

Algebrai görbék

Példák

Nagy Gábor Péter

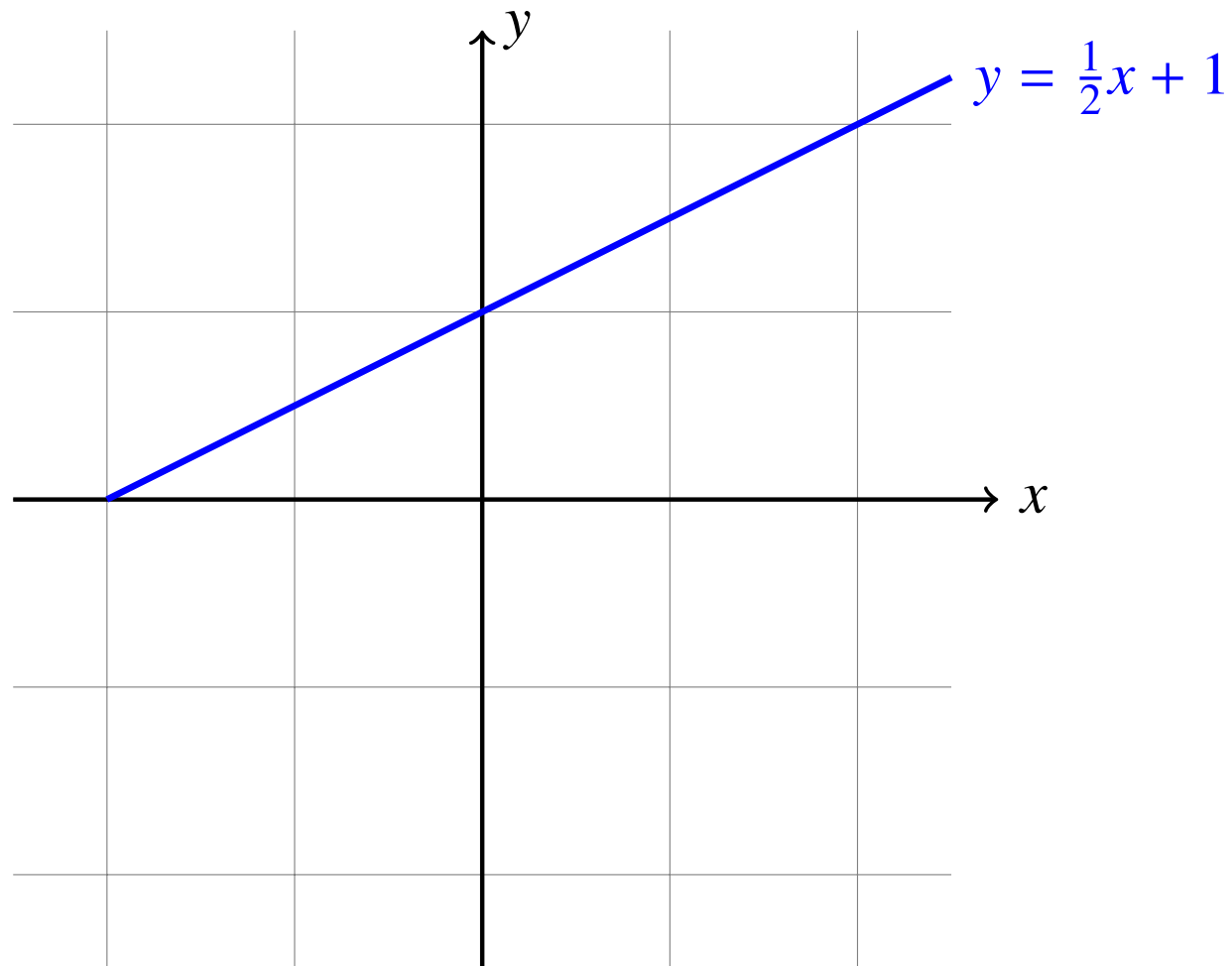
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet, Geometria Tanszék

2011/2012-os tanév II. féléve

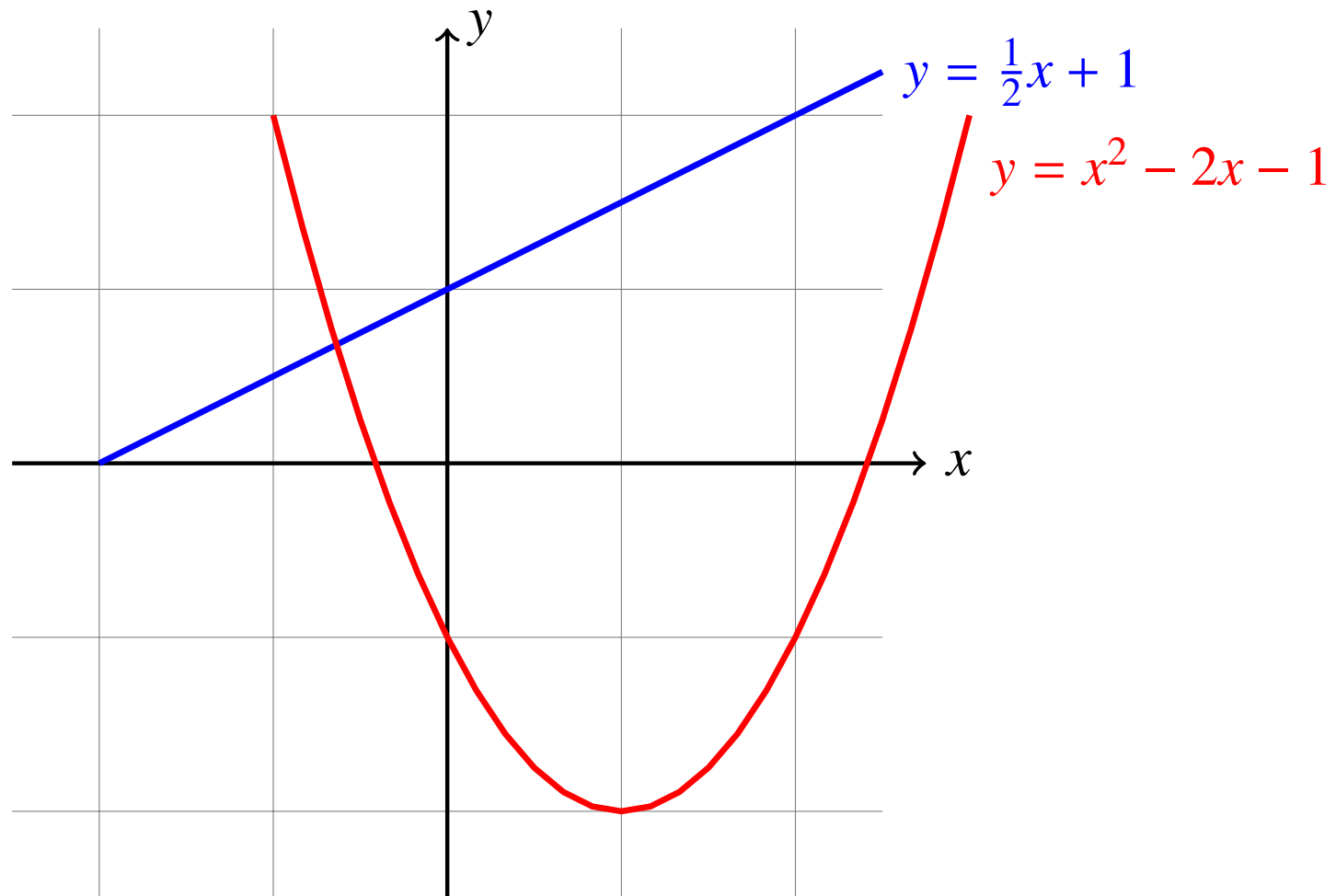
Tagolás

- 1 Példák algebrai görbékre
 - Polinomok grafikonjai
 - Kúpszeletek
 - Harmadrendű görbék
 - Magasabb fokú görbék

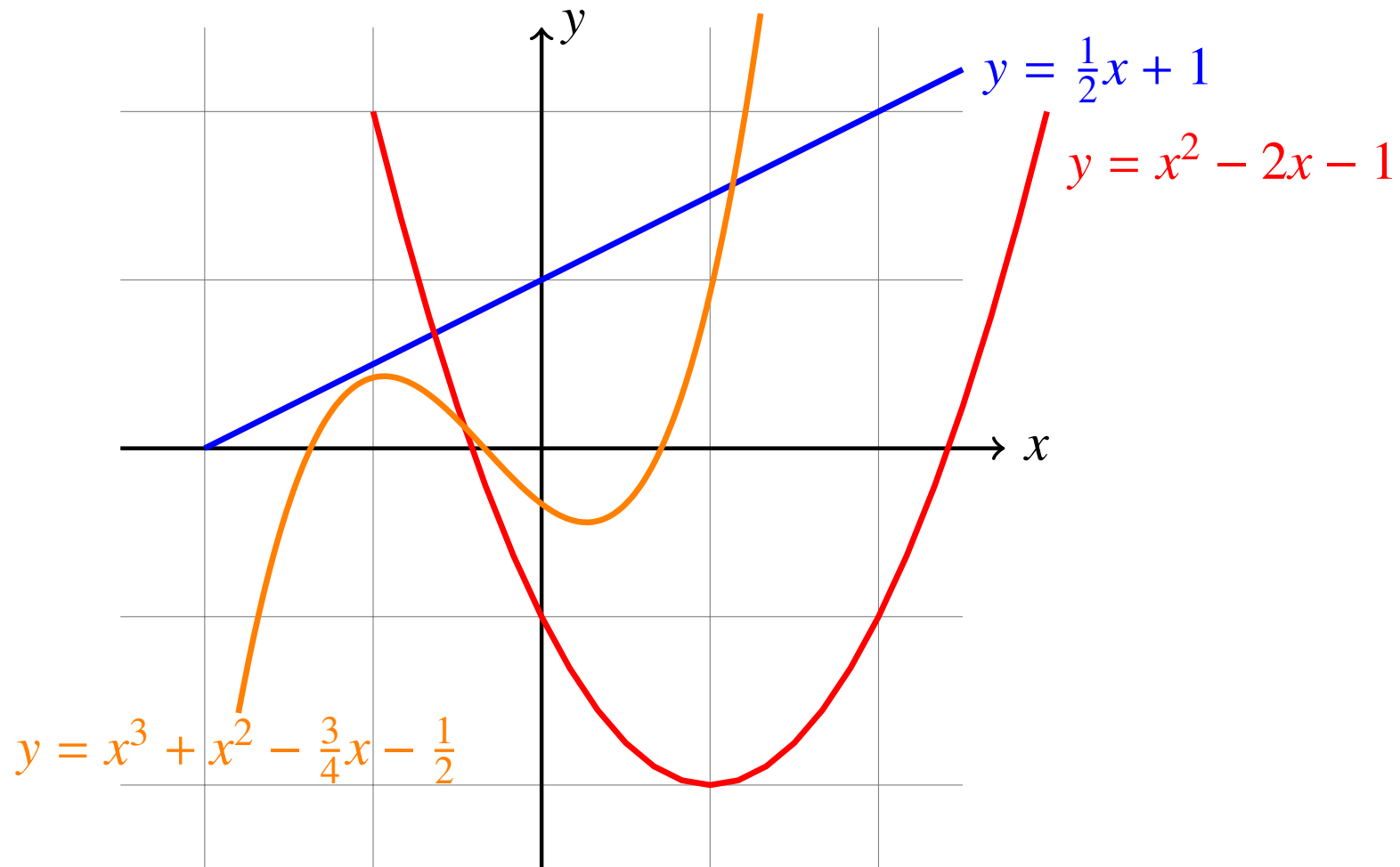
Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



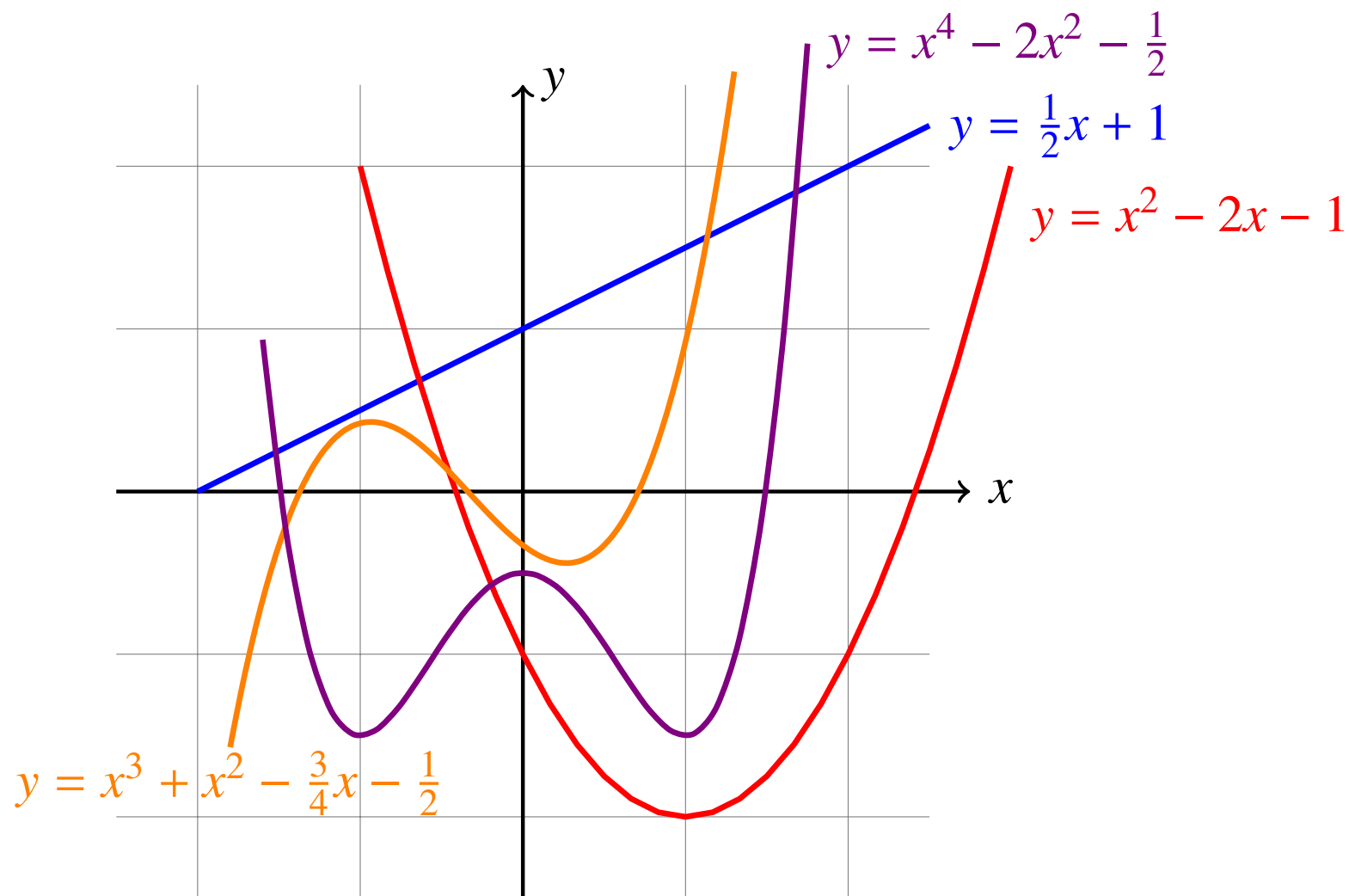
Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



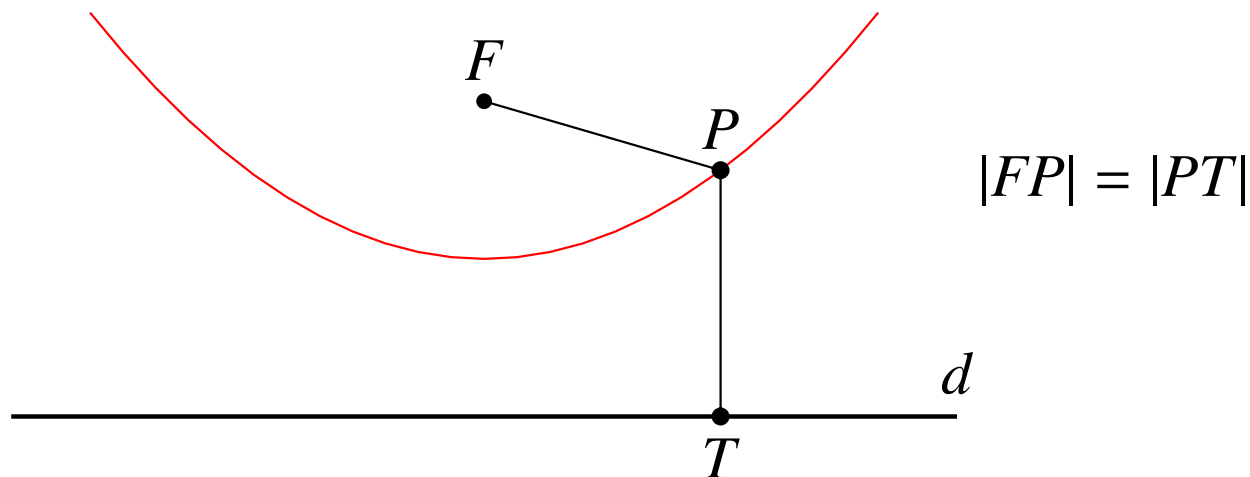
Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



A parabola

Definíció

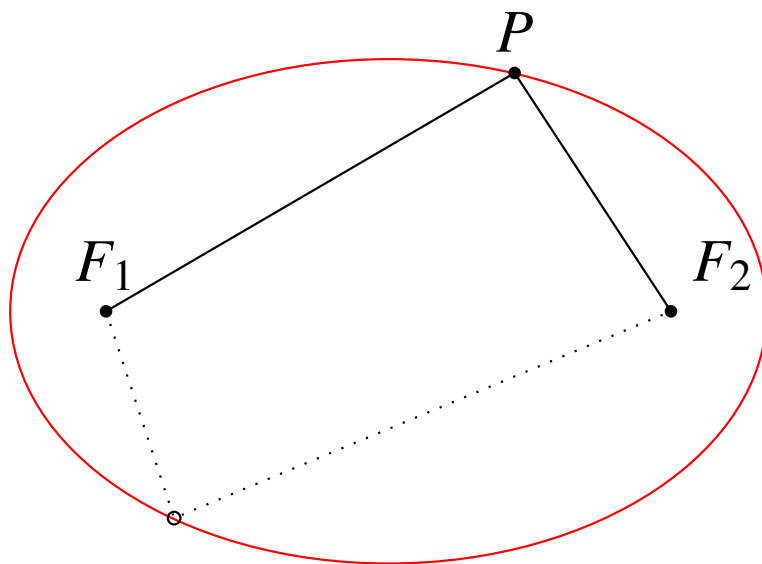
Adott a d egyenes (vezéregyenes, direktrix) és az F pont (gyújtópont, fókusz). Azon pontok mértani helyét, melyek távolsága d -től és F -től egyenlő, **parabolának** nevezzük.



Az ellipszis

Definíció

Adottak az F_1, F_2 pontok (gyűjtőpontok, fókuszok) és az $r > |F_1F_2|$ távolság. Azon pontok mértani helyét, melyek F_1, F_2 -től távolságainak **összege** r , **ellipszisnek** nevezzük.

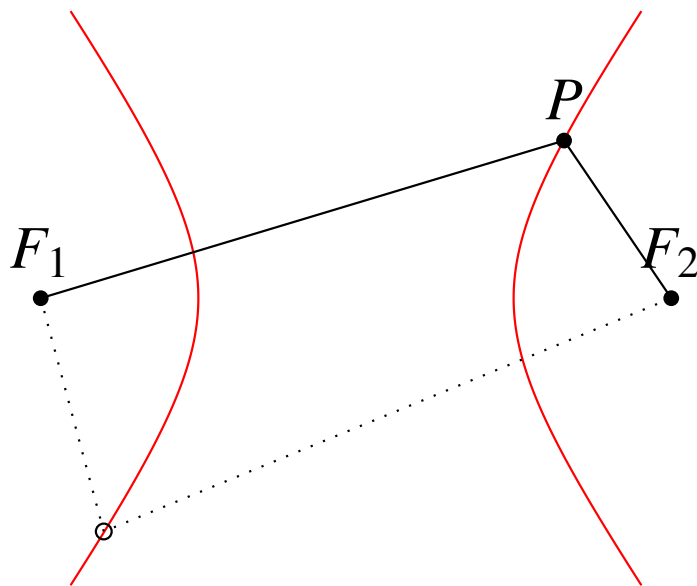


$$|F_1P| + |PF_2| = r$$

A hiperbola

Definíció

Adottak az F_1, F_2 pontok (gyűjtőpontok, fókuszok) és az $r < |F_1F_2|$ távolság. Azon pontok mértani helyét, melyek F_1, F_2 -től távolságainak **különbsége** r , **hiperbolának** nevezzük.



$$|F_1P| - |PF_2| = \pm r$$

Kúpszeletek kanonikus egyenlete

Definíció

A parabolákat, ellipsziseket és hiperbolákat összefoglaló néven **kúpszeleteknek** nevezzük.

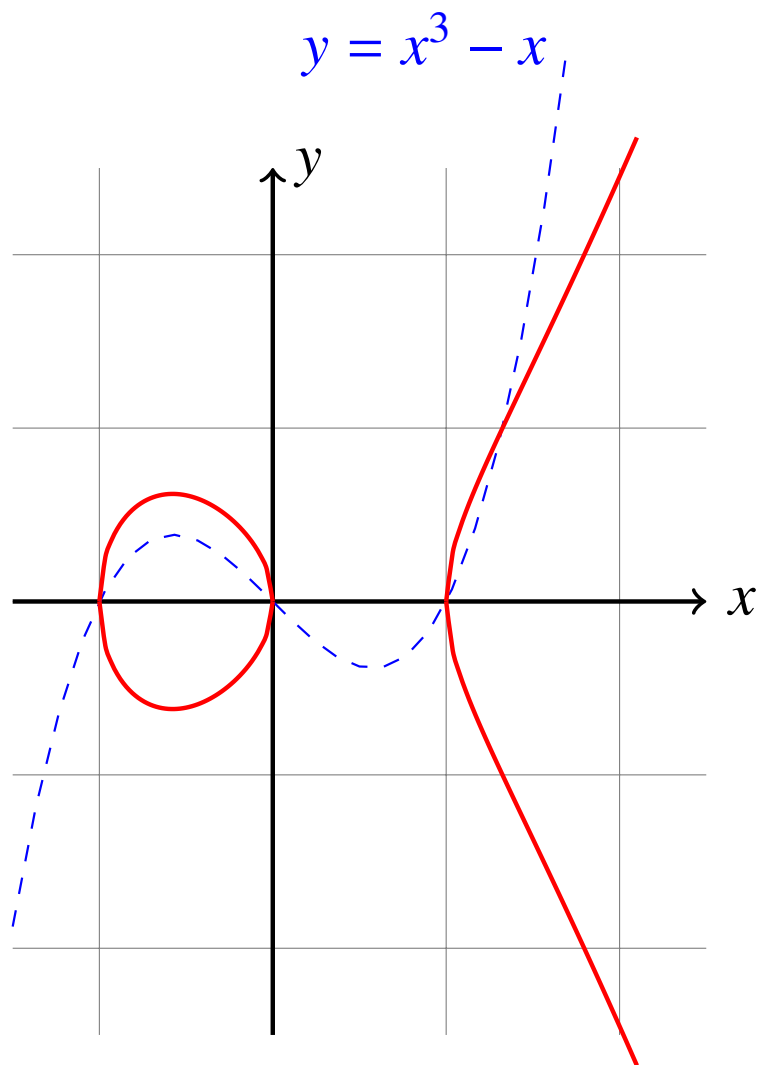
Tétel

A Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer **megfelelő megválasztásával** a kúpszeletek egyenlete az alábbi **kanonikus alakra** hozható:

- Parabola: $X^2 = 2pY$.
- Ellipszis: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$.
- Hiperbola: $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$.

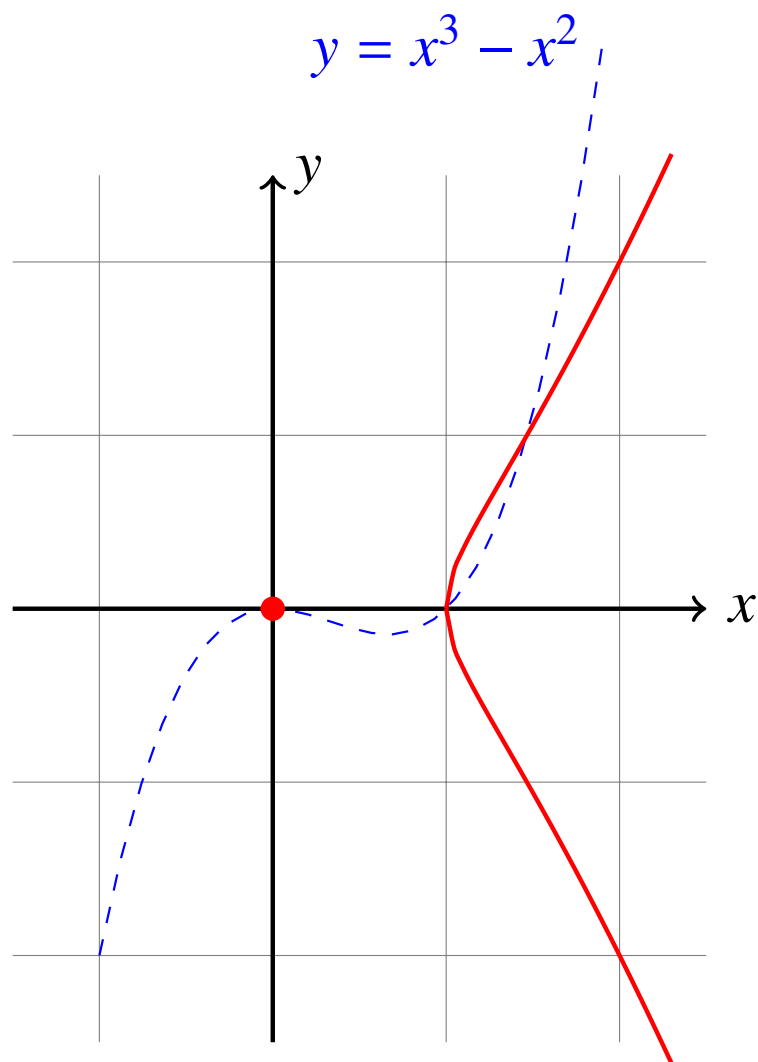
Az a, b, p valós számoknak **geometriai jelentés** tulajdonítható.

Szinguláris pont nélkül: $Y^2 = X^3 - X$



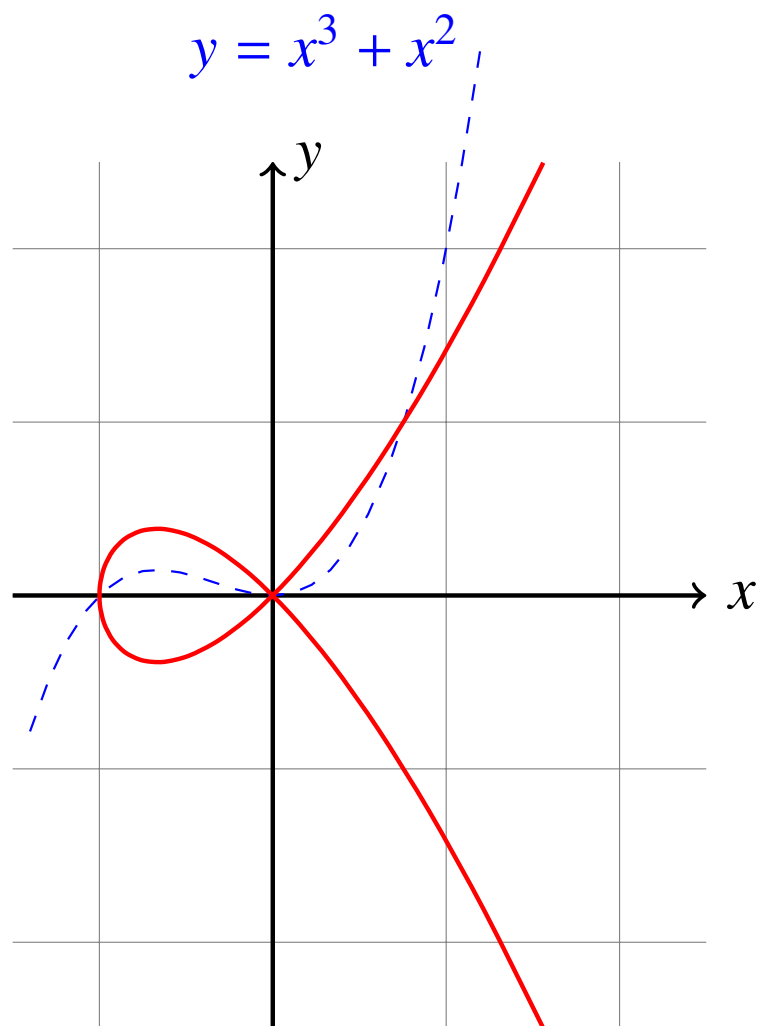
- Ennél a görbénél az $f(x) = \pm \sqrt{x^3 - x}$ „függvény” grafikonját kell vizsgálnunk.
- Ezért az ábrán feltüntettük az $y = x^3 - x$ grafikont is.
- Világos, hogy f értelmezés tartománya $[-1, 0] \cup [1, \infty)$.
- Érdekes módon a görbe a $(-1, 0)$, $(0, 0)$ és $(1, 0)$ pontokban „kisimul”, azaz tudunk hozzá **érintőt húzni**.

Izolált ponttal: $Y^2 = X^3 - X^2$



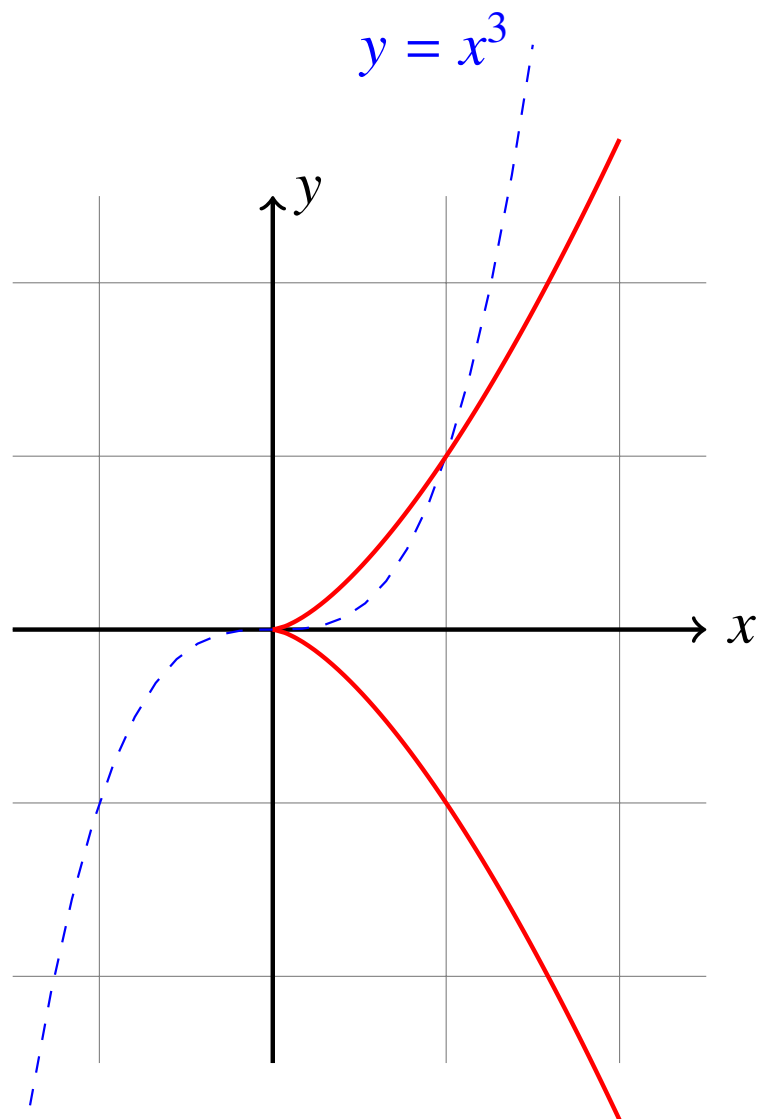
- Az előzőhöz hasonlóan, az $y = x^3 - x^2$ segédgrafikon felhasználásával tudjuk megadni a görbénk alakját.
- Érdekeség, hogy a görbe két **összefüggőségi komponensből** áll, melyek közül az egyik egyetlen pont.
- Az ilyen pontokat a görbe **izolált pontjainak** nevezzük.
- Izolált pontba természetesen nem tudunk érintőt húzni.

Közönséges szingularitással: $Y^2 = X^3 + X^2$



- A görbét a szokásos módon, az $y = x^3 + x^2$ grafikon felhasználásával rajzoljuk meg.
- Azt látjuk, hogy a görbe az origóban **átmetszi magát**.
- Az origótól különböző pontokban a görbe sima.
- Az origóban a görbe két **„sima ága”** metszi egymást.
- Itt többféle értelemben beszélhetünk érintő egyenesről, ehhez azonban előbb az **érintő fogalmát** kell majd tisztáznunk.

Csúcsszerű (cuspidális) szingularitással: $Y^2 = X^3$



- Ezen görbe 90°-os elforgatottjával már találkozhattunk, ez az $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ függvény grafikonja.
- Az origótól különböző pontokban a görbe sima.
- Az origóban a két „ágnak” **közös érintője** van.

Görbék paraméterezése

A görbék ábrázolását nagyban megkönnyíti, ha fel tudjuk őket fogni, mint a számegyenes folytonos képe.

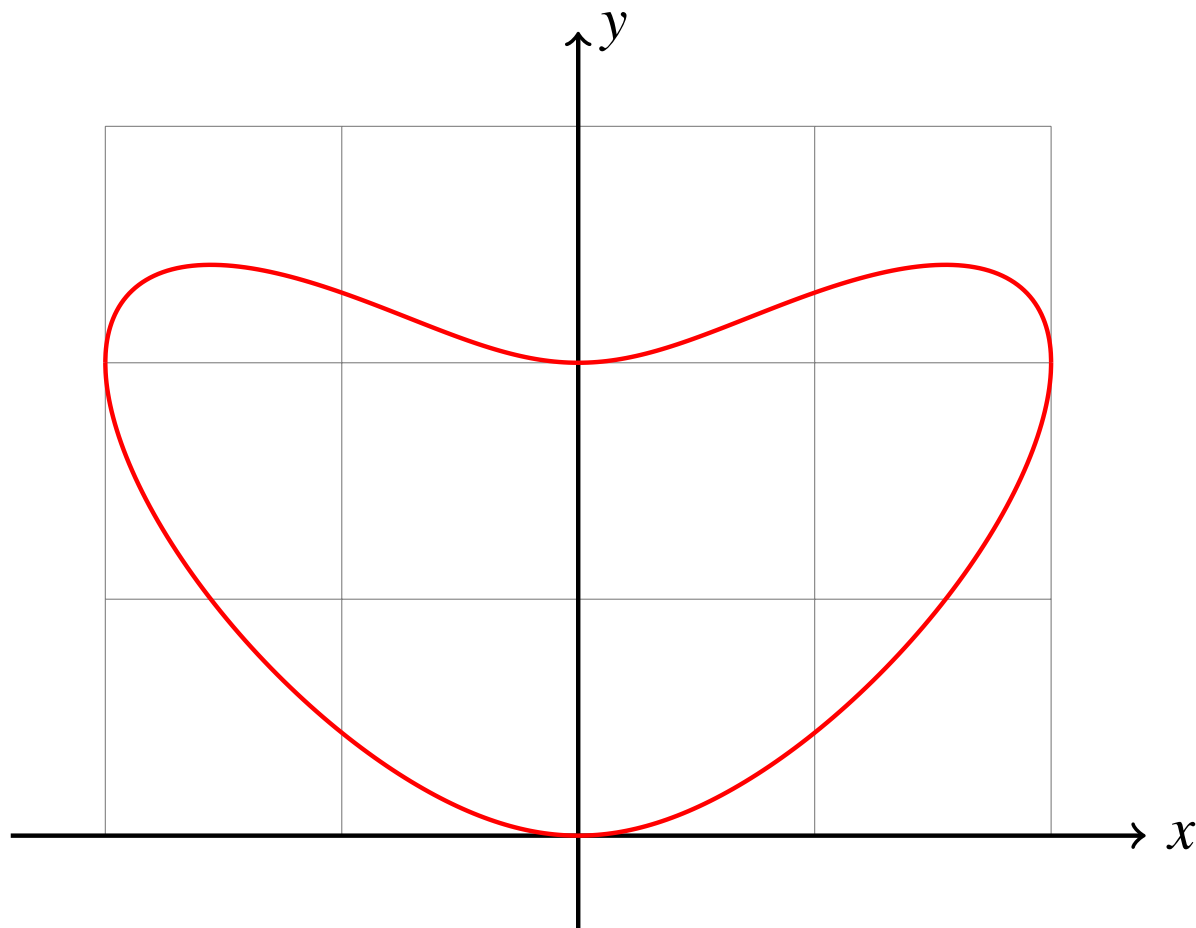
Definíció

Azt mondjuk, hogy az $u(t), v(t)$ függvények **paraméterezik** az $f(X, Y) = 0$ görbét, ha a görbe minden $P(x, y)$ pontjához létezik $t \in \mathbb{R}$, melyre $x = u(t), y = v(t)$.

- **VIGYÁZAT!** Egy görbének **végtelen sok** paraméterezése is lehet!
- $u(t), v(t)$ értelmezési tartománya $\mathbb{R}$ egy részhalmaza.
- Időnként a „**görbe minden P** ” pontjához feltételt a „**görbe kellően sok P pontjához**” feltétellel helyettesítjük.
- Minden egyenes paraméterezhező **lineáris függvényekkel**: $x = u_1 t + u_2$, $y = v_1 t + v_2$.
- Az $f(x)$ függvény **grafikonjának** a paraméterezése $x = t, y = f(t)$.

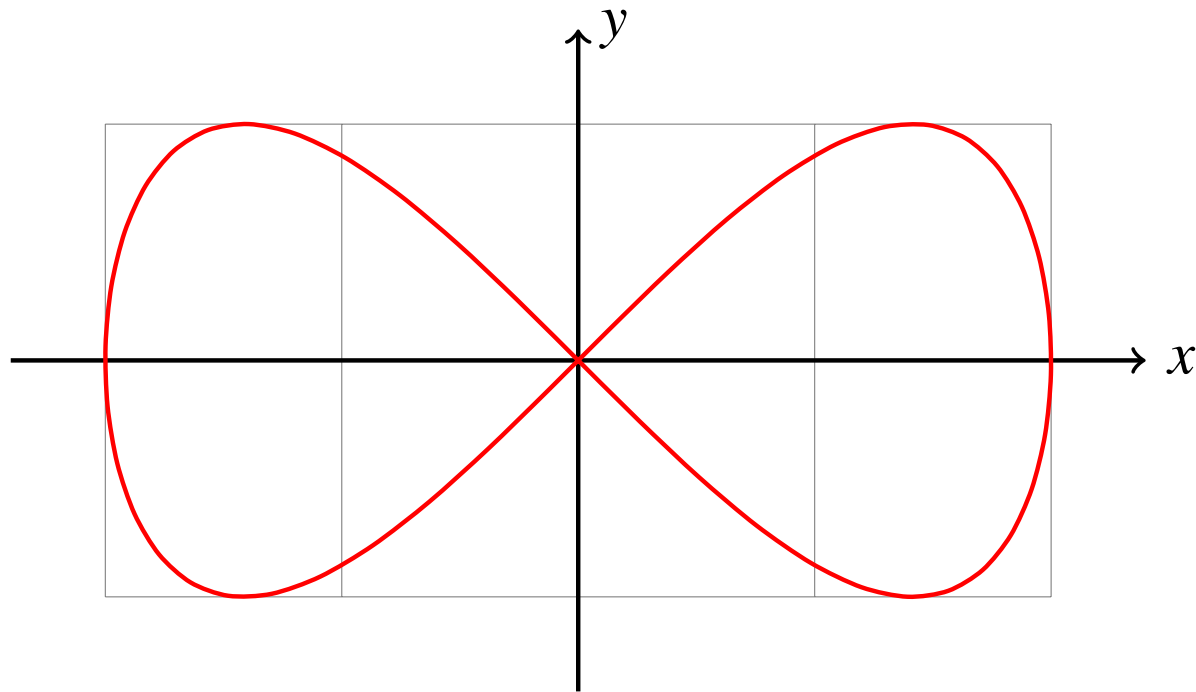
A bumeráng-görbe $Y(X^2 + Y^2) - X^4 - Y^4 = 0$

- Paraméterezés: $x = \frac{t(1+t^2)}{1+t^4}, \quad y = \frac{1+t^2}{1+t^4}.$



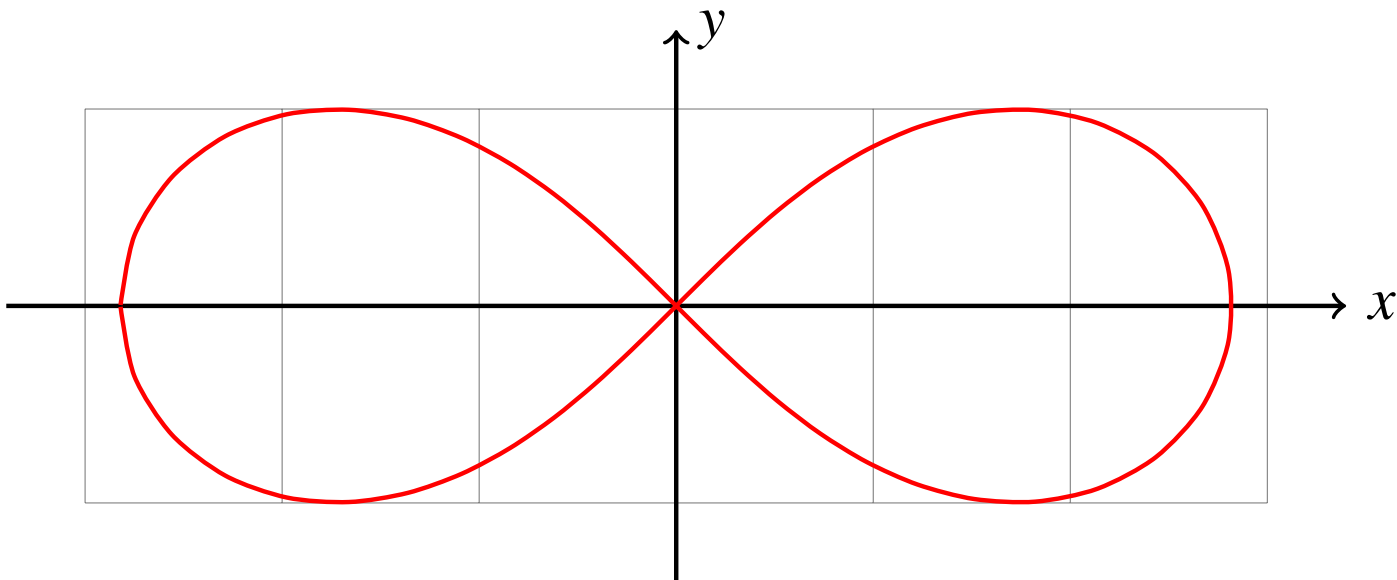
A nyolcas-görbe $Y^2 - X^2 + X^4 = 0$

- Paraméterezés: $x = \sin t, \quad y = \cos t \sin t.$



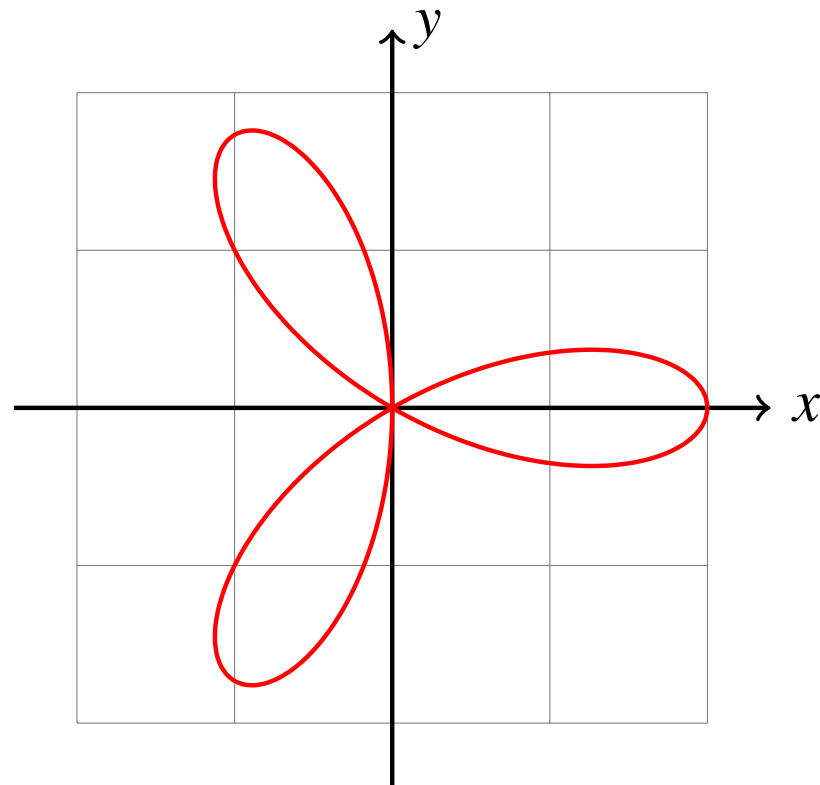
A Bernoulli-féle lemniszkáta $(X^2 + Y^2)^2 - 2(X^2 - Y^2) = 0$

- Paraméterezés: $x = \frac{\sqrt{2} \cos t}{\sin^2 t + 1}, \quad y = \frac{\sqrt{2} \cos t \sin t}{\sin^2 t + 1}.$



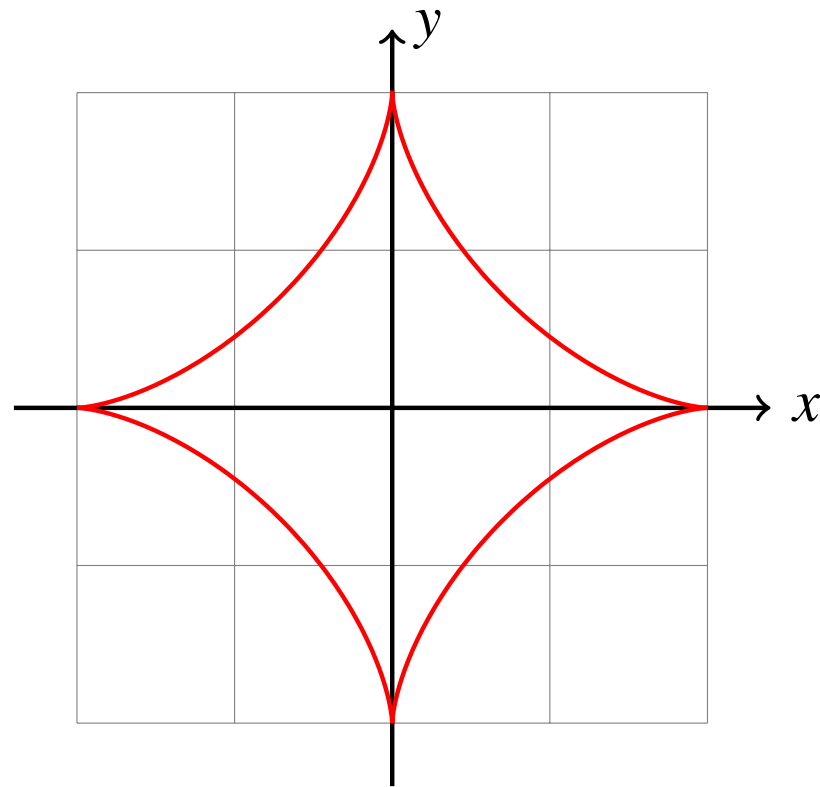
A háromlevelű lóhere görbe $(X^2 + Y^2)^2 - X^3 + 3XY^2 = 0$

- Paraméterezés: $x = \cos(3t) \cos t$, $y = \cos(3t) \sin t$.



Az asztroid $(1 - X^2 - Y^2)^3 - 27X^2Y^2 = 0$

- Paraméterezés: $x = \sin^3 t, \quad y = \cos^3 t.$



A Trott-féle görbe

- Egyenlete: $144(X^4 + Y^4) - 225(X^2 + Y^2) + 350X^2Y^2 + 81 = 0$.
- A paraméterezéshez keressük meg előbb a $144(X^2 + Y^2) - 225(X + Y) + 350XY + 81 = 0$ hiperbola egy paraméterezését.
- Számoljuk meg a **kétszeresen érintő** egyeneseket!

