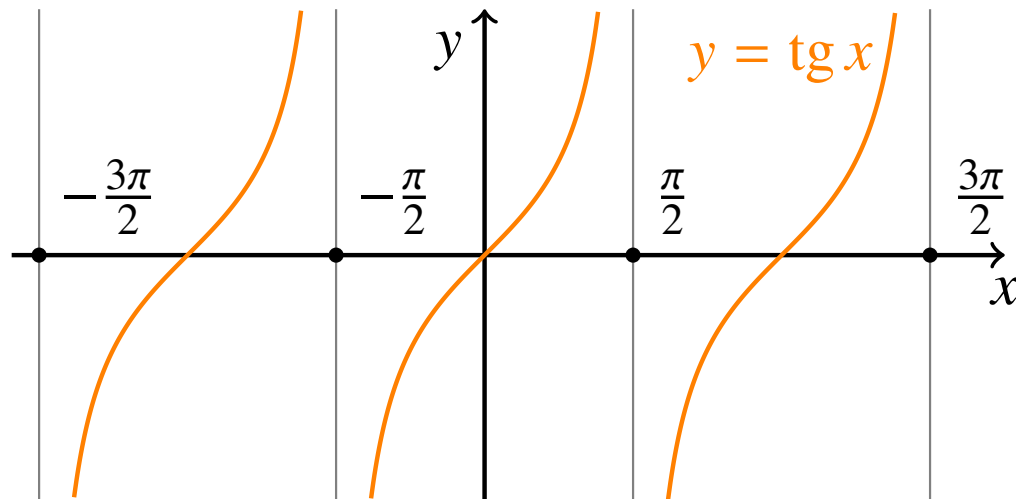
Trigonometrikus függvények: tangens, kotangens

Definíció: Tangens, kotangens

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x},$$

ahol a tangens függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, a kotangensé pedig $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Megj. Használatos még a $\tan x$, $\cot x$ jelölés is, különösen angol nyelvi környezetben.



A trigonometrikus függvények alaptulajdonságai

Tétel: A trigonometrikus függvények alaptulajdonságai

Minden $x \in \mathbb{R}$ számra teljesülnek az alábbiak:

- ① $\sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x.$
- ② $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x.$
- ③ $\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x.$
- ④ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x.$
- ⑤ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$



Az (1), (2) és (3)-beli tulajdonságokat külön definiáljuk.

Definíció: Függvények periodicitása

Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény **periódikus** $d > 0$ **periódussal**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra teljesül $f(x + d) = f(x)$.

Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **páros** (illetve **páratlan**) ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra $f(-x) = f(x)$ (illetve $f(-x) = -f(x)$).

A trigonometrikus függvények inverzei

Vegyük észre, hogy az alábbi trigonometrikus függvények **bijekciót** határoznak meg itt megadott halmazok között.

① $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1].$

② $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1].$

③ $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}.$

④ $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}.$

A **megfelelő értelmezési tartományokon** definiálhatjuk a trigonometrikus függvények **inverzét**:

① $\sin^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$

② $\cos^{-1} = \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$

③ $\operatorname{tg}^{-1} = \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$

④ $\operatorname{ctg}^{-1} = \operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi).$

Ejtsd: arkusz szinusz, arkusz koszinusz, stb.

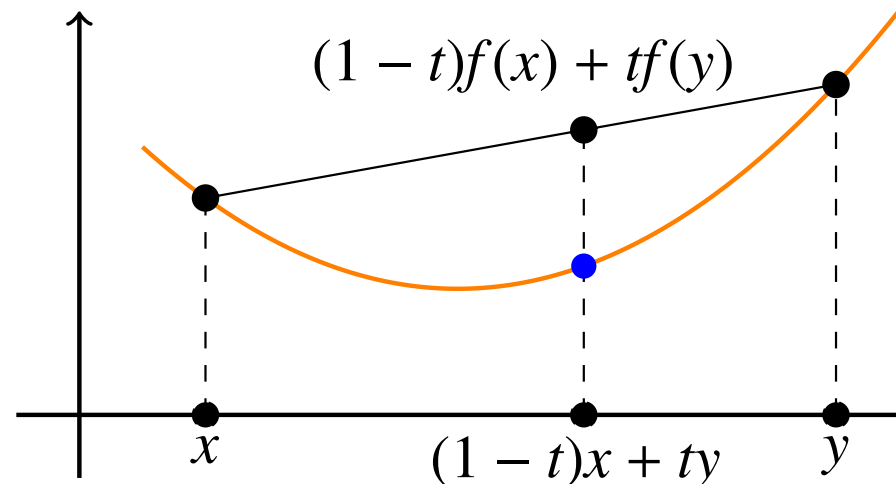
További függvénytulajdonságok

Definíció: Korlátosság, konvexség (konkávság)

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény. Azt mondjuk, hogy

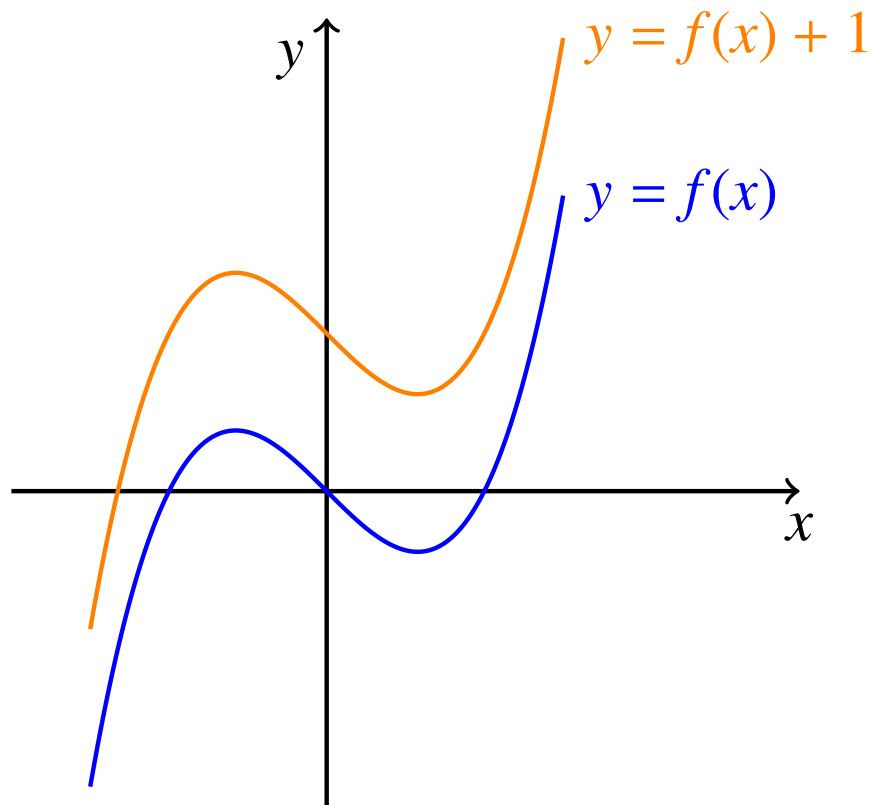
- 1 f **korlátos**, ha $\exists K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, melyre $|f(x)| \leq K$ teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
- 2 f **felülről** (illetve **alulról**) **korlátos**, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, melyre $f(x) \leq K$ (illetve $f(x) \geq K$) teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
- 3 f **konvex**, ha minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $t \in [0, 1]$ esetén

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$



Lineáris függvénytranszformációk: Függőleges eltolások

Hasonlítsuk össze az $f(x) = x^3 - x$ és a $g(x) = x^3 - x + 1$ függvények grafikonjait:



Állítás:

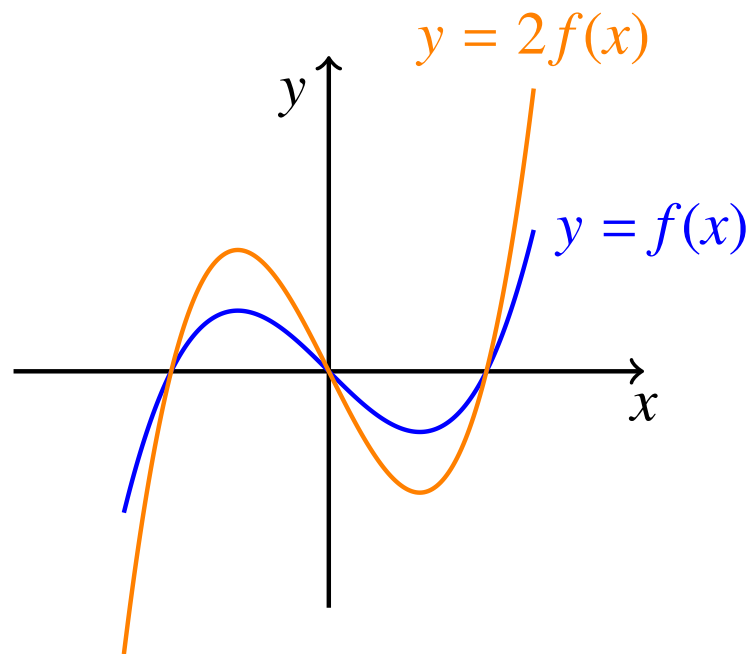
Függvényérték-transzformációk I.

Az $f(x) \mapsto f(x) + d$ típusú függvénytranszformációk az $f(x)$ grafikonjának d egységgel történő eltolásának felelnek meg az y -tengellyel párhuzamosan.



Lineáris függvénytranszformációk: Függőleges nyújtások

Hasonlítsuk össze az $f(x) = x^3 - x$ és a $g(x) = 2(x^3 - x)$ függvények grafikonjait:



Állítás:

Függvényérték-transzformációk II.

Az $f(x) \mapsto df(x)$ típusú függvénytranszformációk az $f(x)$ grafikonjának d arányú nyújtásának felelnek meg az y -tengellyel párhuzamosan.

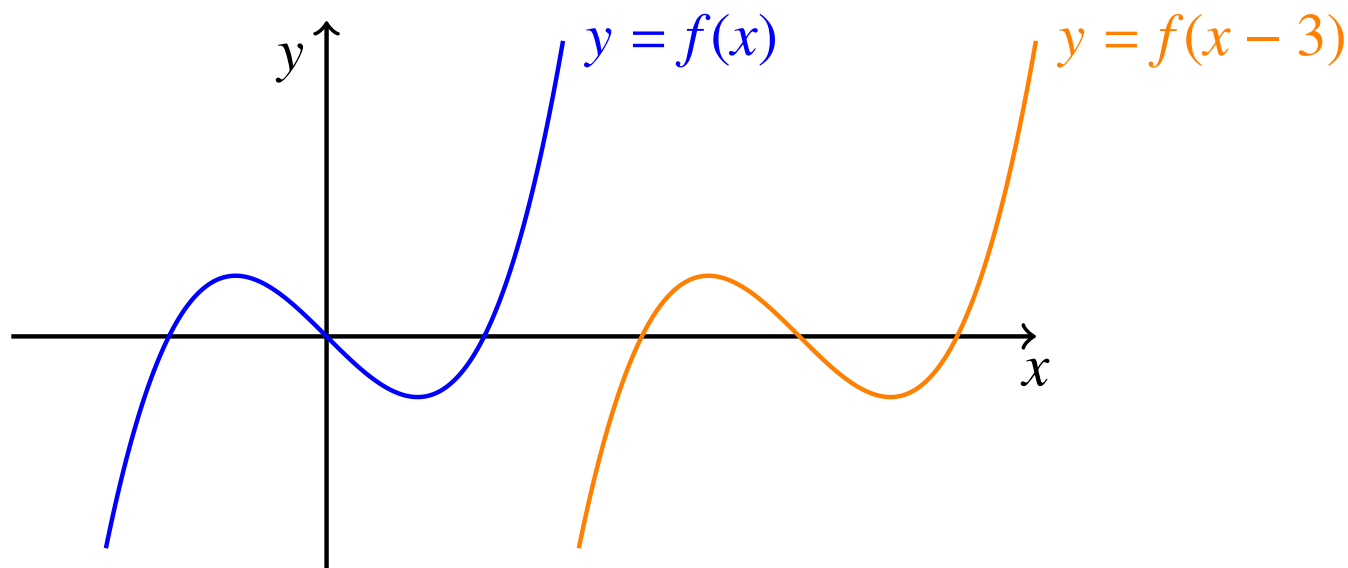


Lineáris függvénytranszformációk: Vízszintes eltolások

Hasonlítsuk össze az $f(x) = x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$ és a $g(x) = f(x - 3) = (x - 3)^3 - (x - 3) = (x - 3)(x - 4)(x - 2)$ függvények gyökeit: $-1, 0, 1$, illetve $2, 3, 4$. Általában:

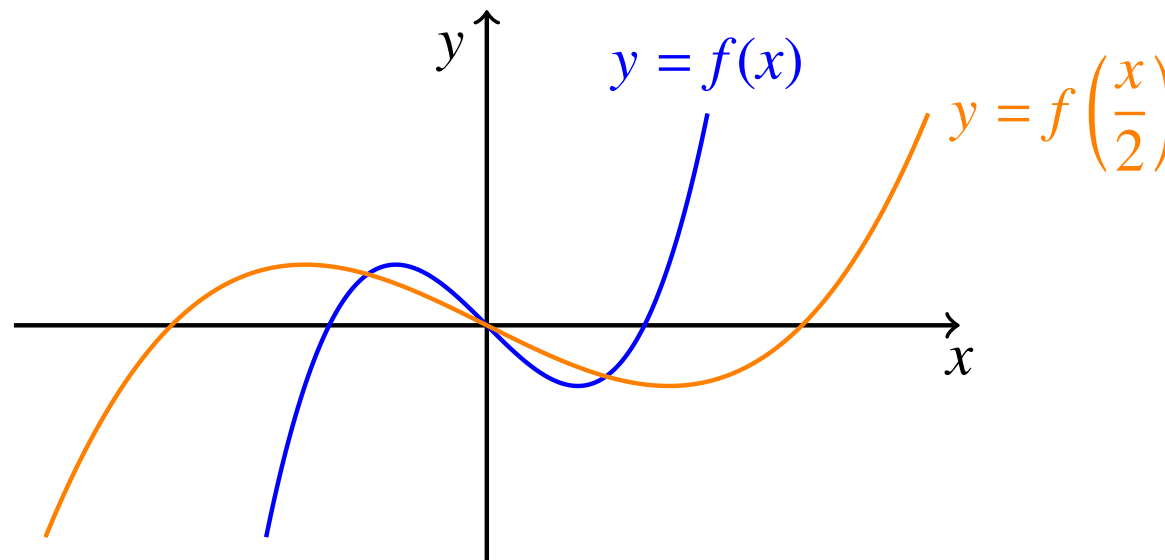
Állítás: A független változó transzformációi I.

Az $f(x) \mapsto f(x - c)$ típusú függvénytranszformációk az $f(x)$ grafikonjának c egységgel történő eltolásának felelnek meg az x -tengellyel párhuzamosan. $\square$



Lineáris függvénytranszformációk: Vízszintes nyújtások

Hasonlítsuk össze az $f(x) = x^3 - x$ és a $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^3}{8} - \frac{x}{2}$ függvények gyökeit, illetve grafikonjait:



Állítás: A független változó transzformációi II.

Az $f(x) \mapsto f\left(\frac{x}{c}\right)$ típusú függvénytranszformációk az $f(x)$ grafikonjának c arányú nyújtásának felelnek meg az x -tengellyel párhuzamosan. □

Elemi függvények

Definíció: Elemi függvények

Elemi függvényeknek nevezzük azokat a valós függvényeket, melyek a következő függvényekből képezhetők:

- 1 $x \mapsto x$ (identikus leképezés),
- 2 $x \mapsto \sin x$ (szögfüggvények),
- 3 $x \mapsto e^x$ (exponenciális függvény).

Az elemi függvények képzéséhez megengedett műveletek: a felsorolt három függvény és konstansok

- 1 összeadása, kivonása, szorzása, osztása (**négy alpművelet**);
- 2 leképezések **szorzatai** és **inverze**.

Példák elemi függvényekre

$3x + 4$, $2x \sin x$, $y = 3x^5$, $y = 2x + \sin x$, $\sqrt{x}$, $\ln x$, $\sin 2x$, $\cos \frac{x}{2}$, $\sin x^2$.

A geometria axiomatikus megalapozásáról

A matematikában több évezredes hagyománya van a geometria **axiomatikus** felépítésének, ezt a megközelítést **szintetikus geometriának** is nevezik.

Ebben a felépítésben az **alapfogalmak**:

- pont, egyenes, illeszkedés, közrefogás,
- távolság, **tengelyes tükrözés**.

VIGYÁZAT, CSALUNK!

Az egyenes „egyszerre” alapfogalom és ponthalmaz! Lásd: $P = e \cap f$.

Az **axiómákat** általában öt csoportba sorolják:

- I. Illeszkedési axiómák
- II. Metrikus axiómák
- III. Rendezési és IV. Folytonossági axiómák
- V. A tengelyes tükrözés axiómája

A **legfontosabb definált fogalmak**: szakasz, félegyenes, félsík, merőlegesség, párhuzamosság, felező merőleges, szög, szögfelező, egybevágóság.

Geometriai transzformációk

Definíció: Geometriai transzformáció

Az olyan leképezéseket, amelyeknek mind az értelmezési tartománya, mind pedig az értékkészlete ponthalmaz, **geometriai transzformációknak** nevezzük.

Példák:

- A középiskolából ismert egybevágósági transzformációk: **tengelyes tükrözés, eltolás, forgatás**. Ezeknél az É.T. és az É.K. a sík pontjainak halmaza.
- A tér pontjainak **merőleges levetítése** egy rögzített síkra.
- Az origóból történő **középpontos vetítés** két párhuzamos kör között.

Megjegyzés. Amennyiben egyértelmű, hogy milyen geometriai transzformációról van szó, akkor a $P, Q, \dots$ pontok képét egyszerűen csak $P', Q', \dots$ jelöli.

Egybevágósági transzformációk

Definíció: Távolságtartás

Azt mondjuk, hogy a geometriai transzformáció **távolságtartó (izometrikus)**, ha az É.T. minden P, Q pontjára $|PQ| = |P'Q'|$ teljesül.

Definíció: Egybevágósági transzformáció

A sík (tér) ponthalmazának önmagára vett távolságtartó leképezéseit **egybevágósági transzformációknak (izometriáknak)** nevezzük.

Tétel: Egyenestartás

Az egybevágóságok szakaszt szakaszba, egyenest egyenesbe képeznek.

Biz. Elegendő szakaszokkal foglalkozni. **Tfh.** $C \in AB$ szakasz, de $C' \notin A'B'$ szakasz. Ekkor $|AC| + |CB| = |AB|$ és $|A'C'| + |C'B'| > |A'B'|$, ami ellentmond a távolságtartásnak. □

Fixpont, fix egyenes

Definíció: Leképezés fixpontja

A P pontot a geometriai transzformáció **fixpontjának** nevezzük, ha $P = P'$.

Definíció: Alakzat képe, invariáns (fix) alakzat

- Az X alakzat **képe** alatt az $X' = \{P' \mid P \in X\}$ ponthalmazt értjük.
- Az X alakzatot **invariánsnak** vagy **fixnek** nevezzük, ha $X' \subseteq X$, azaz, ha minden $P \in X$ esetén $P' \in X$.
- Az X alakzatot **pontonként fixnek** nevezzük, ha minden pontja fixpont, azaz ha minden $P \in X$ esetén $P = P'$.

Példák:

- Tengelyes tükrözésnél pontonként fix a tengely és invariánsak a tengelyre merőleges egyenesek.
- Forgatásnál fixpont a forgatás középpontja. Invariáns alakzatok a középpont origójú körök.

A tengelyes tükrözés

A tengelyes tükrözés alapvető fontosságú fogalom az euklidészi geometriában. A legegyszerűbb, ha létezését axióma garantálja.

A tengelyes tükrözés axiómája

Minden egyeneshez pontosan egy olyan egybevágósági transzformáció létezik, mely az egyenes pontjait fixen hagyja, a két félsíkját pedig felcseréli.

Jelölés: τ_e .

A tengelyes tükrözésre két **szekesztési eljárást** használunk:

- 1 P -ből merőlegest bocsátunk e -re, és felmérjük rá P távolságát.
- 2 P középponttal és r sugárral kört rajzolunk, ami metszi e -t A, B -ben, és az A, B középpontú, r sugarú körök metszéspontja lesz P' .

Megjegyzések:

- Valójában (2)-t használjuk merőleges egyenes megszerkesztéséhez!
- Szerkesztési eljárásokkal „definiálhatjuk” a tengelyes tükrözést, de akkor be kell látni, hogy távolságtartó!

A forgatások

- A forgatás középiskolában megismert definíciójában szerepel az irányított szög fogalma, aminek precíz felépítése igen nehéz feladat.
- A lényeg, hogy irányított szögeket **közös kezdőpontú félegyenes párok** határoznak meg.
- Körző, vonalzó és a **körüljárási irány** fogalmának felhasználásával eljárást adhatunk adott irányított szög **„felmérésére”**.

Definíció: Forgatás

Legyen K pont és α irányított szög. A P pont **K körüli α szögű elforgatottja** az a P' pont, melyre $|KP| = |KP'|$ és a KP , KP' félegyenesek által megadott irányított szög α .

Megjegyzés. A középpontos tükrözéseket 180 fokos forgatásnak fogjuk tekinteni, ezért a további felsorolásokban nem fogjuk őket külön említeni.

Forgatás előállítása két tükrözéssel

Tétel: Forgatás előállítása két tükrözéssel

Legyen K az e, f egyenesek metszéspontja és α a két egyenes bezárt szöge. Ekkor a két tengelyes tükrözés $\tau_f \tau_e$ szorzata a K körüli 2α szögű forgatás.

Biz. Legyen $P' = \tau_e(P)$ és $P'' = \tau_f(P')$. Könnyű meggondolni, hogy $|KP| = |KP'| = |KP''|$ és a KP, KP'' félegyenesek által bezárt irányított szög 2α . □

Megjegyzés.

- Egyenesek irányított szöge nincs jól definiálva: az előjel függ a két egyenes sorrendjétől, de így is lehet α vagy $-(180^\circ - \alpha) = \alpha - 180^\circ$.
- Ez azonban a forgás irányított szögére nincs hatással, mivel $2\alpha = 2(\alpha - 180^\circ)$.
- A forgatások bevezetésének másik módja, hogy **két metsző tengelyre vett tükrözés szorzataként defináljuk** őket.

A forgatások alaptulajdonságai

Megj. Az identikus leképezéseket 0 szögű forgatásoknak tekintjük.

Állítás: A forgatások alaptulajdonságai

- 1 Ha egy forgatásnak van a középpontjától különböző fixpontja, akkor az az identitás.
- 2 Legyen β egy K körüli forgatás és e egy tetszőleges egyenes K -n át. Ekkor pontosan egy K -n átmenő f egyenes létezik, melyre $\beta = \tau_f \tau_e$.
- 3 Rögzített K pont körüli forgatások szorzata, illetve inverze szintén K körüli forgatás.

Biz. (1) Triviális. (2) Szemléletesen könnyű, hiszen csak az kell, hogy az e és f egyenesek bezárt irányított szöge a forgatás szögének fele legyen. A precíz bizonyítás, ami mellőzi az irányított szög fogalmát, igen nehéz. (3) következik (2)-ből: Legyen $\beta = \tau_f \tau_e$ és válasszuk g -t úgy, hogy $\gamma = \tau_g \tau_f$. Ekkor $\gamma\beta = (\tau_g \tau_f)(\tau_f \tau_e) = \tau_g \tau_e$ forgatás. □

A párhuzamos eltolások

- Jól ismert, hogy a párhuzamos eltolások szoros kapcsolatban vannak a geometriai vektorok fogalmával.
- Mivel a vektorok központi jelentőségű szerepet töltenek be a geometriában, ezért nagyon fontos a geometriai vektorfogalom precíz felépítése.
- Jelen esetben ez azt jelenti, hogy a párhuzamos eltolásokat a vektor fogalma nélkül kell definiálnunk.

Definíció: Eltolások

Az olyan egybevágósági transzformációkat, melyek előállnak két párhuzamos egyenesre vett tükrözés szorzataként, **párhuzamos eltolásoknak**, vagy röviden csak eltolásoknak nevezzük.

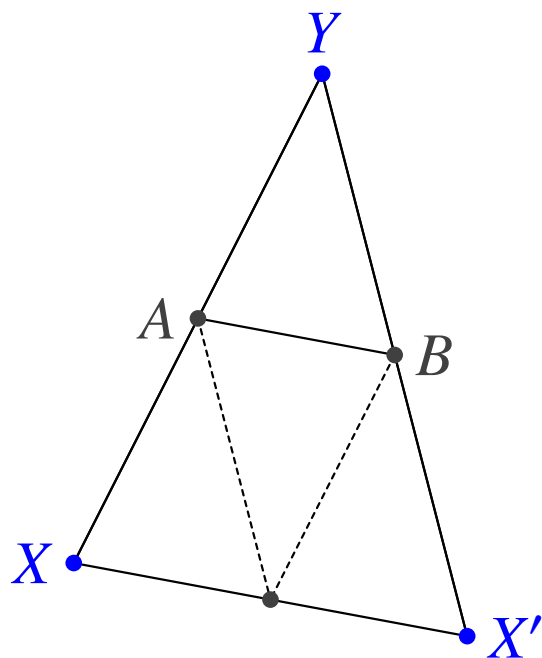
Megj. Megengedjük, hogy a két egyenes egybeessék, azaz az identikus leképezést is eltolásnak tekintjük.

Az eltolások és a középpontos tükrözések

Az A középpontra való középpontos tükrözést σ_A -val jelöljük.

Tétel: Az eltolások és a középpontos tükrözések kapcsolata

Két középpontos tükrözés szorzata eltolás. Legyen $\beta = \tau_b \tau_a$ eltolás és P tetszőleges pont. Ekkor pontosan egy olyan Q pont létezik, hogy $\beta = \sigma_Q \sigma_P$.



Biz. Legyen c egy a -ra és b -re merőleges egyenes és $A = a \cap c$, $B = b \cap c$. Ekkor $\beta = (\tau_b \tau_c)(\tau_c \tau_a) = \sigma_B \sigma_A$.

Vegyük észre, hogy az X pont $X' = \beta(X)$ képe megszerkeszthető úgy, hogy az X -en átmenő, AB -vel párhuzamos egyenesre kétszer felmérjük az AB szakaszt.

Legyen Q a P kezdőpontú, AB -vel párhuzamos, AB hosszúságú szakasz végpontja. Az észrevételünk szerint $\sigma_Q \sigma_P(X) = \sigma_B \sigma_A(X)$ minden X -re, azaz $\beta = \sigma_Q \sigma_P$.



Az eltolások alaptulajdonságai

Állítás: Az eltolások alaptulajdonságai

Legyen $a \parallel b$ és $\beta = \tau_b \tau_a$ egy identitástól különböző eltolás.

- 1 β -nak nincs fixpontja.
- 2 Bármely P pontra PP' fixegyenes.
- 3 Bármely e egyenesre $e \parallel e'$.

Biz. (1) Ha $P = \tau_b \tau_a(P)$ fixpont, akkor $P' = \tau_a(P) = \tau_b(P)$ és mind a , mind pedig b a PP' szakasz felező merőlegese. Így $a = b$ és $\beta = \text{id}$.

(2) Legyen c a P -n átmenő, a -ra és b -re merőleges egyenes. Ekkor c fixegyenesese τ_a, τ_b -nek, így β -nak is. Ebből adódik, hogy $P' \in c$ és $c = PP'$.

(3) Tegyük fel, hogy $e \cap e' = P$. Ekkor $P' \in e'$, tehát $PP' = e'$ fixegyenes és $e \parallel e' = e$. □

Megj. Középpontos tükrözésekre is igaz, hogy minden egyenes párhuzamos a képével.

Eltolások szorzata és inverze

Tétel: Eltolások szorzata és inverze

Eltolások szorzata és inverze szintén eltolás. Az eltolások szorzata kommutatív.

Biz. Az inverz világos. Legyen α, β két eltolás és írjuk fel α -t középpontos tükrözések szorzataként: $\alpha = \sigma_B \sigma_A$. Láttuk, hogy pontosan egy C pontra $\beta = \sigma_C \sigma_B$. Ekkor $\beta\alpha = (\sigma_C \sigma_B)(\sigma_B \sigma_A) = \sigma_C \sigma_A$ eltolás.

Legyenek α, β eltolások és P tetszőleges pont. Legyen $Q = \beta(P)$ és $P' = \alpha(P)$, $Q' = \alpha(Q)$. Mivel eltolás esetén minden egyenes párhuzamos a képével, továbbá az eltolások távolságtartók, így az PQ szakasz párhuzamos és egyenlő a $P'Q'$ képével, így $PQQ'P'$ paralelogramma. Ugyanezért a β eltolás a PP' szakaszt QQ' -be viszi, így $\beta(P') = Q'$ és

$$\alpha(\beta(P)) = \alpha(Q) = Q' = \beta(P') = \beta(\alpha(P)).$$

Ebből következik $\alpha\beta = \beta\alpha$.



A csúsztatva tükrözés

Az eddig megismert egybevágósági transzformációk a **tengelyes tükrözés**, a **forgatás** és az **eltolás**; egy további transzformáció típust kell még ismertetnünk.

Definíció: Csúsztatva tükrözés

A **csúsztatva tükrözések** egy eltolás és egy tengelyes tükrözés szorzatai, ahol az eltolás iránya párhuzamos a tükrözés tengelyével.

Ezzel teljessé vált a sík egybevágóságainak felsorolása. Az erről szóló tétel bizonyítását, valamint az egybevágósági transzformációk további tárgyalását a későbbi tanulmányainkban fogjuk elvégezni.

Alakzatok egybevágósága

Definíció: Alakzatok egybevágósága

Két síkbeli alakzatot **egybevágónak** mondunk, ha egy egybevágósági transzformációval az egyik a másikba vihető.

VIGYÁZAT! A következő tételt sok esetben – **hibásan!** – definíciónak szokták venni.

Tétel: Háromszögek egybevágósága

Két háromszög akkor és csak akkor egybevágó, ha megfelelő oldalaik hosszúsága megegyezik.

Biz. Ha egybevágóak, akkor nyilván az oldalak megegyeznek. Fordítva, viszonylag könnyen megmutatható, hogy ha az oldalak megegyeznek, akkor egy eltolás, egy forgatás és alkalmasint egy tükrözés alkalmazásával az egyik a másikba vihető. □

Megj. Megmutatható, hogy **pontosan egy** olyan egybevágósági transzformáció van, ami az egyik háromszöget a másikba viszi.

Hasonlósági transzformációk

Definíció: Hasonlósági transzformáció

A α geometriai transzformációt **hasonlósági transzformációnak** nevezzük, ha létezik egy olyan $\lambda > 0$ szám, hogy minden P, Q pontra teljesül

$$|\alpha(P)\alpha(Q)| = \lambda|PQ|.$$

A λ számot a hasonlóság **arányának** hívjuk.

- Az egybevágóságokhoz hasonló bizonyítással megmutatható, hogy a hasonlósági transzformációk is szakasz- és egyenestartók.
- Közismert tény, hogy a hasonlósági transzformációk szögtartóak. Ezzel most nem foglalkozunk, lévén a szögeket nem definiáltuk precízen.

Definíció: Alakzatok hasonlósága

Két síkbeli alakzatot **hasonlónak** mondunk ha egy hasonlósági transzformációval az egyik a másikba vihető.

A középpontos nyújtás

A hasonlósági transzformációkkal kapcsolatosan általában elsőként a középpontos nyújtás jut eszünkbe.

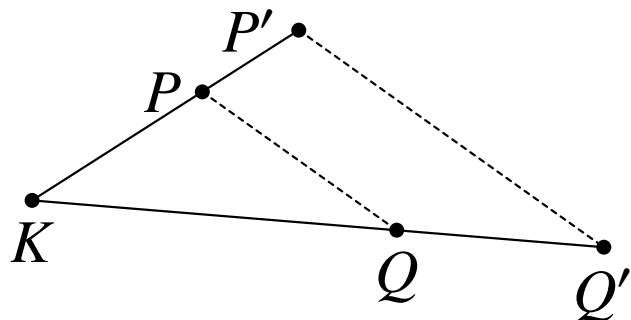
Definíció: A középpontos nyújtás

Legyen K pont és $\lambda > 0$ valós szám. A K középpontú, λ arányú középpontos nyújtás a P pontot a KP félegyenesen azon P' pontjába viszi, melyre fennáll $|KP'| = \lambda|KP|$.

Megj. A középpontos nyújtás $\lambda < 0$ esetén is értelmezhető.

Tétel: A középpontos nyújtás hasonlósági transzformáció

A középpontos nyújtás hasonlósági transzformáció.



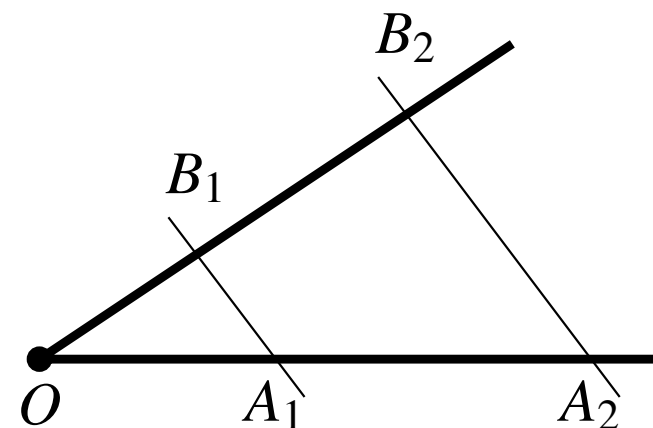
Biz. Tekintsük a K középpontú, λ arányú kp.-os nyújtást és legyen P', Q' a P, Q pontok képe, ahol K, P, Q nem esnek egy egyenesre. **Meg kell mutatni, hogy $|P'Q'| = \lambda|PQ|$!**

Párhuzamos szelők tétele

Tétel: Párhuzamos szelők tétele

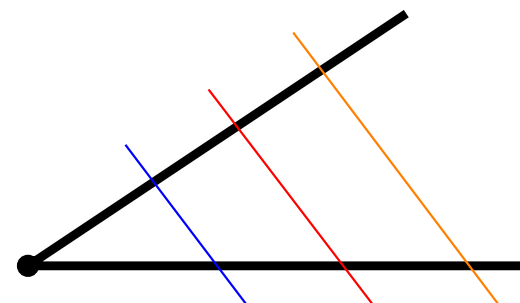
Messe az O -n átmenő egyenespárt két párhuzamos egyenes az A_1, B_1 , illetve A_2, B_2 pontokban. Ekkor

$$\frac{|OA_2|}{|OA_1|} = \frac{|OB_2|}{|OB_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|}.$$



Következmények

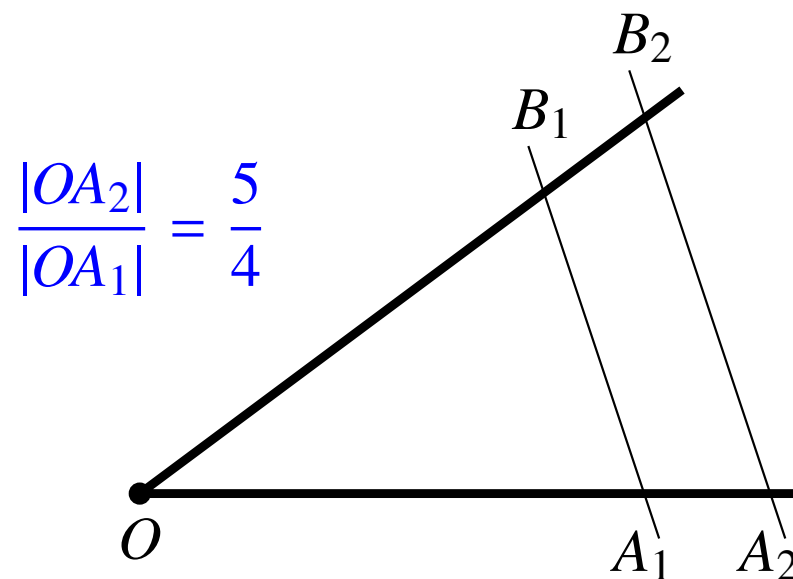
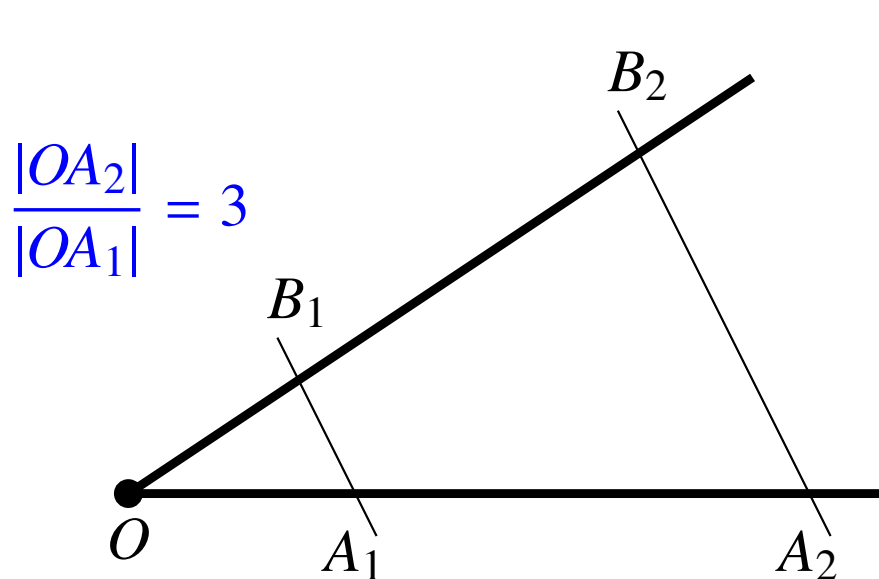
- **A tétel megfordítása:** Amennyiben a megfelelő arányok megegyeznek, úgy a két szelő egyenes párhuzamos.
- **Szelő szakaszok tétele:** Három párhuzamos szelő esetén a kimetszett szakaszok aránya megegyezik.



Párhuzamos szelők tételének bizonyítása

Biz. Az **első lépésben** meggondoljuk azt a speciális esetet, amikor az $\frac{|OA_2|}{|OA_1|} = n$ arány egész szám. Ekkor, a megfelelő párhuzamos egyenesek behúzásával létrejövő **egybevágó $\triangle$ -ek** mutatják, hogy $\frac{|OB_2|}{|OB_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|} = n$.

A **második lépésben** feltesszük, hogy $\frac{|OA_2|}{|OA_1|} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.



Végül, az $\frac{|OA_2|}{|OA_1|}$ valós számot **közelítjük** racionális számokkal.

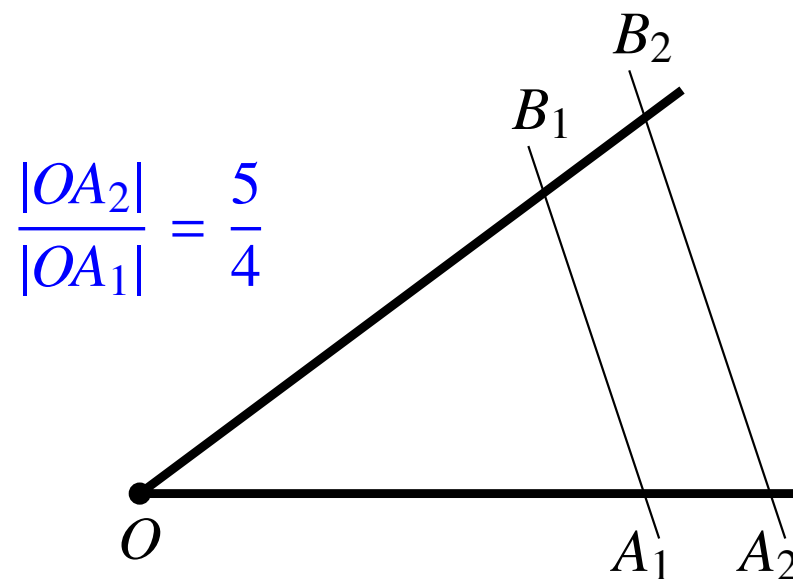
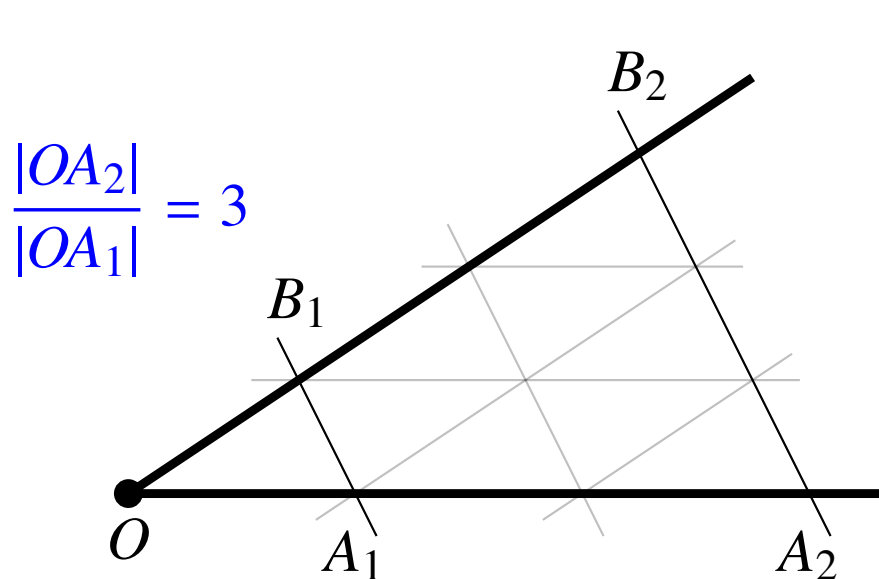
□

Párhuzamos szelők tételének bizonyítása

Biz. Az **első lépésben** meggondoljuk azt a speciális esetet, amikor az $\frac{|OA_2|}{|OA_1|} = n$ arány egész szám. Ekkor, a megfelelő párhuzamos egyenesek

behúzásával létrejövő **egybevágó $\triangle$ -ek** mutatják, hogy $\frac{|OB_2|}{|OB_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|} = n$.

A **második lépésben** feltesszük, hogy $\frac{|OA_2|}{|OA_1|} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.



Végül, az $\frac{|OA_2|}{|OA_1|}$ valós számot **közelítjük** racionális számokkal.

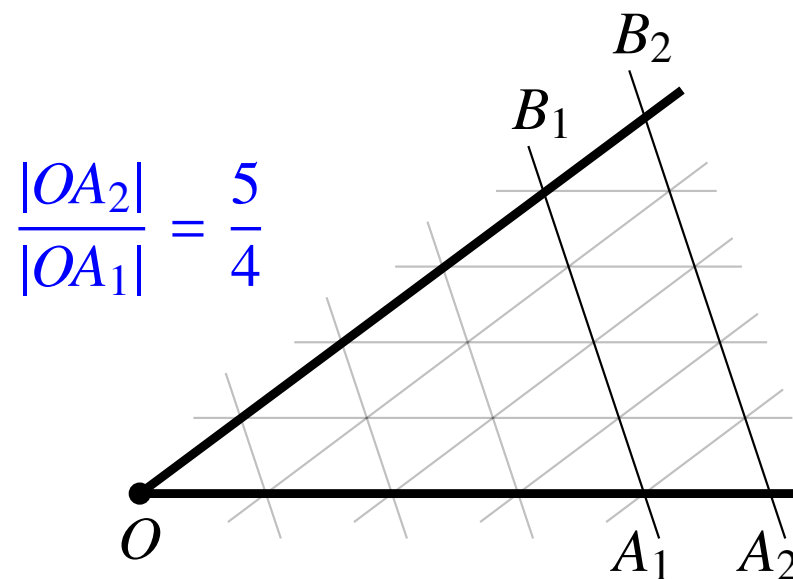
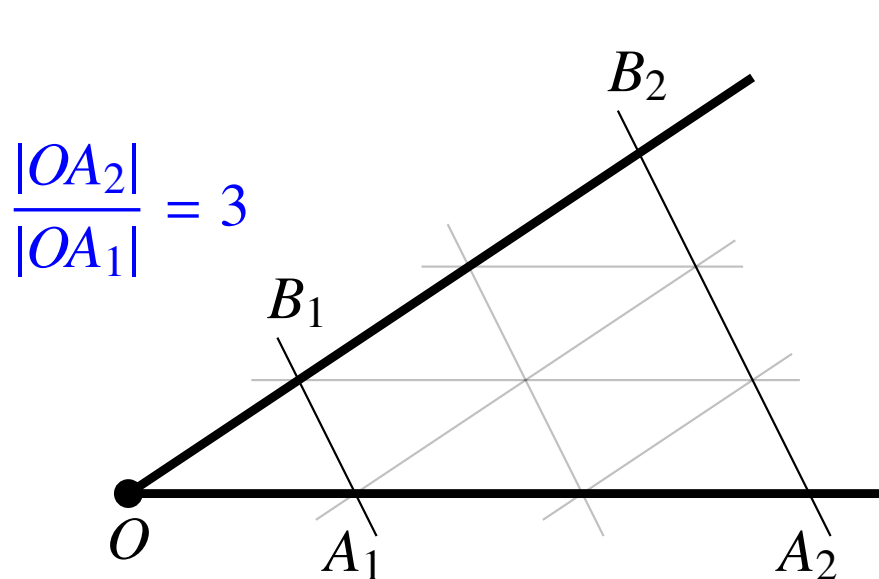
□

Párhuzamos szelők tételének bizonyítása

Biz. Az **első lépésben** meggondoljuk azt a speciális esetet, amikor az $\frac{|OA_2|}{|OA_1|} = n$ arány egész szám. Ekkor, a megfelelő párhuzamos egyenesek

behúzásával létrejövő **egybevágó $\triangle$ -ek** mutatják, hogy $\frac{|OB_2|}{|OB_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|} = n$.

A **második lépésben** feltesszük, hogy $\frac{|OA_2|}{|OA_1|} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.



Végül, az $\frac{|OA_2|}{|OA_1|}$ valós számot **közelítjük** racionális számokkal.

□

Középpontos nyújtások (folyt.)

A középpontos nyújtásokra vonatkozó tétel bizonyításának folytatása.

Mivel a párhuzamos szelők tételének bizonyításánál nem használtuk sem a hasonlóság, sem pedig a középpontos nyújtás fogalmát, így rá hivatkozva kimondhatjuk, hogy csakugyan $|P'Q'| = \lambda|PQ|$. □

VIGYÁZAT! Gyakori hibák a következők:

- A tétel bizonyításában a háromszögek hasonlóságával érvelünk. Ez nem jó, mert ehhez azt kell megmutatni, hogy egy hasonlóság $KPQ\Delta$ -t $KP'Q'\Delta$ -be viszi, ami pont a bizonyítandó tétel.
- Hasonlóan hibás, ha a párhuzamos szelők tételét hasonló háromszögekre való hivatkozással bizonyítjuk, mert a tételünk nélkül nem tudhatjuk, hogy létezik megfelelő hasonlósági transzformáció.

Tétel: Hasonlósági transzformációk előállítása

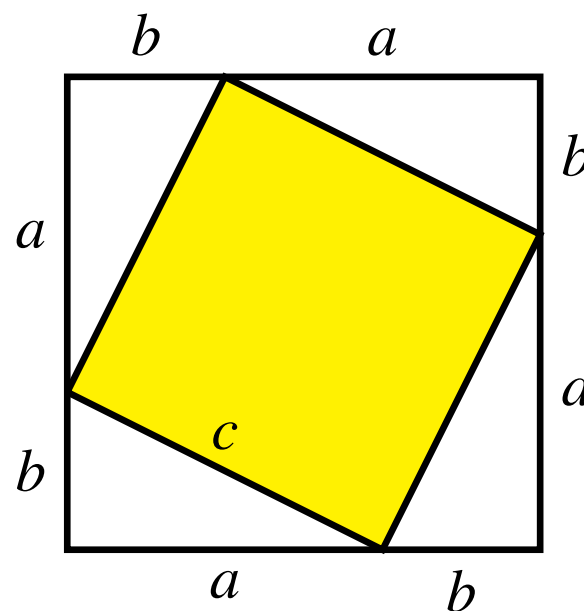
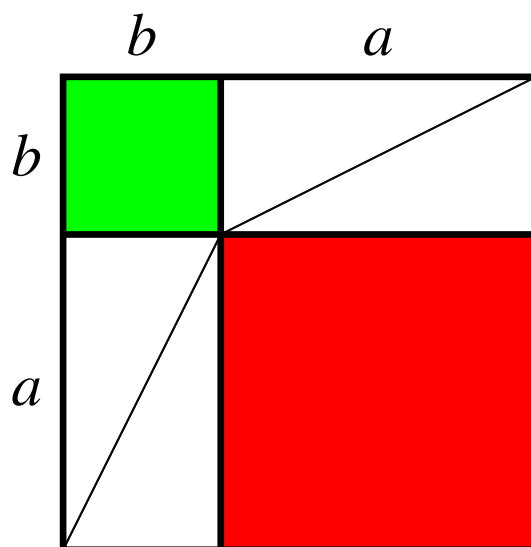
Bármely hasonlósági transzformáció előáll, mint egy középpontos nyújtás és egy egybevágóság szorzata.

A Pitagorasz-tétel

Tétel: Pitagorasz tétele

Derékszögű háromszög a, b befogóira és c átfogójára teljesül $a^2 + b^2 = c^2$.
Fordítva, ha egy háromszög a, b, c oldalaira $a^2 + b^2 = c^2$, akkor a c -vel szemközti szög derékszög.

Biz.



A megfordítás bizonyítása házi feladat.



Görbe vonal hossza

- A **görbe vonal** analitikus (koordinátás) definiálására csak később kerül sor. Mindenesetre nem járunk túl messze az igazságtól, ha **függvény grafikonjára** gondolunk.
- Definíció szerint egy **görbe vonal hossza** az a nemnegatív valós szám, amit a görbébe **beírt töröttvonalak** hosszával tudunk közelíteni.
- Nem minden görbe vonalnak van hossza.
- A λ arányú **középpontos nyújtás** a szakaszok és a töröttvonal hosszát $|\lambda|$ -szorosára változtatja.
- Ebből következik, hogy a λ arányú középpontos nyújtás **a görbe vonal hosszát $|\lambda|$ -szorosára** változtatja.

Területmérés

A területmérés kiinduló pontja, hogy

(T1) az egységoldalú négyzet területe 1.

Ebből levezethető:

- Az a és b oldalú téglalap területe ab .
- Legyen a a háromszög egy oldala és m_a a hozzá tartozó magasság. Ekkor a háromszög területe $\frac{am_a}{2}$.
- Az r sugarú kör területe $r^2\pi$, ahol a π szám a kör kerületének és átmérőjének hányadosa.
- (Más szóval, az r sugarú kör *kerülete* $2r\pi$.)

(Valójában szükségünk van a területmérés két további axiómájára is:

(T2) Távolságtartó leképezések megőrzik az alakzatok területét.

(T3) Két közös pont nélküli alakzat uniójának területe a két alakzat területének összege.)

Kör kerülete és területe

Definíció: π

Az r sugarú kör K kerületének és $2r$ átmérőjének **hányadosa** a π -vel jelölt valós szám; $\pi = 3,1415926 \dots$

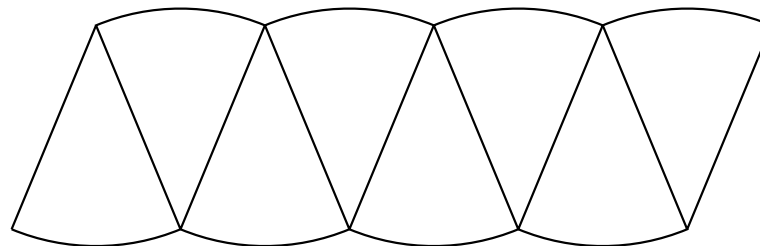
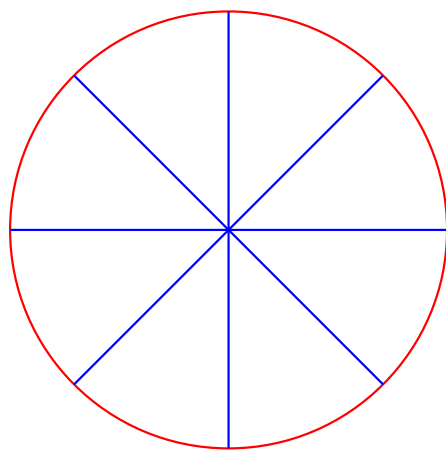
Megj. Tehát a $K = 2r\pi$ képlet **nem szorul** bizonyításra.

Tétel: A kör területe

Az r sugarú kör területe $T = r^2\pi$.

Biz. Egyre több cikkelyre vágva közelítjük a $\frac{K}{2}$ alapú, r magasságú **paralelogrammát**:

$n = 8$:



Kör kerülete és területe

Definíció: π

Az r sugarú kör K kerületének és $2r$ átmérőjének **hányadosa** a π -vel jelölt valós szám; $\pi = 3,1415926 \dots$

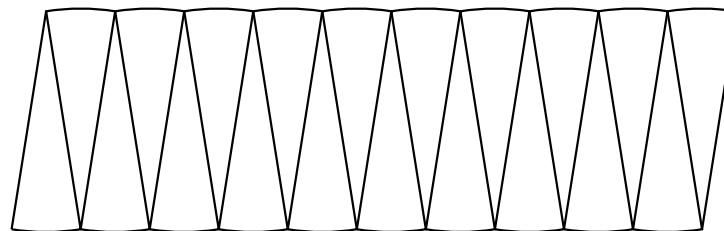
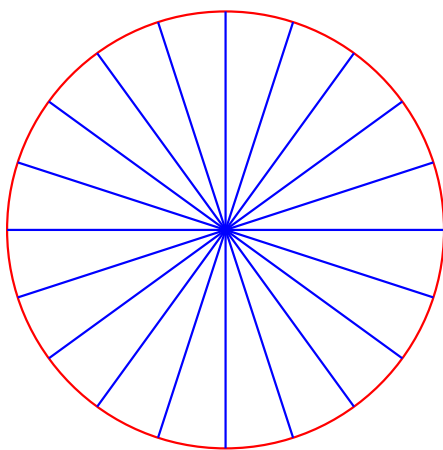
Megj. Tehát a $K = 2r\pi$ képlet **nem szorul** bizonyításra.

Tétel: A kör területe

Az r sugarú kör területe $T = r^2\pi$.

Biz. Egyre több cikkelyre vágva közelítjük a $\frac{K}{2}$ alapú, r magasságú **paralelogrammát**:

$n = 20$:



Kör kerülete és területe

Definíció: π

Az r sugarú kör K kerületének és $2r$ átmérőjének **hányadosa** a π -vel jelölt valós szám; $\pi = 3,1415926 \dots$

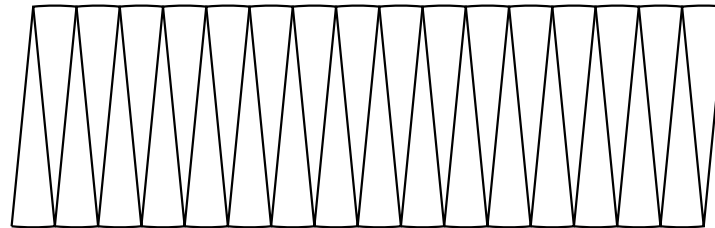
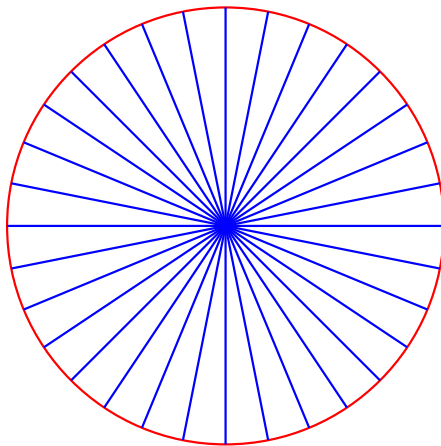
Megj. Tehát a $K = 2r\pi$ képlet **nem szorul** bizonyításra.

Tétel: A kör területe

Az r sugarú kör területe $T = r^2\pi$.

Biz. Egyre több cikkelyre vágva közelítjük a $\frac{K}{2}$ alapú, r magasságú **paralelogrammát**:

$n = 32$:



Hasáb, gúla térfogata; gömb felszíne és térfogata

Definíció: Hasáb, gúla

A **hasáb** (prizma) olyan geometriai test, amelyet két egymással párhuzamos egybevágó sokszög és annyi paralelogramma határol, ahány oldala van a sokszögnek.

A **gúla** (piramis) olyan geometriai test, amelynek **alaplapja** n oldalú sokszög, **oldallapjai** pedig egy csúcsban összefutó háromszögek.

Tétel: Hasáb, gúla térfogata; gömb felszíne és térfogata

- ① A hasáb térfogata $V = \text{alap} \cdot \text{magasság}$.
- ② A gúla térfogata $V = \frac{\text{alap} \cdot \text{magasság}}{3}$.
- ③ Az r sugarú gömb térfogata $V = \frac{4}{3}r^3\pi$.
- ④ Az r sugarú gömb felszíne $F = 4r^2\pi$.



A szög fogalma és a szögmérés

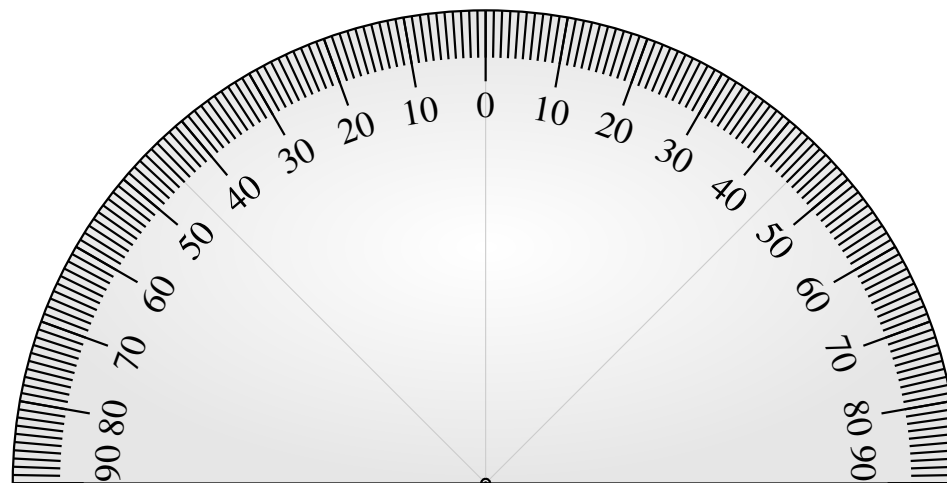
Definíció: (Írányított) szög

Írányított szög alatt egy közös kezdőpontú e^+f^+ félegyenes-párt értünk.

Megjegyzés.

- Időnként a „szöghöz” számítjuk az e^+f^+ által határolt síknegyedet is, illetve beszélünk két metsző egyenes által meghatározott szögről.
- **Fontos kérdés**, hogy mikor tekintünk két szöget **egyenlőnek**.
- A szögmérés alapelve, hogy a **teljes szöget** felosztjuk.

Megnevezés	fok	radián
teljes szög	360°	2π
egyenes szög	180°	π
derékszög	90°	$\frac{\pi}{2}$



Vektorok, mint irányított szakaszok

Most áttekintjük a geometriai vektorfogalom **koordinátamentes** felépítését.

Definíció: Vektorok, mint irányított szakaszok

Jelölje az A kezdőpontú, B végpontú **irányított szakaszt** $\overrightarrow{AB}$. Az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ irányított szakaszokat **egyenlőnek tekintjük**, ha létezik olyan eltolás, mely A -t C -be, B -t pedig D -be viszi.

- **Figyelem!** Két vektor egyenlőségét **nem definiáljuk** a „nagysága, iránya és állása megegyezik” körülírással. Az „irány” és az „állás” fogalmak precíz definiálása igen körülményes!
- Gondoljuk meg, hogy a fenti definícióban az „**egyenlőnek tekintés**” teljesíti a korábban megfogalmazott elvárásokat (ekvivalencia-reláció).
- Nyomtatásban a vektorokat többnyire vastagon szedett latin betűkkel jelölik: $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, stb. Írásban szokásos a felül nyilazott $\vec{x}$, $\vec{u}$, valamint az aláhúzott $\underline{x}$, $\underline{u}$, stb. jelölés is.

Vektorok hossza, bezárt szöge és ellentettje; a nullvektor

Az alábbi definíció értelmes, mivel a párh. eltolás egybevágósági transzf.

Definíció: Vektorok hossza és bezárt szöge

Az $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ vektor **hossza** az A, B pontok távolsága. Jelölés: $|\vec{x}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Az $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ vektorok **bezárt szöge** $BAC^\frown$.

Állítás: Vektor kezdőpontjának megválasztása

Legyen $\overrightarrow{AB}$ vektor és C tetszőleges pont. Ekkor pontosan egy D pont létezik úgy, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Biz. Pontosan egy olyan α párhuzamos eltolás van, ami A -t C -be viszi.

Legyen $D = \alpha(B)$. □

Definíció: Vektorok ellentettje, nullvektor

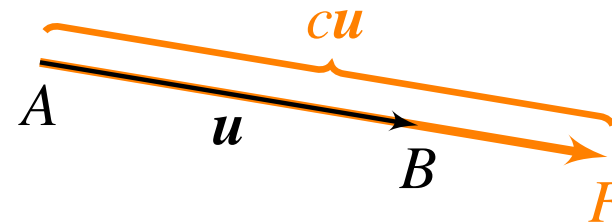
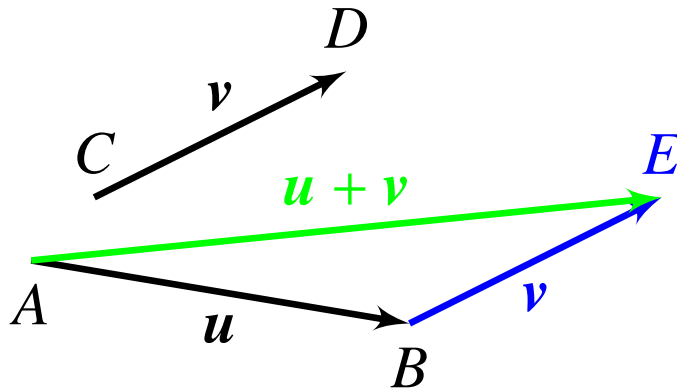
A $\overrightarrow{BA}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ vektor **ellentettjének** nevezzük. A **nullvektor** $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$.

Vektorok összege és skalárszorosa

Definíció: Vektorok összege és skalárszorosa

Legyenek $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{CD}$ vektorok és $c \geq 0$ valós szám.

- Válasszuk meg az E pontot úgy, hogy $\mathbf{v} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BE}$. Ekkor az $\overrightarrow{AE}$ vektort az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok **összegének** nevezzük: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AE}$.
- Mérjük fel az AB félegyenesre az A, B pontok távolságának c -szeresét, jelölje az így kapott pontot F . Ekkor az $\overrightarrow{AF}$ vektort az $\mathbf{u}$ vektor **c -szeresének** nevezzük: $c\mathbf{u} = \overrightarrow{AF}$.
- Az $\mathbf{u}$ vektor **$-c$ -szerese** a c -szeres vektor **ellentettje**.



A vektorműveletek alaptulajdonságai

Tétel: A vektorműveletek alaptulajdonságai

- 1 Vektorok összeadása és számmal való szorzása **jól definiált**, azaz az eredmény független a vektor kezdőpontjának megválasztásától.
- 2 Az összeadás **asszociatív, kommutatív** művelet, melyre teljesül

$$\overrightarrow{AB} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \mathbf{0}.$$

- 3 A számmal való szorzás **disztributív**, azaz

$$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v} \quad \text{és} \quad (c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}.$$

Biz. A legfontosabb, és legnehezebb része a tételnek (1). (2) és (3) viszonylag egyszerűen belátható a szóbanforgó vektorok kezdőpontjainak megfelelő megválasztásával. (3) első része a párhuzamos szelők tételéből következik, a második fele adódik a definícióból. □

„Írányított szakaszok” skalárszorzata

Definíció: Skalárszorzat (koordinátamentesen)

Az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektorok **skalárszorzata** alatt az

$$\mathbf{xy} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \alpha$$

valós számot értjük, ahol α a két vektor által bezárt szög.

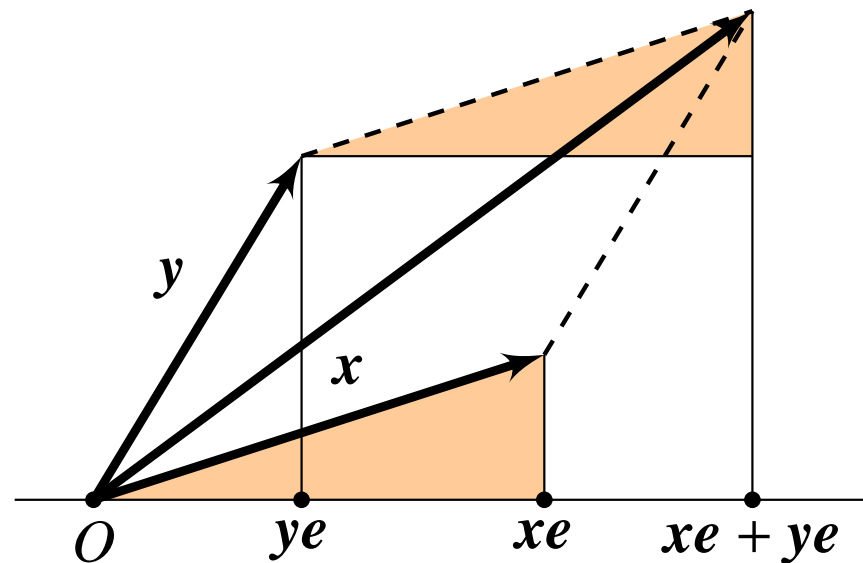
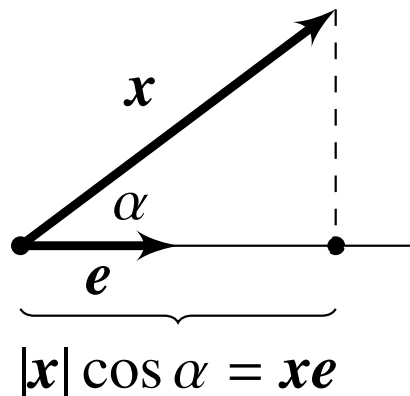
Állítás: A skalárszorzat alaptulajdonságai

- 1 $\forall \mathbf{x}$ vektorra $\mathbf{x}^2 \geq 0$ és $\mathbf{x}^2 = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- 2 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektorra $\mathbf{xy} = \mathbf{yx}$. (Kommutativitás.)
- 3 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektorra és $c \in \mathbb{R}$ számra $(c\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{x}(c\mathbf{y}) = c(\mathbf{xy})$.
- 4 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vektorra $(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz} + \mathbf{yz}$. (Disztributivitás.)

Biz. Az (1)-(3) tulajdonságok könnyen beláthatók. (4) nehéz! (Folyt. köv.)

A skalárszorzat disztributivitása: $(x + y)z = xz + yz$

- 1 Az első lépésben meggondoljuk, hogy z helyettesíthető az $e = \frac{z}{|z|}$ egységvektorral.
- 2 A második lépésben meggondoljuk, hogy e egységvektor esetén xe az x előjeles merőleges vetülete az e irányvektorú egyenesre.
- 3 Végül meggondoljuk, hogy a merőleges vetítés megőrzi az összeadást, azaz vektorok összegének vetülete a vetületek összege. (Additív.) □



A koszinusz-tétel

Állítás: Koszinusz-tétel

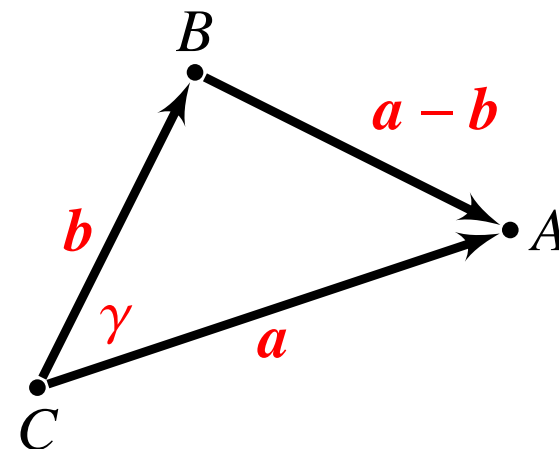
Jelölje a, b, c az $ABC\triangle$ oldalait és legyen γ a c -vel szemkötti szög. Ekkor $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Biz. Vezessük be az $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$,
 $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{BA}$ vektor jelöléseket. Ekkor

$$|\mathbf{a}| = a, \quad |\mathbf{b}| = b, \quad |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = c,$$

amiből a **disztributivitás** felhasználásával adódik

$$\begin{aligned} c^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 \\ &= \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad \square \end{aligned}$$



Színusz-tétel

A koszinusz-tétel mellett kitérünk a **színusz-tételre** is. Utóbbinak nincs közvetlen kapcsolata a vektorokkal, a két tétel mégis szorosan összekapcsolódik: Mindkettő arról szól, hogy egy háromszög esetén **három adatból** (oldalhossz vagy szög) **kifejezhető az összes többi adat**.

Állítás: Színusz-tétel

Legyenek a, b, c egy háromszög oldalai és α, β, γ az ezekkel szemközi szögek. Ekkor teljesül

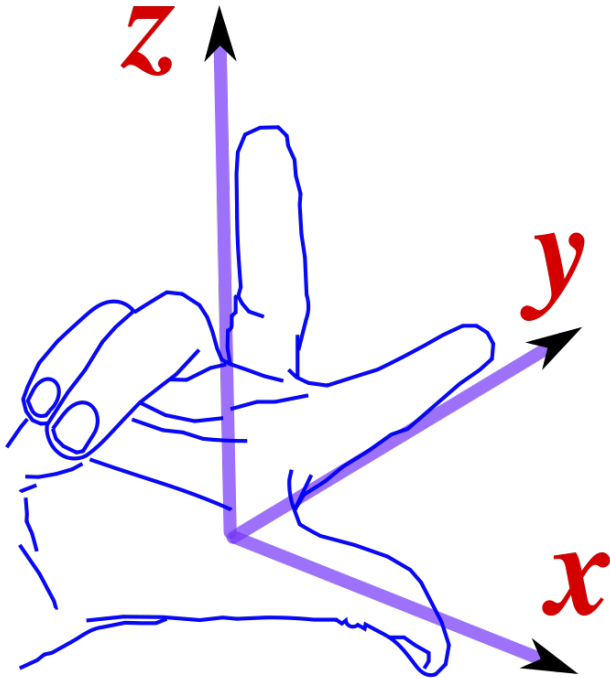
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Biz. Az a oldalhoz tartozó m_a magasságot kifejezhetjük kétféleképpen:

$$m_a = c \sin \beta = b \sin \gamma. \quad \square$$

Következmény: A háromszög területe $T = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

Jobbsodrású rendszerek



- A **jobbsodrású rendszer** fogalmával már középiskolában is találkozunk, mind matematika, mind pedig fizika órán.
- A „szokásos” definíció matematikailag nem igazán precíz.
- A lényeg, hogy egy térbeli vektorhármast kétféle rendszert alkothat: **jobbsodrásút** vagy **balsodrásút**.

Definíció: Irányítástartó transzformációk

A tér transzformációját **irányítástartónak** (**irányításváltónak**) nevezzük, ha a jobbsodrású vektorhármast jobbsodrásúakba (balsodrásúakba) viszi.

A legfontosabb példa **irányításváltó** transzformációra a **síkra vett tükrözés**.

A vektoriális szorzat és alaptulajdonságai

Definíció: Vektoriális szorzat (koordinátamentesen)

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ térbeli vektorok **vektoriális szorzata** az a $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, minek hossza $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \gamma$, és ami **merőleges** $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ -re úgy, hogy a három vektor **jobbsodrású rendszert** alkot.

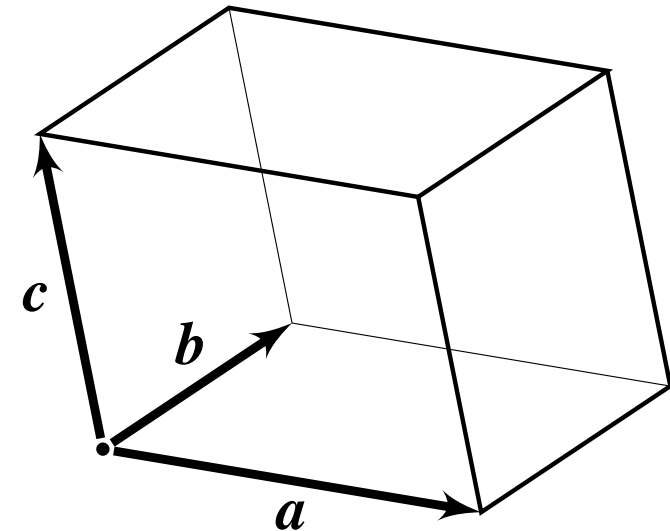
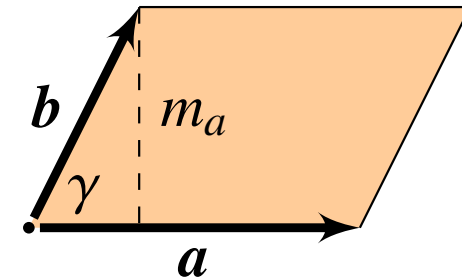
Állítás: A vektoriális szorzat alaptulajdonságai

- ① $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorra $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.
- ② $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorra $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. (Antikommutativitás.)
- ③ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorra és $d \in \mathbb{R}$ számra $(d\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (d\mathbf{b}) = d(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
- ④ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorra $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. (Disztributivitás.)

Biz. (1)-(2) azonnal adódnak a definícióból. (3) sem nehéz: először pozitív d -re mutatjuk meg, majd $d = -1$ -re. (4) **nehéz!** (Ld. később.) □

Kifeszített paralelogramma és paralelepipedon

- A síkban két vektor egy **paralelogrammát** feszít ki.
- Ennek területe
 $T = am_a = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \gamma = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$
- A térben három vektor **paralelepipedont** feszít ki.
- Ennek **térfogata** szintén az alap és a magasság szorzata.
- A paralelepipedon térfogatának **előjelet** tulajdoníthatunk a **vektorhármassodrásától** függően.



Vegyesszorzat, paralelepipedon térfogata

Definíció: Vegyesszorzat

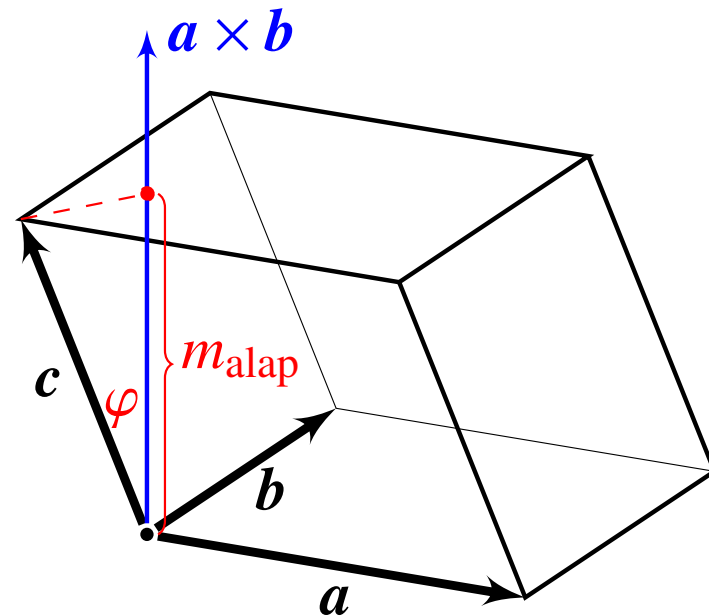
Az a, b, c térbeli vektorok **vegyesszorzata** alatt az

$$abc = (a \times b)c \in \mathbb{R}$$

valós számot értjük.

Állítás: A paralelepipedon térfogata

Az a, b, c vektorok által kifeszített paralelepipedon **(előjeles) térfogata** a három vektor **abc vegyesszorzata**.



Biz. Legyen φ az $a \times b$ és c bezárt szöge, ekkor $abc = |a \times b| |c| \cos \varphi$. Itt $|a \times b|$ az alap területe, míg $|c| \cos \varphi$ a c -nek az alapra merőleges komponense, azaz a magasság. $\square$

A vegyesszorzat alaptulajdonságai

Állítás: A vegyesszorzat alaptulajdonságai

- 1 $abc = 0$ akkor és csak akkor, ha a három vektor **egysíkú**.
- 2 $abc = -bac = bca = -cba = cab = -acb$. (Alternálás.)
- 3 **Disztributív** mindhárom változójában.

Biz. (1) A vegyesszorzat pontosan akkor nulla, ha a kifeszített paralelepipedon térfogata 0.

(2) Bármilyen sorrendben veszem a három vektort, ugyanazt a paralelepipedont feszíti ki, tehát előjeltől eltekintve egyenlőségnek kell teljesülni. Azt pedig könnyű meggondolni, hogy a b, c, a és a c, a, b vektorhármassok az a, b, c vektorhármassal azonos sodrású rendszert alkotnak, míg a többi ellenkező sodrásút alkot.

Megj. Ezek szerint $(a \times b)c = abc = bca = (b \times c)a = a(b \times c)$.

A vegyes- és a vektoriális szorzat disztributivitása

(3) A harmadik változóbeli disztributivitás következik a skalárszorzat disztributivitásából:

$$ab(c_1 + c_2) = (a \times b)(c_1 + c_2) = (a \times b)c_1 + (a \times b)c_2 = abc_1 + abc_2.$$

Ez, (2)-vel kombinálva, adja az első változóbeli disztributivitást:

$$(a_1 + a_2)bc = bc(a_1 + a_2) = bca_1 + bca_2 = a_1bc + a_2bc.$$

Hasonlóan kapjuk a második változóbeli disztributivitást. □

Következmény: A vektoriális szorzat disztributivitása

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c \text{ és } a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

Biz. Legyen $\mathbf{v} = (a + b) \times c - a \times c - b \times c$. A vegyesszorzat alaptulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\mathbf{v} = (a + b)c\mathbf{v} - ac\mathbf{v} - bc\mathbf{v} = 0,$$

tehát $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. A másik oldali disztrib. az antikommutativitásból következik. □

Koordinátarendszerek a síkon

Definíció: Koordinátarendszer

A matematikában a **koordinátarendszer** egy olyan fogalom (*eljárás, leképezés*), ami **átfordítja** a **geometria** világát a **számolás** világába.

Példák koordinátarendszerekre: A számegyenes és a gömbfelület

Azáltal, hogy az e egyenesen **kijelölünk** két pontot, és ezekhez 0-t, illetve 1-et írunk, egy **bijekciót** hozunk létre e **ponthalmaza** és $\mathbb{R}$ között.

Másik fontos példa a **gömbfelület** földrajz órán tanult koordinátázása.

A síkon a különböző koordinátarendszerekben

- a **pontoknak** **számpárok**,
- a **ponthalmazoknak** **kétismeretlenes egyenletek** felelnek meg, pl.

$$y = 5x - 2 \text{ (egyenes), } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9 \text{ (kör).}$$

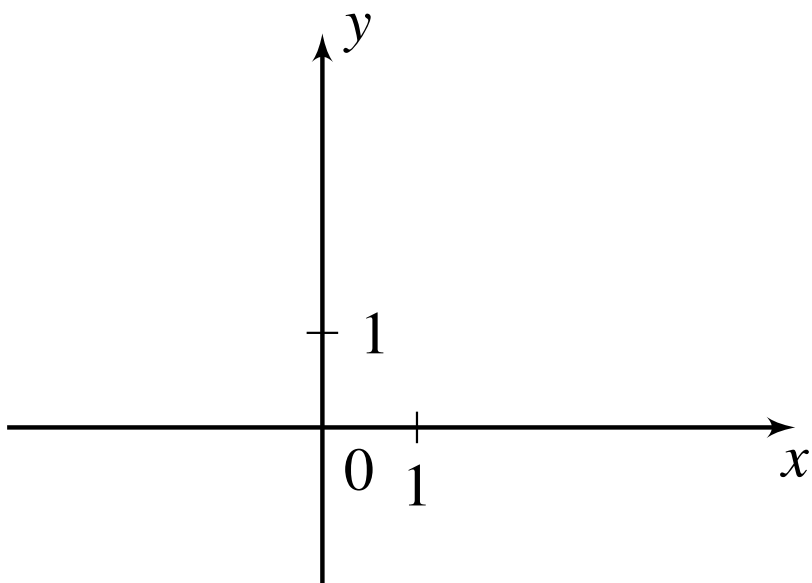
- Az **illeszkedést** (vagy **tartalmazást**) **behelyettesítéssel** adjuk meg.

VIGYÁZAT! Egyenletben mindig legyen egyenlőségjel!

A Descartes-féle derékszögű koordináta rendszer

A Descartes-féle derékszögű koordináta rendszer **alkotó elemeit** általános iskolában tanuljuk:

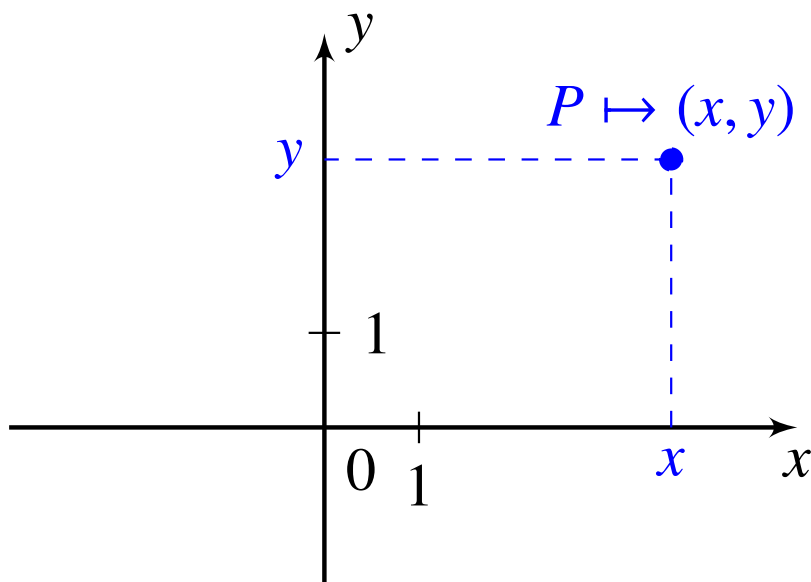
- 1 Két, egymásra merőleges irányított egyenes: az **x -** és **y -tengely**.
- 2 Az egyenesek metszéspontja az **origó**.
- 3 Az **egységek** rögzítésével a tengelyeket **számegyenesekké** tesszük.



A Descartes-féle derékszögű koordináta rendszer

A Descartes-féle derékszögű koordináta rendszer **alkotó elemeit** általános iskolában tanuljuk:

- 1 Két, egymásra merőleges irányított egyenes: az **x -** és **y -tengely**.
- 2 Az egyenesek metszéspontja az **origó**.
- 3 Az **egységek** rögzítésével a tengelyeket **számegyenesekké** tesszük.



Legyen **P** tetszőleges síkbeli pont és tekintsük P -nek a **P_x, P_y merőleges vetületeit** az x, y -tengelyekre. Mivel a tengelyek számegyenesek, ezek meghatároznak **$x, y \in \mathbb{R}$ valós számokat**.

Azt mondjuk, hogy **P koordinátái** ebben a koordináta rendszerben **(x, y)** .

A polárkoordináta-rendszer

- 1 A polárkoordináta-rendszer alkotóelemei az **origó**, valamint egy O kezdőpontú **félegyenes**.
- 2 A P pont polárkoordinátái az (r, φ) számpár, ahol $r = |OP|$ távolság és az $\overrightarrow{OP}$ vektornak a félegyenesünkkel bezárt φ szöge.
- 3 A koordinátarendszer váltást Descartes-félére az

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

összefüggés adja meg.

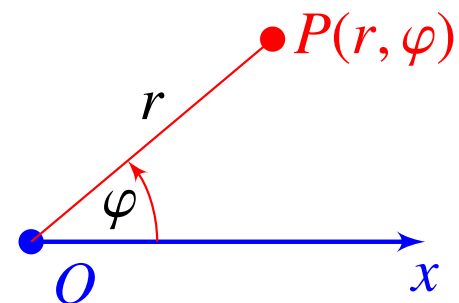


A polárkoordináta-rendszer

- 1 A polárkoordináta-rendszer alkotóelemei az **origó**, valamint egy O kezdőpontú **félegyenes**.
- 2 A P pont polárkoordinátái az (r, φ) számpár, ahol $r = |OP|$ távolság és az $\overrightarrow{OP}$ vektornak a félegyenesünkkel bezárt φ szöge.
- 3 A koordinátarendszer váltást Descartes-félére az

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

összefüggés adja meg.

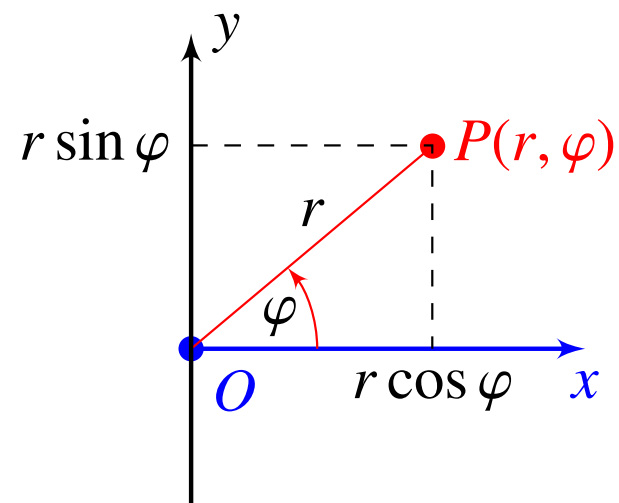


A polárkoordináta-rendszer

- 1 A polárkoordináta-rendszer alkotóelemei az **origó**, valamint egy O kezdőpontú **félegyenes**.
- 2 A P pont polárkoordinátái az (r, φ) számpár, ahol $r = |OP|$ távolság és az $\overrightarrow{OP}$ vektornak a félegyenesünkkel bezárt φ szöge.
- 3 A koordinátarendszer váltást Descartes-félére az

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

összefüggés adja meg.

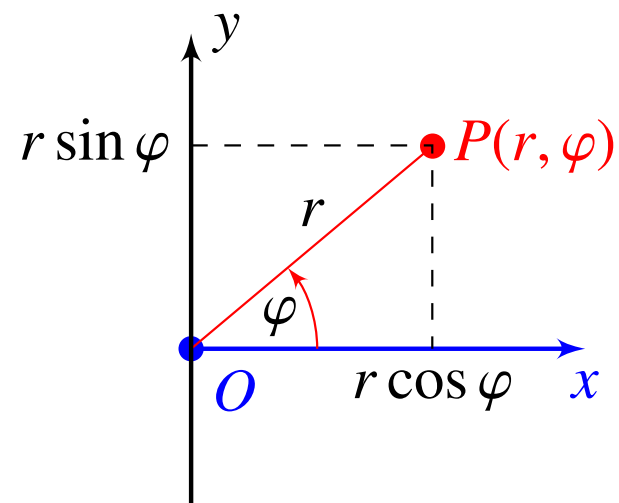


A polárkoordináta-rendszer

- 1 A polárkoordináta-rendszer alkotóelemei az **origó**, valamint egy O kezdőpontú **félegyenes**.
- 2 A P pont polárkoordinátái az (r, φ) számpár, ahol $r = |OP|$ távolság és az $\overrightarrow{OP}$ vektornak a félegyenesünkkel bezárt φ szöge.
- 3 A koordinátarendszer váltást Descartes-félére az

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

összefüggés adja meg.



Pontok helyvektora

- A matematikában akkor nevezünk egy fogalmat **geometriainak**, ha viselkedése nem függ a koordináta-rendszer megválasztásától.
- Ilyenek vizsgálatához szükség van a koordináta-rendszer fogalmának pontos megértéséhez, ami egy kissé elvontabb tárgyalást tesz szükségessé.
- Ebben a tárgyalásban az **első lépés** a sík ponthalmaza és a vektorok között kapcsolatot teremteni.

Definíció: Pont helyvektora

Rögzítsünk a síkon egy O -val jelölt, **origónak nevezett** pontot. A P pont **helyvektora** alatt az $\overrightarrow{OP}$ vektort értjük.

- A **második lépésben** az **elvont vektorfogalmunkból** („irányított szakasz”) csinálunk **számpárokat**.

Ortonormált bázis

Definíció: Ortonormált bázis

Az egymásra merőleges egységvektorokból álló vektorpárt (vektorhármast) **síkbeli (térbeli) ortonormált bázisnak** nevezzük. Szokásos jelölés: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, (\mathbf{k})$.

Definíció szerint az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ortonormált bázis elemeire $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1$ és $\mathbf{ij} = 0$.

Rögzítsük az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ortonormált bázist. Ekkor tetszőleges $\mathbf{v}$ síkbeli vektorhoz hozzárendeljük az $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ számpárt, ahol $x = \mathbf{i}\mathbf{v}$, $y = \mathbf{j}\mathbf{v}$.

Meggondoljuk, hogy a $\mathbf{w} = \mathbf{v} - x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ vektor merőleges $\mathbf{i}$ -re:

$$\mathbf{wi} = (\mathbf{v} - x\mathbf{i} - y\mathbf{j})\mathbf{i} = \mathbf{vi} - x\mathbf{i}^2 - y\mathbf{ij} = \mathbf{vi} - x = x - x = 0.$$

Hasonlóan: $\mathbf{wj} = 0$, amiből következik, hogy $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Figyelem! Pontból számpárt az $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ hármas csinál:

$$P \xrightarrow{O \text{ rögzítése}} \overrightarrow{OP} \xrightarrow{\mathbf{i}, \mathbf{j} \text{ rögzítése}} (x, y).$$

Az analitikus vektorfogalom: számpárok és számhármassok

Definíció: Vektor (analitikus geometria)

A valós számpárokat **síkbeli**, a számhármassokat pedig **térbeli vektoroknak** nevezzük. A $(0, 0)$ és a $(0, 0, 0)$ vektorokat síkbeli, illetve térbeli **nullvektornak** nevezzük, és **0**-val jelöljük.

- A továbbiakban 2-dimenziós (síkbeli) vektorokkal foglalkozunk, de szinte minden fogalom és állítás könnyen értelmezhető 3-dimenziós (térbeli) vektorokra is.
- A valós számpárok $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ halmazán értelmezni tudjuk az **összeadás** és a **számmal való szorzás**

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad c(x, y) = (cx, cy)$$

műveleteit **komponensenként**.

- Számpárok összeadása **asszociatív** és **kommutatív**, és a számmal való szorzásra nézve **disztributív**.

Skalárszorzat ortonormált bázisban

Tekintsük az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ síkbeli vektorok $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$ és $\mathbf{y} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ előállítását az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ortonormált bázisban.

Ekkor a két vektor **skalárszorzatára** az alábbi képlet adódik:

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = (x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j})(y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}) = x_1y_1\mathbf{i}^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{ij} + x_2y_2\mathbf{j}^2 = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Ugyanez az $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$ térbeli vektorok esetén:

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Mindez motiválja a szám n -esekre vonatkozó alábbi definíciót:

Definíció: Analitikus vektor skalárszorzata, hossza

Az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorok **skalárszorzatát** az $\mathbf{x}\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, illetve **hosszát** az $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ valós számmal definiáljuk.

Vektorok bezárt szöge

A Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség szerint tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ szám n -esekre

$$-1 \leq \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|} \leq 1.$$

Már láttuk, hogy $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ bijektív leképezés.

Állítás: Vektorok bezárt szögének kiszámítása

Ortonormált bázisban az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektorok bezárt szögét az

$$\frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|} = \cos \alpha.$$

képlettel számoljuk, ahol $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$. Speciálisan, az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektorok **merőlegesek**, ha $\mathbf{x}\mathbf{y} = 0$. Jelöléssel: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Megj. Az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektorok **párhuzamosak**, ha $\mathbf{y} = c\mathbf{x}$ valamely $c \in \mathbb{R}$ valós számra. Látható, ahogy a két vektor akkor és csak akkor párhuzamos, ha bezárt szögük 0 vagy 180° .

Egyenes normálvektoros egyenlete

A továbbiakban rögzítünk egy Descartes-féle derékszögű koordináta rendszert.

Definíció: Egyenes normálvektora

Adott egyenesre merőleges, nullvektortól különböző vektorokat az egyenes **normálvektorainak** nevezzük.

- Legyen $\mathbf{n}$ az e normálvektora és $c \neq 0$ tetszőleges valós szám. Ekkor $c\mathbf{n}$ is e normálvektora.
- Ha $\mathbf{n}$ normálvektora e -nek, akkor normálvektora bármely e -vel párhuzamos egyenesnek is.
- Legyen $\mathbf{n} = (a, b)$ az origón átmenő e egyenes normálvektora. Ekkor minden $P(x, y) \in e$ pontra teljesül $aX + bY = 0$.

Állítás: Egyenes normálvektoros (implicit) egyenlete

Az egyenesek egyenlete $aX + bY + c = 0$ alakba írható, ahol $(a, b) \neq (0, 0)$ az egyenes normálvektora. □

Egyenes explicit egyenlete

Állítás: Egyenes explicit egyenlete

- 1 Az $e : aX + bY + c = 0$ akkor és csak akkor párhuzamos az y -tengellyel, ha $b = 0$. Ebben az esetben az egyenlete $X = d$ alakra hozható.
- 2 Az y -tengellyel nem párhuzamos egyenesek egyenlete $Y = mX + d$ alakra hozható.
- 3 A $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ pontokon áthaladó egyenes normálvektoros egyenlete

$$(y_1 - y_2)X - (x_1 - x_2)Y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

- 4 Amennyiben $x_1 \neq x_2$, akkor a P_1P_2 egyenes egyenlete

$$Y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}X + \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}. \quad \square$$

Megj. Az $Y = mX + d$ alakban m a **meredekség**, d pedig az **y -tengely metszet**.

Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerek

Definíció: Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerek

$$\text{Az} \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (11)$$

rendszer **kétismeretlenes**, **két egyenletből álló lineáris egyenletrendszernek** nevezzük. Az $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ valós számokat az egyenletrendszer **együtthatóinak**, x -et és y -t pedig az egyenletrendszer **ismeretlenjeinek** hívjuk.

Megj. A **lineáris** szó magyarul **elsőfokú**, vagyis az ismeretlenek mind **első fokon** fordulnak elő, és az egyenletrendszer **nem tartalmaz** x^4 , xy , $\sin x$ és ehhez hasonló tagokat.

Példák kétismeretlenes egyenletrendszerekre

$$\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 10x + 7y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 7y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 3uy = 2 \\ x + 7y = \sin v \end{cases}$$

Lineáris egyenletrendszer grafikus megoldása

Tekintsük a

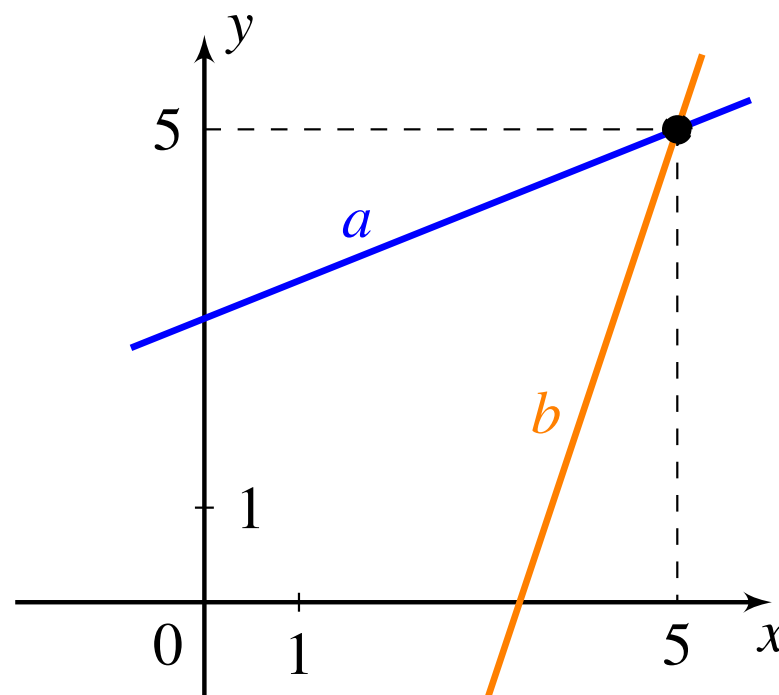
$$\begin{cases} 2x - 5y = -15 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$$

két egyenletből álló, kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert.

A két egyenletet tekinthetem két egyenes egyenletének:

$$a : 2x - 5y + 15 = 0,$$

$$b : 3x - y - 10 = 0.$$



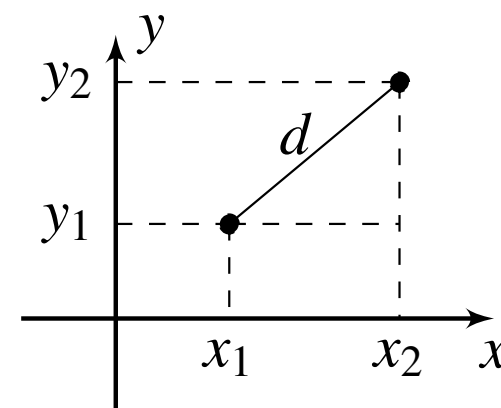
Az egyenletrendszer $x = 5, y = 5$ megoldása azon pont x - és y -koordinátája, mely **mindkét egyenesre illeszkedik**.

A pontok távolsága

Állítás: Pontok távolsága

A $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontok távolsága a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Definíció: Pont és egyenes távolsága

Adott pont és egyenes távolsága alatt a pont és hozzá legközelebbi egyenespont távolságát értjük.

Megj. Hasonló logikával definiáljuk pont és ponthalmaz, valamint két ponthalmaz távolságát.

Pont és egyenes távolsága

Feladat

Határozzuk meg a $P(x, y)$ pont távolságát az $e : Y = mX + b$ egyenestől.

Megoldás. Az e általános pontja $(t, mt + b)$, ennek távolságnégyzete P -től:

$$\begin{aligned}(t - x)^2 + (mt + b - y)^2 &= (1 + m^2)t^2 - 2t(x + my - mb) + x^2 + y^2 - 2by + b^2 \\ &= (1 + m^2) \left(t - \frac{x + my - mb}{1 + m^2} \right)^2 + C,\end{aligned}$$

ahol C t -től független érték. Ez nyilván $t = \frac{x + my - mb}{1 + m^2}$ esetén minimális, azaz az e -nek a P -höz legközelebbi $T(x', y')$ pontjára teljesül

$$x' - x = \frac{-m(mx + b - y)}{1 + m^2}, \quad y' - y = \frac{mx + b - y}{1 + m^2}.$$

Ebből adódik a pont és egyenes távolságára $\frac{|mx + b - y|}{\sqrt{1 + m^2}}$.

Párhuzamos eltolások koordinátás alakja

Definíció: Geometriai transzformáció koordinátás alakja

Egy $P \mapsto P'$ geometriai transzformáció koordinátarendszerben egy

$$(x, y) \mapsto (x', y')$$

hozzárendelésnek felel meg, ahol $x' = x'(x, y)$, $y' = y'(x, y)$ az x, y változók függvényei.

Állítás: A párhuzamos eltolás koordinátás alakja

Legyen α az a párhuzamos eltolás, mely az origót az (u, v) pontba viszi. Ekkor α koordinátás alakja

$$(x, y) \mapsto (x + u, y + v). \quad \square$$

A középpontos forgatás koordinátás alakja

Állítás: A forgatás alaptulajdonságai

Az origó körüli φ szögű forgatás koordinátás alakja

$$\begin{cases} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{cases}$$

Biz. Könnyű meggondolni, hogy a megadott transzformáció **egyetlen fixpontja** $(0, 0)$ és $(1, 0)$ -t a megfelelő $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ pontba viszi. Meg kell még mutatni, hogy **távolságtartó**. Tekintsük a $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ pontokat és $P'_1(x'_1, y'_1)$, $P'_2(x'_2, y'_2)$ képeiket. **Behelyettesítéssel**, és az addíciós tételek felhasználásával adódik, hogy

$$|P'_1 P'_2|^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = |P_1 P_2|^2. \quad \square$$

A tengelyes tükrözés koordinátás alakja

Állítás: A tengelyes tükrözés koordinátás alakja

Az $e : Y = mX + b$ egyenesre vett tengelyes tükrözés koordinátás alakja

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2m(mx + b - y)}{1 + m^2}, \\ y' = y + \frac{2(mx + b - y)}{1 + m^2}. \end{cases}$$

Biz. Számolással adódik, hogy a $P(x, y)$ pont és a $P'(x', y')$ képe által meghatározott szakasz **felezőpontja**

$$\left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2} \right) = \left(x - \frac{m(mx + b - y)}{1 + m^2}, y + \frac{(mx + b - y)}{1 + m^2} \right),$$

ami egy korábbi feladatban látottak szerint pont a **P merőleges vetülete e -re.**



A hasonlósági transzformáció koordinátás alakja

Állítás: A hasonlósági transzformáció koordinátás alakja

A $K(a, b)$ középpontú, λ arányú középpontos nyújtás koordinátás alakja

$$\begin{cases} x' - a &= \lambda(x - a), \\ y' - b &= \lambda(y - b). \end{cases}$$

Biz. Könnyen leellenőrizhető, hogy $\lambda \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KP'}$.



Megj. A síkbeli vektorok skalárral való szorzásának $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ tulajdonsága **ekvivalens** a párhuzamos szelők tételével.

Transzformáció koordinátás alakja és mátrixok

- Vegyük észre, hogy az összes vizsgált esetben **rögzített transzformáció esetén** a $P(x, y)$ pont $P'(x', y')$ képének koordinátái **x -nek és y -nak elsőfokú függvényei!**
- Azaz, minden vizsgált transzformáció koordinátás alakja

$$\begin{cases} x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases}$$

alakba írható, ahol $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ **magától a transzformációtól függő** valós számok.

- Jól látható, hogy a (b_1, b_2) pont az **origó képe**.
- Az $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mátrixot a **transzformáció mátrixának** nevezzük.

A komplex számok

Definíció: A komplex számok

Jelöljön i egy $i \notin \mathbb{R}$ elemet és legyenek $x, y \in \mathbb{R}$ valós számok. A $z = x + iy$ elemet **komplex számnak** nevezzük, ezek halmazát $\mathbb{C}$ -vel jelöljük. A

$$\bar{z} = x - iy$$

elem a z komplex szám **konjugáltja**. A $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ komplex számok összegét és szorzatát az alábbi módon definiáljuk:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Osztás a komplex számok körében

Tekintsük a $z = x + iy \neq 0$ komplex számot. Ekkor

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \neq 0$$

valós szám.

Definíció: Komplex szám reciproka

A $z = x + iy \neq 0$ komplex szám **reciproka** a

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$$

komplex szám.

Állítás: Osztás a komplex számok körében

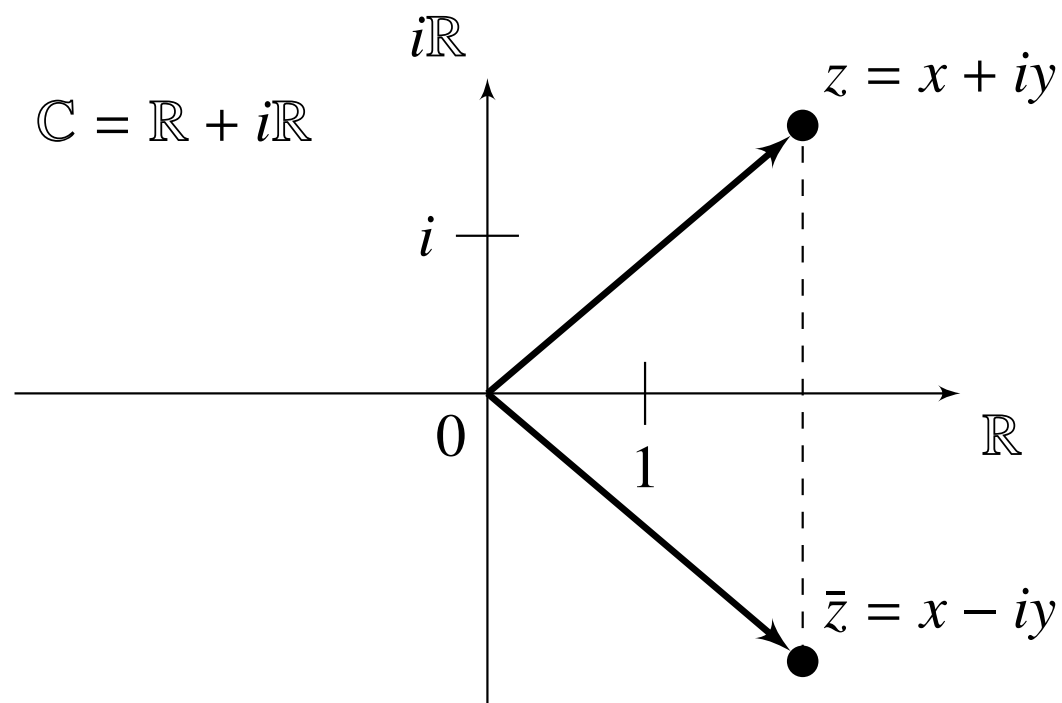
Legyenek $a, b \in \mathbb{C}$ komplex számok. Ha $a \neq 0$, akkor az $az = b$ egyenlet egyetlen megoldása a $z = a^{-1}b \in \mathbb{C}$ komplex szám.

A komplex számsík

Állítás: A komplex számtest alaptulajdonságai

A komplex számok testet alkotnak. A konjugálás művelete megőrzi az összeadást és a szorzást: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

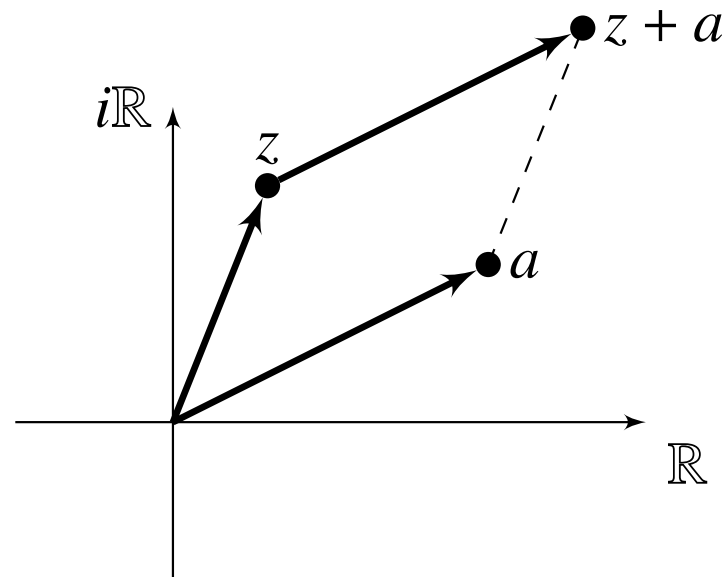
Teljesül továbbá: $i^2 = -1$, $z\bar{z} \in \mathbb{R}$, $z\bar{z} \geq 0$ és $z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$.



Összeadás a komplex síkon

Állítás: Összeadás a komplex számsíkon

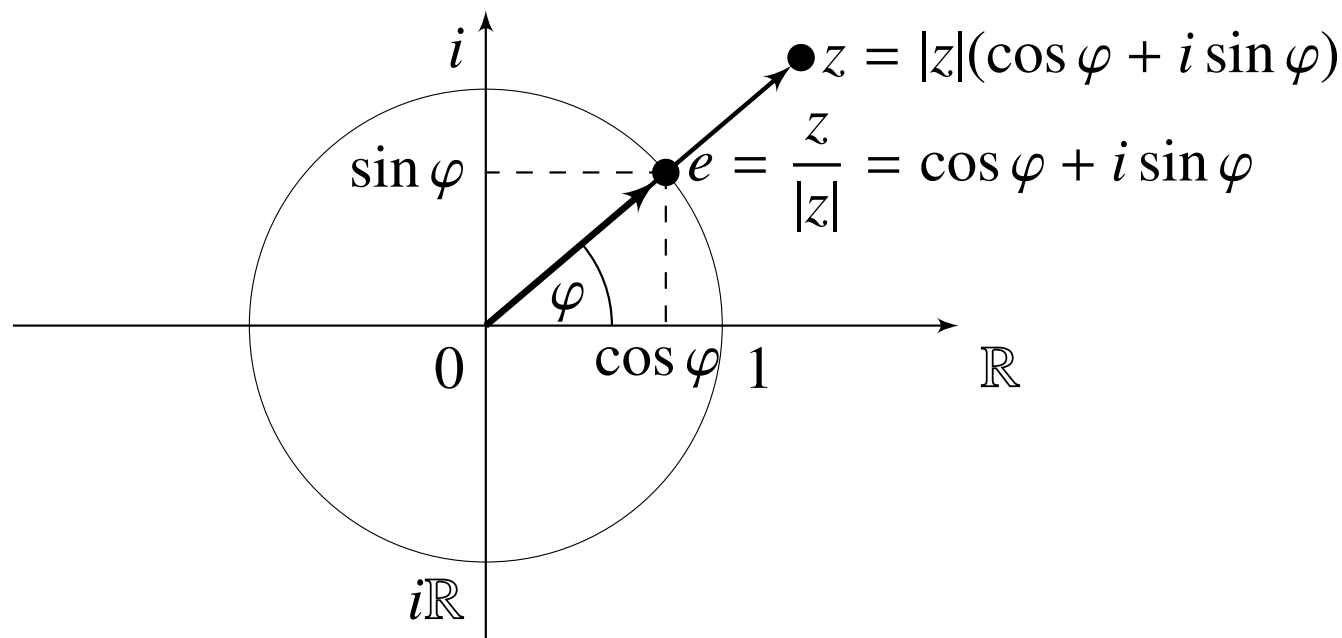
Legyen $a \in \mathbb{C}$ és definiáljuk a $\tau_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tau_a(z) = z + a$ leképezést. Ezek a leképezések pontosan a komplex számsík eltolásai.



Polárkoordináták a komplex síkon

Definíció: Polárkoordináták a komplex síkon

Legyen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ komplex szám. A $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ számot z **normájának** vagy **abszolútértékének** nevezzük. Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ szám $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ alakban írható, φ -t a z **argumentumának** mondjuk.



Szorzás a komplex síkon

Állítás: Szorzás a komplex síkon

Két komplex szám szorzásakor az abszolútértékek összeszorzódnak, az argumentumok pedig összeadódnak. Más szóval a $\lambda_w : z \mapsto wz$ leképezés 0 körüli **forgatva nyújtás**.

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$w = s(\cos \beta + i \sin \beta)$$

$$zw = rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

