1.

A sík axiomatikus tárgyalása
axiómacsoportok, alapfogalmak

Adott 2 halmaz: Π : pontok halmaza
Γ : egyenesek halmaza

I. Illeszkedési axiómák:

① Létezik 2 különböző egyenes, és minden egyenesre legalább 2 pont illeszkedik.

② Bármely 2 különböző ponthoz pontosan 1 egyenes illeszkedik.

③ Párhuzamossági axióma: bármely (e) egyenes és (P) pont esetén létezik pontosan egy (f) egyenes, amelyre teljesül, hogy: $P \in f$ és $e \parallel f$.

Két egyenes egymáshoz való viszonya:
→ diszjunkt
→ 1 közös pontjuk van
→ 2 közös pontjuk van. ⇒ egybeesnek!

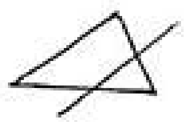
Def: 2 egyenes párhuzamos, ha nincs közös pontjuk, vagy egybeesnek.

Tétel/ egyenesek párhuzamossága ekvivalenciareláció

Def: a párhuzamosság relációhoz tartozó ontályozás osztályait irány-oknak nevezzük.

II. Rendezési axiómák:

1. minden egyeneshez adott 2 egymással ellentétes teljes rendezés jel: $(\leq ; \geq)$
2. Pasch axióma: Bármely Δ és bármely olyan egyenes esetén, amely nem illeszkedik a Δ egyik csúcsára sem, de egyik oldalát metszi, akkor pontosan még egy oldalt metsz.



Fogalmak:

Közrefogás: tekintsünk 3 pontot, amelyek 1 egyenesre esnek. P, Q, R kollineáris pontok esetén Q P és R között van. (~ P és R közrefogják Q-t) akkor és csak akkor: ha az egyenesükön valamely rendezésben $P \leq Q \leq R$ vagy $P \geq Q \geq R$ teljesül.

Szakasz: P, Q pontok által meghatározott szakasz a P és Q pontok által közrefogott pontok halmaza, jele: $\overline{PQ}$

Félegyenes: adott egy e egyenes és egy rá illeszkedő P pont. e egyenesen a P pont által meghat. félegyenes az e-n valamely rendezésben a P-nél kisebb, ill. P-nél nagyobb pontok halmaza.

Háromszög: Három nem kollineáris pont $\Rightarrow$ A háromszög oldalai: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

Félsík: vezessük be a köv. relációt: ρ, ha adott e egyenes
$P, Q \in \Sigma \setminus e$ $\quad P \rho Q \iff \overline{PQ} \cap e = \emptyset$
Ez a ρ reláció ekvivalencia rel., és az ekvivalencia ost.-ai a félsíkok. Áll: [illegible]

III. Metrikus axiómák:

Tekintsünk egy hozzárendelést, amely $\forall$ P, Q pontpárhoz egy valós számot rendel a következőképpen:

① : $|\overline{PQ}| \geq 0$

$|\overline{PQ}| = 0 \iff P = Q$

② : A $\overline{PQ}$-hoz hozzárendelt szám legyen ugyanannyi, mint a $\overline{QP}$-hez rendelt szám.

③ : $\forall$ P, Q, R ponthalmaz esetén:

$|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| \geq |\overline{PR}|$ Δ-egyenlőtlenség

„$=$" $\iff$ P és R közrefogja Q-t.

④: Folytonossági axióma: $\forall$ P kezdőpontú félegyenes és $\forall$ $\lambda \geq 0$ valós szám esetén létezik olyan Q pont a félegyenesen, hogy a $\overline{QP}$-hez rendelt szám λ.

IV. Izometriák:

Def: Az izometria a sík önmagára vonatkozó távolságtartó leképezése.

Tétel: Az izometria olyan leképezés, amely szakasz-, egyenes-, félegyenestartó és bijektív.

T_1 : Tengelyes tükrözés axiómája: a sík minden e egyeneséhez pontosan egy φ izometria létezik, amely az e egyenes minden pontját fixen hagyja, és az e két félsíkját felcseréli.

Tétel: A T_1-ben szereplő φ egyértelműen meghatározott és φ^2 az identitást adja.

V. Merőlegesség

Def: h merőleges g-re, ha $h \neq g$ és g-re tükrözve h-t önmagát kapom.

$\boxed{\text{Állítás}}$: ① a merőlegesség szimmetrikus reláció
② bármely ⓔ egyenes és ⓟ pont esetén pontosan egy f egyenes létezik, hogy: $P \in f$ és $e \perp f$

Def: A P, Q pontok által meghatározott szakasz felezőmerőlegese a PQ-ra merőleges, PQ felezőpontján áthaladó egyenes.

$\boxed{\text{Állítás}}$: R eleme PQ szakaszfelező merőlegesének $\Longleftrightarrow$ $|PR| = |QR|$

A tér axiomatikus tárgyalása
axióma csoportok, alapfogalmak

Tekintsük: a Σ, Π, Γ halmaz halmazt, ahol:

Σ: síkok halmaza
Π: pontok halmaza
Γ: egyenesek halmaza

I. Illeszkedési axiómák:

1. létezik 3 nem kollineáris pont, és bármely egyenesre legalább 2 különböző pont illeszkedik.
2. bármely két különböző ponthoz pontosan egy egyenes illeszkedik.
3. bármely 3, nem kollineáris ponthoz pontosan 1 sík illeszkedik.
4. Ha egy egyenes két különböző pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes minden pontja illeszkedik rá.
5. Ha 2 síknak létezik egy közös pontja, akkor létezik még egy ettől különböző közös pontjuk is.
6. Van 4 pont, amelyek nincsenek egy síkban.
7. Párhuzamossági axióma: minden (g) egyeneshez és minden (P) ponthoz ∃! olyan egyenes, amely átmegy a (P) ponton és párhuzamos a g egyenessel.

Def: Egyenesek párhuzamossága:
e és f egyenesek párhuzamosak, ha:
$\begin{cases} e = f \\ e \cap f = \emptyset \end{cases}$, tehát ha: nincs közös pontjuk, de van közös síkjuk.

$\boxed{\text{Tétel}}$: A fent definiált párhuzamossági reláció ekvivalenciareláció!

Def: Irány: a párhuzamossági reláció ekvivalencia-osztályai

Térbeli egyenesek egymáshoz való viszonyai: (síkok)

1. 2 sík párhuzamos, ha pontosan ként megegyeznek vagy nincs közös pontjuk
2. 1 sík és egy egyenes párhuzamos, ha nincs közös pontjuk, vagy a sík tartalmazza az egyenest.
3. 2 egyenes párhuzamos, ha egybeesnek, vagy ha nincs közös pontjuk, de van közös síkjuk.
4. 2 egyenes metsző, ha egy síkban vannak és nem párhuzamosak.
5. 2 egyenes kitérő, ha nincs közös síkjuk

Egyenesek és síkok kölcsönös helyzete:

① 2 egyenes vagy metsző vagy párhuzamos vagy kitérő
② 1 egyenes és egy sík vagy egy pontban metszik egymást, vagy párhuzamosak.
③ 2 sík vagy párhuzamos, vagy egy egyenesben metszik egymást
④ 3 síknak vagy nincs közös pontja, vagy 1 közös pontjuk van, vagy egy közös egyenesre illeszkednek
⑤ Egy síkhoz egy adott ponton keresztül egy és csak egy párhuzamos sík fektethető.

⑥ Ha h és g kitérő egyenesek, akkor a h egyenesre pontosan egy sík illeszthető, amely párhuzamos g-vel. Ezt utóbbi síkot h pontjain keresztül haladó és a g-vel párhuzamos egyenesek feszítik ki.

II. Rendezési axiómák:

① A tér minden egyenesén adott 2 egymással inverz teljes rendezés
② A tér minden síkjában érvényes a Pasch-axióma

III. Metrikus axiómák: ua. mint a síkban

IV. Izometriák:

Def: A tér egy önmagára vonatkozó távolságtartó leképezését **izometriának** nevezzük.

Tétel: A térizometriák kéreszfogtak, szakaszt, egyenest, síkot, félegyenest, félsíkot, félteret tartók és bijektívek.

T_1 Síkra tükrözések axiómája:
A tér minden síkjához létezik egy izometria, amely a sík pontjait fixen hagyja és a két félteret felcseréli egymással.

Állítás: Ez a T_1-beli izometria egyértelmű és involutív (négyzete az identitás) (jele: τ_Σ)

Def: Két sík **merőlegessége**:
Σ és Δ síkok merőlegesek, ha $\Sigma \neq \Delta$ és $\tau_\Sigma(\Delta) = \Delta$

Állítás: A síkok merőlegessége szimmetrikus reláció.

Def: Sík és egyenes **merőlegessége**: e egyenes merőleges a Σ síkra $\Longleftrightarrow$ ha $\begin{cases} e \not\subset \Sigma \text{ és} \\ \tau_\Sigma(e) = e \end{cases}$

Def: **Transzverzális**: olyan egyenes, amely 2 egyenest metsz.

Def: **Normáltranszverzális**: olyan egyenes, amely 2 egyenest metsz, és mindkettőre merőleges.

Állítás: Kitérő egyeneseknek mindig pontosan egy normáltranszverzálisa van.

3.

Síkizometriák, antiizometriák típus szerinti osztályozása

Síkizometriák:

(1) Tengelyes tükrözés (→ lsd. tengelyes tükrözés axiómája)
(2) Forgatások: 2 metsző tengelyekre vonatkozó tengelyes tükrözések szorzata. (A forgatás centruma: a 2 tengely metszéspontja)

Tétel: Ha egy forgatás esetében egy centrumon kívüli pont fix, akkor ez az identitás.

Tétel: Tengelyek szabadon választhatóságának tétele:
Forgatás tengelyes tükrözések szorzataként való előállításában akár az egyik, akár a másik tengely szabadon választható (a centrumon átmenő egyenesek közül), ekkor a másik egyértelműen meghatározott.

Segédtétel: 3 egy ponton átmenő egyenesre vonatkozó tükrözések szorzata tengelyes tükrözés.

Állítás: 3 egy ponton átmenő egyenesre:
$$\tau_g \tau_f \tau_e = \tau_e \tau_f \tau_g$$

Tétel: Azonos centrumú forgatásokra érvényesek a köv. tulajdonságok:
a) kétazonos centrumú forgatás szorzata is ezen centrumú forgatás
b) φ^{-1} is C centrumú forgatás (ha φ az)
c) az identitás is forgatás
d) $\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_2 \varphi_1$

⇒ Azonos centrumú forgatások Ábel-csoportot alkotnak.

Speciális fajtáik: Centrális tükrözés

Két merőleges egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözés szorzata

(3) Eltolások: 2 párhuzamos tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés szorzata.

Segédtétel: 3 párhuzamos párhuzamos tengelyre vonatkozó tükrözés szorzata helyettesíthető 1 velük párhuzamos tengelyre vonatkozó tükrözéssel.

Tétel: Bármely két centrális tükrözés szorzata eltolás, és minden eltolás előáll két centrális tükrözés szorzataként.

Segédtétel: 3 centrális tükrözés szorzata helyettesíthető 1 centrális tükrözéssel.

Tétel: (Centrumok szabad választhatóságának tétele)
Egy eltolás centrális tükrözéssel való előállításában az egyik centrum szabadon választható, míg a fennmaradó egyértelműen meghatározott.

Tétel: A sík eltolásai Ábel-csoportot alkotnak.

a) 2 eltolás szorzata eltolás
b) Az identitás eltolás, és eltolás inverze is eltolás.
c) Eltolások szorzata kommutatív

(4) Csúsztatva tükrözés:

Olyan síkizometria, amely előáll 3 tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés szorzataként, ahol a 3 tengely ... ...

Fixponttételek:

1. Tétel: Ha egy síkizometria 3 nem kollineáris pontot fixen hagy, akkor az az identitás.

2. Tétel: Ha egy síkizometriának 2 fixpontja van, amelyek különbözőek, akkor az izometria tengelyes tükrözés a 2 egyenesen vagy identitás.

3. Tétel: Ha egy síkizometriának van fixpontja, akkor az vagy identitás, vagy 2 metsző egyenesre való tükrözés szorzata, vagy tengelyes tükrözés.

4. Tétel: Minden síkizometria előáll legfeljebb 3 tengelyes tükrözés szorzataként.

Síkizometriák osztályozási tétele:

Állítás: Minden síkizometria vagy tengelyes tükrözés, vagy forgatás, vagy eltolás, vagy csúsztatva tükrözés.

Biz: Tudjuk, hogy a síkizometria előáll legfeljebb 3 tengelyes tükrözés szorzataként.

1.) 1 tengelyes tükrözés → tengelyes tükrözés
2.) 2 tengelyes tükrözés → 2 tengely metsző ⇒ forgatás
→ 2 tengely párhuzamos ⇒ eltolás
3.) 3 tengelyes tükrözés $\varphi = t_g t_f t_e$
→ ha $e \parallel f \parallel g$ ⇒ φ 1 tengelyre vonatkozó tükrözéssel helyettesíthető
→ ha e, f, g egy ponton megy keresztül ⇒ φ tengelyes tükrözés
→ ha e, f, g-nek van metszéspárja ⇒ a 3 tengely $t_g t_f$ helyzetbe hozható (a forgatás tengelyének másodikán vál.-t kollineárisa

Állítás: ① 2 forgatás szorzata ⇒ forgatás vagy eltolás
② forgatás és eltolás szorzata ⇒ forgatás v. eltolás
③ 2 eltolás szorzata ⇒ eltolás

Állítás: ① Páros sok tengelyes tükrözés szorzata előáll 2 tengelyes tükrözés szorzataként.
② Páratlan sok tengelyes tükrözés szorzata előáll 1 vagy 3 tengelyes tükrözés szorzataként.
③ Páros sok tengelyes tükrözés szorzata soha nem egyezhet meg páratlan sok tengelyes tükrözés szorzatával!

Síkizometriák egy másik osztályozása:

① Mozgások: Azon síkizometriák, melyek előállnak páros sok tengelyes tükrözés szorzataként (→ irányítástartó transzformáció)
② Irányítás-váltó transzformáció: ptl. sok tengelyes tükrözés szorzataként előálló síkizometria

Konjugálás: 1.) $\alpha \tau_e \alpha^{-1} = \tau_{\alpha(e)}$
2.) $\alpha \tau_{e_n} \cdots \tau_{e_1} \alpha^{-1} = \tau_{\alpha(e_n)} \cdots \tau_{\alpha(e_1)}$

Állítás: Két tengelyes tükrözés szorzata nem helyettesíthető egy tengelyes tükrözéssel.

Állítás: $\tau_e \circ \tau_f = \tau_f \circ \tau_e \Leftrightarrow e \perp f$ vagy $e = f$

Térizometriák, a térizometriák típus szerinti osztályozása

Fixponttételek:

$\boxed{\text{1. Tétel}}$: Ha létezik egy térizometriának 4, nem egy síkban levő fixpontja ⇒ az izometria az identitás!

$\boxed{\text{2. Tétel}}$: Ha egy izometriának létezik 3 nem kollineáris fixpontja, akkor az izometria:
- az identitás
vagy
- egy síkra vonatkozó tükrözés!

$\boxed{\text{3. Tétel}}$: Ha egy izometriának létezik 2 fixpontja, akkor a térizometria:
- identitás
- síkra tükrözés vagy
vagy
- 2 síkra vonatkozó tükrözés szorzata, ahol a 2 sík metszés~~pontja~~ egyenese tartalmazza a 2 fixpontot (tengelyes forgatás)

$\boxed{\text{4. Tétel}}$: Ha létezik fixpontja egy térizometriának, akkor az:
vagy
- identitás
- 1 síkra-tükrözés
- 2 metsző síkra vonatkozó tükrözés szorzata
- 3, közös ponton átmenő síkra vonatkozó tükrözés szorzata

$\boxed{\text{Tétel}}$: Két síkra vonatkozó tükrözés szorzata nem egyezhet meg 1 síkra-tükrözéssel.

Speciális izometriák:

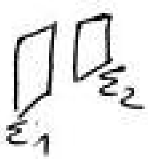
1. Síkra vonatkozó tükrözés

2. Tengely körüli forgatás (tengelyes forgatás)
olyan izometria, amely előáll 2 metsző síkra vonatkozó tükrözés szorzataként.

2.a Térbeli tengelyes tükrözés: Két egymásra $\perp$ síkra vonatkozó tükrözés szorzata.

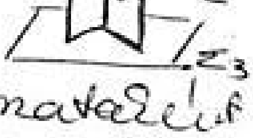
(Szabadsági fok tétel):
Tengelyes forgás síkra vonatkozó tükrözések szorzataként való előállításakor az első ill. a második sík szabadon választható (az adott egyenesen ill. forgástengelyen átmenő síkok közül a fennmaradó ezzel már egyértelműen meghatározott).

3. Térbeli eltolás:
2 párhuzamos síkra vonatkozó tükrözés szorzata $T_{\Sigma_2}\cdot T_{\Sigma_1}$, ahol $\Sigma_1 \| \Sigma_2$

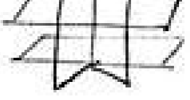


4. Térbeli csúsztatva tükrözés:
3 síkra vonatkozó tükrözés szorzata: $T_{\Sigma_3}\cdot T_{\Sigma_2}\cdot T_{\Sigma_1}$, ahol: $\Sigma_2 \| \Sigma_1$ és $\Sigma_3 \perp \Sigma_1, \Sigma_2$

5. Forgatva tükrözés:
3 síkra vonatkozó tükrözés szorzataként áll elő a transzformáció, ahol: $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ és $\Sigma_3 \perp \Sigma_1, \Sigma_2$



6. Csavarmozgás:
4 síkra vonatkozó tükrözés szorzataként előálló transzformáció: $T_{\Sigma_4}T_{\Sigma_3}T_{\Sigma_2}T_{\Sigma_1}$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$, $\Sigma_3 \| \Sigma_4$, $\Sigma_1, \Sigma_2 \perp \Sigma_3, \Sigma_4$



További fixpont tételek:

$\boxed{\text{5. Tétel}}$ Ha egy térizometriának pontosan 1 fixpontja van, akkor ez a térizometria a forgatva tükrözés (ahol a három sík közös pontja a fixpont)

$\boxed{\text{6. Tétel}}$ Ha egy térizometriának nincs fixpontja, akkor az:

- párhuzamos eltolás
  vagy
- csúsztatva tükrözés
  vagy
- csavarmozgás.

Térizometriák osztályozása

- aszerint, hogy hány síkra vonatkozó tükrözés szorzataként áll elő:

0 : identitás
1 : síkra tükrözés
2 : párhuzamos eltolás, tengelyes forgatás
3 : csúsztatva tükrözés, forgatva tükrözés
4 : csavarmozgás

Köv.: minden térizometria leírható legfeljebb 4 síkra vonatkozó tükrözés szorzataként

$\boxed{\text{Tétel}}$: 3 síkra vonatkozó tükrözés szorzataként előálló transzformáció
- síkra tükrözés,
vagy
- csúsztatva tükrözés
- forgatva tükrözés.

$\boxed{\text{Tétel}}$: 4 síkra vonatkozó tükrözés szorzata mindig csavarmozgás.

$\boxed{\text{Állítás}}$: Páros sok síkra vonatkozó tükrözés szorzata mindig előállítható 2 v. 4 síkra vonatkozó a tükrözés szorzataként.

Térizometriák másik osztályozása:

1. **Térmozgás:** (= irányítástartó térizometria)
   - olyan izometria, amely páros sok síkra vonatkozó tükrözés szorzataként állítható elő.

2. **Irányítás-váltó térizometria:**
   Páratlan sok síkra vonatkozó tükrözés szorzataként előálló térizometria.

Megjegyzés: ez az osztályozás diszjunkt!

5.

Hasonlósági transzformációk, hasonlóságok alaptételei, hasonlóságok fixponttételei

Hasonlósági transzformációk:

Def: A hasonlóság a sík vagy a tér önmagára való, a szögeket nem változtató, egyenes- és szögtartó bijekciója

[1] Középpontos/centrális hasonlóság

Def: Adott O pont és $\lambda \neq 0$ valós szám

P pont képe az a P' pont, amelyre $P' \in \overline{OP}$ (egyenes) és $\overrightarrow{OP'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP}$

Elnevezések: O: a középpontos hasonlóság középpontja
λ: a középpontos hasonlóság aránya

Tulajdonságai:
1.) Tartja a szakaszok arányát: $\left|\frac{P'Q'}{PQ}\right| = \lambda$
2.) A középpontos hasonlóság egyenestartó
3.) -ll- -ll- szögtartó
4.) Hasonlóságnál párhuzamos egyenes képe is párhuzamos

• Az 1.), 2.), 3.) tul.-ok általában teljesülnek a hasonlóságokra is

$\boxed{\text{Tétel}}$: Hasonlóságok alaptétele

Minden hasonlóság előáll egy izometria és egy centrális hasonlóság szorzataként.

Biz: Legyen φ hasonlóság, aránya λ

1. ha $\lambda = 1 \Rightarrow$ megkapjuk az izometriákat
2. legyen ψ centrális hasonlóság, melynek aránya: $\frac{1}{\lambda}$

Tek: $\psi\varphi$ hasonlóság $\Rightarrow$ aránya $\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow$

$\psi\varphi = \alpha$ izometria

$\psi\varphi = \alpha \Rightarrow \varphi = \psi^{-1}\alpha$, ahol ψ^{-1}: centrális hasonlóság

α : izometria

Általánosságban: ha ψ egy $\frac{1}{\lambda}$ arányú hasonlóság $\Rightarrow$ ψ^{-1} egy λ arányú hasonlóság

Következmény: Ha φ a szakaszok arányát tartó bijekció, akkor φ hasonlóság.

$\boxed{\text{Tétel}}$: Hasonlóságok fixponttétele

Minden nem izometrikus hasonlóságnak pontosan egy fixpontja létezik.

Biz:

I. Síkbeli eset:

a) Ha minden e egyenesre $e' \parallel e$

Lehetséges-e $\forall e$ esetén $e = e'$?

$\Rightarrow$ Nem, mert vevé 2 tetsz. egyenest, amire ez teljesül — p' p' fixpont $\forall p$-re $\lightning$

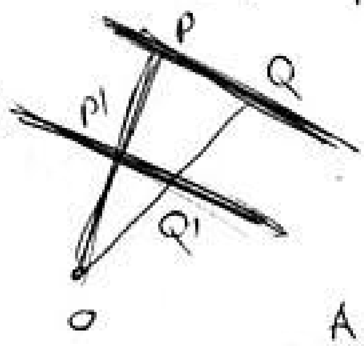
$p \in e_1, e_2 \Rightarrow p' \in e_1', e_2' \Rightarrow p = p' \Rightarrow$ identikus leképezés

$e_1' = e_1$, $e_2' = e_2$

$\Rightarrow$ van olyan e', hogy $e' \neq e$, de $e' \parallel e$.

Ekkor $PP' \nparallel QQ'$, mert különben $PP'QQ'$ paralelogramma, azaz $|PQ| = |P'Q'|$, ami viszont nem lehet, mert a transzformáció nem izometrikus.

Tehát $PP' \nparallel QQ' \Rightarrow$ egy pontban metszik egymást, legyen a metszéspont O. $PP' \cap QQ' = O$



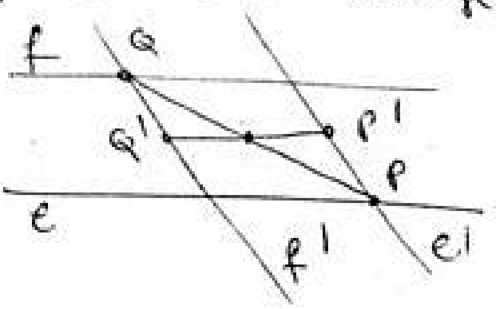
ÁLL.: O fixpont.

A PP' egyenes képe átmegy P'-n és párhuzamos PP'-vel $\Rightarrow$ $PP' = PP'$ egyenes képe (def. szerint)

Hasonlóan $QQ' = QQ'$ egyenes képe

$O' = PP' \cap QQ' \Rightarrow O = O'$

b, Létezik e, hogy $e' \parallel e$; $P = e \cap e'$ $Q = f \cap f'$



Legyen $f \parallel e$, de $f \neq e$

A párhuzamosság-tartás miatt $f' \parallel e'$

$ff'ee'$ egyenesek paralelogrammát határoznak meg.

Ekkor $PQ \nparallel P'Q'$, mert ha $\parallel$ lennének: $PQQ'P'$ paralelogramma lenne.

$\Rightarrow P'Q' = PQ$ ↯ ellentmondás, hiszen nem izometrikus hasonlóságról van szó a tételben.

Vagyis $PQ \nparallel P'Q' \Rightarrow O = PQ \cap P'Q'$

Állítjuk: O fixpont
      létezik ut. (O képe)
Ekkor P, O, Q pontok sorrendje = P', O', Q' pontokéval
Másrészt : $\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|O'P'|}{|O'Q'|}$
A hasonlóság miatt
⇒ A párhuzamos szelők tételét felhasználva: $\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|OP'|}{|OQ'|}$ ⇒
$O = O'$
tehát O fixpont.

<u>Egyértelműség</u>: Tfh: O_1, O_2 fixpontok.
(1) Def.-ból : $|O_1' O_2'| = \lambda \cdot |O_1 O_2|$
(2) Mivel O_1, O_2 fixek: $|O_1' O_2'| = |O_1 O_2|$ } $\lambda = 1$ ↯
mivel nem izometrikus hasonlóságról van szó.

⇒ <u>Következmény</u>:
- Legyen φ nem izometrikus hasonlóság, amelynek fixpontja O, aránya λ
- Legyen ψ szintén O centrumú, de $\frac{1}{\lambda}$ arányú
→ $\psi\varphi$ izometria, és fixpontja O.

Ha $\psi\varphi$ = { identitás → φ középpontos hasonlóság; tükrözés → φ nyújtva tükrözés; forgatás → φ nyújtva forgatás }

Biz: II. Térbeli eset:

Legyen a hasonlóság aránya λ $(\lambda \neq 1)$

A hasonlóságot jelölje φ_λ

Pl.: egy P pontot: 1.) $P = \varphi_\lambda(P)$ ✓ van fixpont.

2.) $P \neq \varphi_\lambda(P)$

$\Rightarrow$  Q olyan, hogy $\dfrac{|PQ|}{|P'Q|} = \dfrac{1}{|\lambda|}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ha } \frac{1}{\lambda} > 1 \Rightarrow P' \in PQ \\ \text{ha } 0 < \frac{1}{\lambda} < 1 \Rightarrow P \in P'Q \\ \text{ha } -1 < \frac{1}{\lambda} < 0 \Rightarrow Q \in PP' \\ \text{ha } -1 > \frac{1}{\lambda} \Rightarrow Q \in PP' \end{array}\right\} Q_{\frac{1}{\lambda}}(P') = P$$

Alkalmazzuk φ_λ után $Q_{\frac{1}{\lambda}}$-t.

Ez a nagyítástranszformáció a P-t helyben hagyja.

$\alpha = Q_{\frac{1}{\lambda}} \varphi_\lambda$: 1 fixpontú irányítástartó.

$\Rightarrow$ α tengely körüli forgatás. Mivel P fix, α tengelye átmegy P-n: t

$\Rightarrow$ Vegyünk egy t-re merőleges Σ síkot!

$\Sigma \perp t \Rightarrow Q \in \Sigma$: Σ invariáns sík $Q_{\frac{1}{\lambda}}$-ra és α-ra is

$\Rightarrow$ Σ invariáns: $\varphi_\lambda = Q_{\frac{1}{\lambda}}^{-1} \alpha$-ra is $\Rightarrow$

Σ-ban a φ_λ-nak van fixpontja

(lsd. síkbeli eset!)

Unicitás: Hasonló mint síkban.

Következmény: φ_λ : nyújtva forgatás

vagy nyújtva tükrözés lehet!

Def: <u>Alakzatok hasonlósága</u>:

Két alakzat hasonló, ha van olyan hasonló-sági transzformáció amely egyiket a másikba viszi.

<u>Középpontos hasonlóság</u>:

- jellemzi: középpont, arány
- tartja a szakaszok arányát (párhuzamos szelők tételéből következik)
- egyenestartó
- minden egyenes képe || az egyenessel
  => a középpontos hasonlóság szögtartó

<u>Hasonlóság</u>: A sík önmagára vonatkozó egyenes és szögtartó leképezése =>
- tartja a szakaszok arányát
  ((Cauchy-def: fgv egyenlet levezetése)
- Párhuzamos egyenesek képe párhuzamos
- Hasonlóságok alaptétele
- Hasonlóságok fixponttétele

6.

A sík és tér irányítása

I. A sík irányítása

Egy tetszőleges e egyenesnek az axiómák szerint 2 irányítása van (rendezés!) Legyen ez: $(e; \leq)$
és legyen: φ síkizometria

Def: $\varphi(e; \leq) := (f; \leq)$: a rendezett ($e$) egyenes ($\varphi$) síkizometria melletti képe, ahol $p_1, p_2 \in f$ esetén: $p_1 \leq p_2 \Leftrightarrow \varphi^{-1}(p_1) \leq \varphi^{-1}(p_2)$

Def: A sík irányítása egy olyan Φ hozzárendelés, amely a sík minden rendezett egyeneséhez hozzárendeli az illető egyenes egy adott félsíkját mozgásinvariáns módon.

Def: A Φ leképezés mozgásinvariáns, ha valamely φ mozgás esetén:
$$\underbrace{\varphi\,\Phi(e, \leq)}_{\text{félsík képe}} = \Phi\underbrace{(\varphi(e, \leq))}_{\text{kép félsíkja}}$$

$\boxed{\text{Tétel}}$: A síknak pontosan 2 irányítása létezik.

Biz: 1) Létezés: Legyen adott $(e_0, \leq)$, ehhez hozzárendelem a Σ_+ félsíkot. Ha $(e, \leq)$ rendezett tetsz. egyenes a síkon, akkor legyen φ olyan mozgás, hogy $\varphi(e_0, \leq) = (e, \leq)$

Ekkor $(e, \leq) \mapsto \varphi(\Sigma_+)$

Segédtétel: $\varphi(\Sigma_+)$ nem függ φ-től.

(Jelentése, ha ψ olyan mozgás, hogy $\psi(e_0, \leq) = (e, \leq) \Rightarrow$
$\psi(\Sigma_+) = \varphi(\Sigma_+)$)

Biz: $\psi^{-1}\varphi(e_0, \leq) = (e_0, \leq) \Rightarrow e_0$ invariáns a $\psi^{-1}\varphi$ transzformáció esetén

Mivel φ, ψ mozgás $\Rightarrow \psi^{-1}\varphi := \begin{cases} \text{eltolás} \\ \text{forgatás} \end{cases}$

a.) Egy forgatás csak akkor hagy invariánsan egy egyenest, ha 180°-os (→ centrális tükrözés.). Ez azonban nem rendezéstartó

b.) $\Rightarrow \psi^{-1}\varphi$ eltolás: tengelyei merőlegesek e_0-ra. $\Rightarrow$ Egy ilyen eltolásra e_0 félsíkjai is invariánsak lesznek, vagyis $\psi^{-1}\varphi(\Sigma_+) = \Sigma_+ \Rightarrow$
$\varphi(\Sigma_+) = \psi(\Sigma_+)$ //.

$\Rightarrow$ Tehát a „Létezés" bizonyításában adott hozzárendelés megfelelő.

② Mozgásinvariáns lesz az adott hozzárendelés:

$\varphi : (e_0, \leq) \mapsto (e, \leq)$

Legyen a Φ (irányításhoz tartozó) hozzárendelés:

$\Phi : (e, \leq) \mapsto \varphi(\Sigma_+)$

$(e_0, \leq) \mapsto \Sigma_+$

Bizonyítandó: $\varphi\Phi(e_0, \leq) = \Phi(\varphi(e_0, \leq))$

Def. szerint: ① $\cancel{\Phi(e, \leq) = \varphi(\Sigma_+)}$ $\Phi(\varphi(e_0, \leq)) = \Phi(e, \leq) = \varphi(\Sigma_+)$

② $\varphi \underbrace{\Phi(e_0, \leq)}_{\Sigma_+} = \varphi(\Sigma_+)$

3) Unicitás:

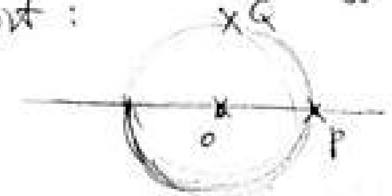
Vegyük a síknak egy irányítását és figyeljük meg, hogy az az egyenes mely két félsíkját tünteti ki.

Egyértelműség: ha e_0-nak kitüntetem egy félsíkját, akkor az egyértelműen meghatározza, hogy e melletti lépésnek mely félsík van kitüntetve

Mivel 2 félsíkja van 1 egyenesnek ⇒
2 irányítás lehet!

—o—

Irányítsuk valahogyan a síkot és vegyünk a síkon egy kört:



Def: Q megelőzi P-t, ha $(OP, \subseteq)$, ahol $O \subseteq P$ esetén az OP rendezett egyenes kitüntetett félsíkjában van Q.

Kitüntetett félsík: „bal part”

Def: Körív: Legyen P, Q a körvonal 2 pontja:

Ha Q megelőzi P-t:

$\overrightarrow{PQ}$ = {azon R pontok halmaza, amelyre R megelőzi P-t és Q megelőzi R-et}

Ha P megelőzi Q-t:

$\overrightarrow{PQ}$ = {R | R megelőzi P-t vagy Q megelőzi R-et}

Megelőzés ≈ pozitív körüljárás!

Def: $\overrightarrow{PQ}$ íven vett rendezés:

Ha $R, S \in \overrightarrow{PQ}$, akkor $R \leq S \iff \overrightarrow{RS} \subseteq \overrightarrow{PQ}$

Ez a rendezés teljes rendezés

II. A tér irányítása:

A) Térben a sík irányítása: A tér minden síkjához hozzárendelem egyik egyenesének egy félsíkját

Jele: $(\Sigma; \sigma)$

Ha φ térizometria: $\varphi(\Sigma, \sigma) := (\varphi(\Sigma); \sigma)$

B) Tér irányítása: A tér minden irányított síkjához mozgásinvariáns módon hozzárendeljük az egyik félterét!

Tétel: A tér ~~minden irányított síkjához mozgásinvariáns módon hozzárendeljük az egyik félterét!~~ A térnek pontosan 2 irányítása van!

Biz: Síkbelivel analóg módon!

Def: A leképezés mozgásinvariáns, ha valahányszor egy φ mozgás a $(g, \leq)$ egyenest a $(h, \leq)$ egyenesbe viszi, mindannyiszor a $(g, \leq)$ egyeneshez rendelt félsíkot a $(h, \leq)$ egyeneshez rendelt félsíkba viszi.

(7.) Irányított és irányítatlan szögek fogalma, tulajdonságaik

1.) Irányított szög (irányított szakasz.)

Df: Elemi irányított szög: két, egy pontból induló, félegyenesből álló rendezett(!) pár.

(a^+, b^+)

Df: Két szög ekvivalens: $(a^+, b^+) \sim (c^+, d^+) \Leftrightarrow$ ha létezik φ mozgás a síkon, hogy:
$$\varphi(a^+) = c^+$$
$$\varphi(b^+) = d^+$$

Állítás: $\sim$ ekvivalenciareláció.
A fent definiált $\sim$ ekvivalencia reláció ekvivalencia osztályai: az irányított szögek.

Állítás: Ha adott egy α irányított szög, és a síknak egy félegyenese a^+, akkor pontosan egy db b^+ félegyenes létezik: úgy, hogy $\alpha = (a^+, b^+)_\triangle$
(ugyanez igaz a másik komponensre)

Df: Irányított szögek összege:
Legyenek α, β irányított szögek: $\alpha = (a^+, b^+)_\triangle$
$\beta = (b^+, c^+)_\triangle$ (választható így)
Ekkor $\alpha + \beta := (a^+, c^+)_\triangle$

Állítás: Az irányított szögek az összeadásra nézve Abel-csoportot alkotnak.

→ asszociatív

→ egységelem van: $\underbrace{\text{nullszög}}$: (a^+, a^+)

→ van inverz: $\alpha = (a^+, b^+)$ inverze: $\beta = (b^+, a^+)$

→ kommutatív

Elnevezések: egyenesszög: $(a^+, a^-)\measuredangle$ ontolja, ahol a^+, a^- egy egyenes egy pontja által meghatározott 2 félegyenes.

forgatási szöge: ha φ O körüli forgatás, akkor a forgatási szöge $(a^+, \varphi(a^+))\measuredangle$

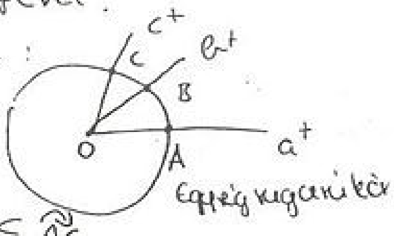
Megjegyzés: Ez független a reprezentáns (itt a^+) választásától, hasonlóan igaz ez az összeadásnál is!!

Állítás: Ha φ, ψ azonos centrumú forgatások, akkor $\psi \circ \varphi$ szöge megegyezik a ψ forgatás és φ forgatás szögeinek összegével.

Def: Irányított szögek rendezése:

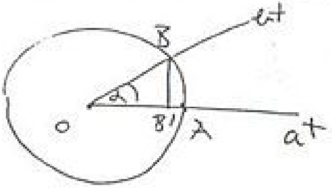
legyen $\alpha = (a^+, b^+)\measuredangle$

$\beta = (a^+, c^+)\measuredangle$



Ekkor $\alpha \le \beta \iff \overset{\frown}{AB} \le \overset{\frown}{AC}$

Def: Irányított szögek szinusza:



$\alpha = (a^+, b^+)\measuredangle$

$\Rightarrow \sin\alpha = \begin{cases} |BB'|, \text{ ha } \alpha \text{ konvex} \\ -|BB'|, \text{ ha } \alpha \text{ konkáv} \end{cases}$

II.) Irányítatlan szög:

Def: $(a^+,b^+)\sim(c^+,d^+) \iff \exists\, \varphi$ izometria, hogy: $\varphi(a^+)=c^+$ és $\varphi(b^+)=d^+$

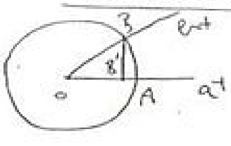
Állítás: A fent definiált $\sim$ reláció ekvivalencia-reláció.

Ezen ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozás osztályai az irányítatlan szögek.

jele: $(a^+,b^+)_\Delta$

Állítás: $(a^+,b^+)_\Delta=(b^+,a^+)_\Delta$

Def: Irányítatlan szög koszinusza:



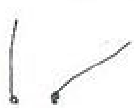
legyen: $O\le A$

Ekkor $\cos(a^+,b^+)_\Delta=\begin{cases}|OB'| & \text{ha } O\le B' \\ -|OB'|, & \text{ha } B'<\end{cases}$

III.) Szögek térben:

Megjegyzés: Térben nem tudunk irányított szögről beszél(ni) (legfeljebb síkban)

Def: Félegyenesek szöge: Az egyik félegyenes kezdőpontj(ába) a másikat visszük, és a 2 félegyen(es) által meghatározott síkon vesszük az általuk bezárt szöget.



Def: <u>Félegyenes, sík:</u>

A félegyenest merőlegesen levetítem a síkra, ha ez egyetlen pont, akkor a félegyenest $\perp$ a síkra, egyébként az eredeti félegyenes és a kapott félegyenes szöge a keresett szög.

Def: <u>Két közös határoló egyenessel rendelkező félsík:</u>

Elmetszem őket a határoló egyenesre merőleges síkkal, a kapott félegyenesek szöge a 2 félsík keresett szöge.

8.

) Sokszögek, poliéderek, kerülete, területe, ? felszíne, térfogata ?

Alapfogalmak, tételek → konvex sokszögek

Df: Konvexnek nevezünk egy halmazt a síkon/térben, ha bármely is vesszük két pontját, az őket összekötő szakasz benne van a halmazban.

Tétel: Konvex halmazok metszete is konvex

Df: A H halmaz konvex burka a H-t tartalmazó konvex halmazok metszete ?

HY - tétele: Ha véges sok (de legalább 4) konvex halmaz közül bármely háromnak van közös pontja, akkor az összesnek létezik közös pontja.

Df: Konvex sokszöglap: véges sok pont (amelyekről feltételezzük, hogy nem kollineárisak) konvex burka

Df: Támaszfelület: A K konvex halmaz támaszfelülete olyan zárt félsík, amely tartalmazza K-t, és a határoló egyenesének is van közös pontja K-val.

Def: Támaszegyenes: olyan egyenes, amelynek valamelyik félsíkja támaszfélsík.

Def: Konvex sokszöglap csúcsa: Olyan pont, amely előáll a sokszög és egy támaszegyenes közös részeként.

Def: Sokszöglap oldala: olyan halmaz, amely előáll a sokszög és egy támaszegyenes részeit (olyan részhalmaz, amely nem egy pont!)

Def: Belső pont: A sokszöglap olyan pontja, amely nincs rajta egyik oldalon sem.

Def: Szög: A csúcsnál lévő két szögtartomány közül az, amelyik tartalmazza a belső pontot.

Területmérés konvex sokszögekre

Def: Területmérés: $T: K \to \mathbb{R}$ minden konvex sokszöghöz egy valós számot rendel.

Tulajdonságai: 1.) $T(K) \geq 0$ és $T(\square) = 1$

2.) Additív: ha K_1, K_2 konvex sokszögek és $K_1 \cup K_2$ is konvex és $K_1 \cap K_2$ szakasz, akkor:
$T(K_1 \cup K_2) = T(K_1) + T(K_2)$

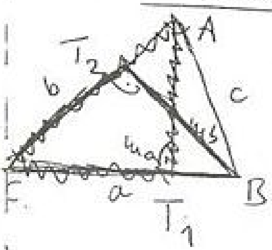
3.) Invariancia: $\forall\, \varphi$ egybevágóság esetében: $T(K) = T(\varphi(K))$

-2.

Tétel: Pontosan egyféle területmérés létezik. 33

Biz: 1. Létezés:

a) Háromszögekre:



Legyen: $T = \frac{a \cdot m_a}{2}$ ez független az oldaltól, mivel:

$BCT_2\Delta \sim ACT_1$

$$\Downarrow$$

$$\frac{m_b}{a} = \frac{m_a}{b} \Rightarrow a \cdot m_a = b \cdot m_b$$

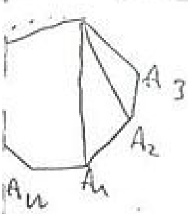
b) Négyszögekre: felbontjuk Δ-ekre,

$$T(ABCD) = T(ABC) + T(ACD) =$$
$$= T(AOB) + T(BOC) + T(AOD) + T(DOC)$$
$$= T(ABD) + T(BCD)$$

Az additivitás a Δ területképletből jön, még nem a definícióból.

Megjegyzés: Itt azt láttuk be, ha kétféleképpen bontjuk fel Δ-ekre a négyszöget, az nem változtatja a területet.

c) Tetsz. sokszögekre: Azt kell belátni, hogy bárhogy is vesszük egy Δ-ekre való felbontását, azt megegyezik a nemszomszédos csúcsra való felbontással.



Lépés: k szerinti teljes indukció csúcsok száma

T_{A_2}: jelölje az A_2-ből való felbontáskor kapott háromszögek területösszegét.

$\underline{T_{A_2}(K)} = T(A_2A_3A_4) + \underbrace{T_{A_2}(A_2A_4 \dots A_nA_1)}_{\text{n-1 szög teljesül rá az indukciós feltétel}} =$

$= T(A_2A_3A_4) + T_{A_1}(A_2A_4 \dots A_nA_1) =$

$\boxed{b}$ miatt: $= T(A_2A_3A_4) + T(A_1A_2A_4) + T_{A_1}(A_1A_4 \dots A_nA_1)$

$= T(A_1A_2A_3) + T(A_1A_3A_4) + T_{A_1}(A_1A_4 \dots A_n)$

$= \underline{T_{A_1}(K)}$ //

II. Unicitás (egyértelműség): Legyen T egy területmérés és A az $1, x$ hosszúságú oldalú téglalap területére legyen $T(\underset{1}{\square}x) = f_1(x)$

A fent definiált f függvény eleget tesz a Cauchy-függvényegyenlet-lemma feltételeinek:

(1) Additivitás: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(2) monotonitás: ha $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

$\Rightarrow$ Cauchy-fg. egyenlet-lemma alapján:

$f_1(x) = \underbrace{f(1)}_{1} \cdot x = x \quad \Rightarrow \underline{f(x) = x}$

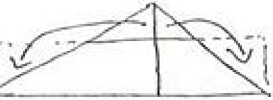
Rögzítsük x-et, játsszuk végig ugyanezt a másik oldalra ~~y változóval~~. $T(\underset{x}{\square}y) = f_x(y)$

Belátható ~~$f_x(y) = f(x)\cdot y$~~ hasonló módon, hogy f_x is teljesíti a Cauchy-függvényegyenletet lemmát, ezért:

$f_x(y) = \underbrace{f_x(1)}_{x} \cdot y = x \cdot y$

$\Rightarrow$ téglalap ter: $x \cdot y$

T-Érintsünk egy tetsz. Δ-et, és vegyük a leghosszabb oldalát:



1.) a darabok területének összege egyenlő a háromszög területével

2.) végezzük el az átdarabolást

$\Rightarrow$ látható, hogy $T(\Delta) = \frac{a \cdot m_a}{2}$

Legyen a létezőnek megkonstruált területmérés T^*

Látjuk, hogy $T^*(\Delta) = T(\Delta)$

Mivel a sokszögek területének mérését háromszögekre bontással végezzük, ezért a területek tetszőleges sokszögek csak egyféle módon lehetnek értelmezve!

Kerület: A sík idomot határoló vonal az idom kerülete. A kerület hosszának mérőszámát is ugyanúgy kerületnek nevezzük.

Mind a kerületmérés, mind a területmérés összehasonlításon alapszik.

Háromszög: sokszög oldalai.

Ezekre a metrikus axiómák biztosítják a távolságmérés létezését.

Kerület: oldalélek hosszának összege

(4) Konvex poliéderek, Euler formula, szabályos poliéderek, térfogatmérés

Konvex poliéderek:

Def: Térben véges sok pont konvex burka (feltételezhető, hogy ezen pontok nincsenek egy egyenesen/síkon)

Def: Támaszsík: olyan sík, amelynek van közös pontja a poliéderrel és a poliéder pontosan az egyik féltérben van.

Def: Poliéder: Olyan korlátos halmaz, amely előáll véges sok (támasz)féltér metszeteként

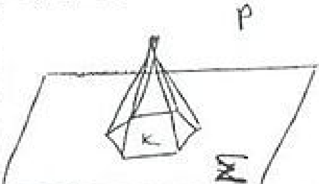
Euler-formula: Konvex poliéderek jellemző adatai

$c(P)$: csúcsok száma
$e(P)$: élek száma
$l(P)$: lapok száma

Tétel: $\boxed{c(P)-e(P)+l(P)=2}$

Biz: „Szeletelős taktika":

1) Gúlákra:

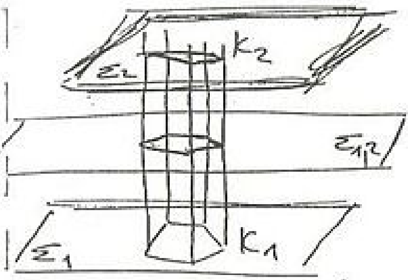


Adott egy K konvex sokszög a Σ síkban. Tekintsük a konvex ($K \cup P$) alakzatot ⇒ gúla

Ha K n-szög: $c(G)=n+1$
$e(G)=2n$
$l(G)=n+1$ Teljes...

$\Rightarrow c(G)-e(G)+l(G)=n+1-2n+n+1=2$ ✓

$\boxed{2}$ Hasábra:



Tekintsük Σ_1-ben K_1-et és ettől függetlenül Σ_2-ben K_2-t.
Legyen $P = \mathrm{konv}(K_1 \cup K_2)$
Legyen $\Sigma_{1,2}$ a Σ_1 és Σ_2 síkok középpárhuzamos síkja és $K_{1,2} = P \cap \Sigma_{1,2}$

Ekkor: $c(P) = c(K_1) + c(K_2)$

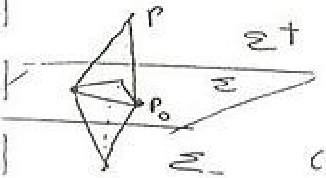
$$e(P) = e(K_1) + e(K_2) + e(K_{1,2})$$
$$\ell(P) = 2 + e(K_{1,2})$$

$$c(P) - e(P) + \ell(P) = \underbrace{c(K_1) - e(K_1)}_{} + \underbrace{c(K_2) - e(K_2)}_{0} + \underbrace{e(K_{1,2}) - c(K_{1,2})}_{0} + 2 = 2 \checkmark$$

$\boxed{3}$ Indukciós lépés:

Legyen P konvex poliéder, és a Σ sík olyan, hogy P-nek pontosan egy csúcsát tartalmazza, de nem tartalmazzák.

$$P_0 = \Sigma \cap P \qquad P^+ = \Sigma^+ \cap P$$
$$P^- = \Sigma^- \cap P$$



Kell: Ha P^+-ra és P^--ra teljesül az Euler-formula, akkor P-re is.

$$c(P) = c(P^+) + c(P^-) - 2c(P_0) + 1$$
$$e(P) = e(P^+) + e(P^-) - 2e(P_0) - (c(P_0) - 1)$$
$$\ell(P) = \ell(P^+) + \ell(P^-) - 2 - e(P_0)$$

$$c(P) - e(P) + \ell(P) = c(P^+) - e(P^+) + \ell(P^+) + c(P^-) - e(P^-) + \ell(P^-) -$$
$$- 2c(P_0) + 1 + 2e(P_0) + c(P_0) - 1 - c(P_0) -$$
$$= 2 + 2 - c(P_0) + e(P_0) - 2 = 2 \checkmark$$

$\boxed{4.}$ Tetsz. poliéderre:

Σ legyen olyan sík, hogy bármely vele párhuzamos sík legfeljebb 1 csúcsot tartalmaz P-ből.

$\Rightarrow$ P-nek Σ_1 és Σ_2 közé eső része gúla

$\Rightarrow$ teljesül $\boxed{1.}$ pont

$\Rightarrow$ P-nek Σ_2 és Σ_3 közé eső része hasáb $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ teljesül $\boxed{2.}$ pont.

Σ_1 és Σ_3 közé eső darabra teljesül a $\boxed{3.}$ pont miatt.

Ezt a gondolatot indukciós módon továbbvezetve, látható, hogy az állítás tetsz. poliéderre teljesül!

1. Szabályos poliéderek:

Def: Zászló: a poliéder egy kiválasztott csúcsa egy hozzátartozó éllel + lappal

Def: A P poliéder szabályos, ha bármely 2 $(i \neq j)$ (C_i, E_i, L_i), (C_j, E_j, L_j) zászlóhoz létezik Φ térizometria, hogy $\Phi(C_i) = C_j$, $\Phi(E_i) = E_j$, $\Phi(L_i) = L_j$ és $\Phi(P) = P$

Következmények: ⇒ szabályos poliéder minden éle
- ugyanakkora hosszú
⇒ minden lapja szabályos k-szög
⇒ minden csúcsba n él fut be

Tétel: Szabályos poliéder:

1.) Tekintsük az Euler-formulát
2.) $2e(P) = k \cdot l(P) \Rightarrow l(P) = \frac{2e(P)}{k}$
3.) $2e(P) = n \cdot c(P) \Rightarrow c(P) = \frac{2e(P)}{n}$

l, c-t behelyettesítve az Euler-formulába:

$$\frac{2e(P)}{n} - e(P) + \frac{2e(P)}{k} = 2$$

$$e \cdot \frac{2k - nk + 2n}{n \cdot k} = 2 \Rightarrow 2k + 2n - n \cdot k > 0$$

$$nk - 2k - 2n + 4 < 4$$

$$(n-2)(k-2) < 4 \Rightarrow$$

$$\underbrace{n-2, k-2}_{} = 1, 2$$

k-2	n-2	k	n	e	l	c	
1	1	3	3	6	4	4	tetraéder
1	2	3	4	12	8	6	oktaéder
2	1	4	3	12	6	8	kocka
1	3	3	5	30	20	12	ikozaéder
3	1	5	3	30	12	20	dodekaéder

ismert 5 szabályos test létezik

1. Térfogatfogalom: lásd az előző tételt.

Konvex poliéderek, térfogat és felszín értelmezése:

Def: Konvex poliéder: Véges sok (nem egy egyenesre eső) pont konvex burka.

Def: Támaszsík: olyan sík, amelynek van közös pontja a poliéderrel, és a poliéder pontosan az egyik féltérben van.

Def: Poliéder: olyan korlátos halmaz, amely előáll véges sok támaszféltér metszeteként.

Konvex poliéderek térfogata:

Def: Térfogatmérés: $V: \mathcal{P} \to \mathbb{R}$
Egy olyan hozzárendelés, amely konvex poliéderekhez valós számot rendel hozzá.

Tulajdonságai:
1., $V(P) \geq 0$ $\quad V(\square_1) = 1$
2., Additivitás: ha $P = P_1 \cup P_2$ és $P_1 \cap P_2$ P_1-nek és P_2-nek is lapja, akkor $V(P) = V(P_1) + V(P_2)$
3., Bármely φ izometriára: $V(\varphi(P)) = V(P)$

All: A konvex poliédereken pontosan 1 térfogatmérés létezik.

Biz: bonyolultabb, mint síkban.

Néhány speciális test térfogata:

1.) Paralelepipedon : $V = T_a \cdot m$

a, b, c vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata

$$V(a, b, c) = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\| \leftarrow \text{koordináták}$$

2.) Egyenes hasáb: $V = T_a \cdot m$

3.) x, y, z vektorok által kifeszített tetraéder térfogata koordinátákkal:

$$V = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{matrix} \right\|$$

a, b, c, d a tetraéder csúcsai ← koordináták

Felszín: Poliéder felszínén a határoló lapok területének összegét értjük.

10 Másodrendű alakzatok

Kúpszelet def.-ja polárkoordinátás egyenlete, kúp szimmetriája, kúpszeletek jellemzése fókusszal, távolságokkal, kúpszeletek érintőinek tul.-ai

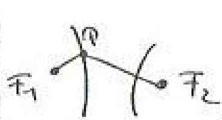
I. Kúpszelet definíciója:

Def: Az **ellipszis** azon pontok mértani helye a síkon, amelyeknek két adott ponttól vett távolságösszege állandó.

$$|F_1P| + |F_2P| = \text{áll.} > |F_1F_2|$$

A 2 adott pont az ellipszis fókusza (gyújtópontja). Az ellipszis pontjait a fókuszokkal összekötő szakaszokat a pont rádiusz vektorainak nevezzük.

Def: A **hiperbola** azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek 2 adott ponttól vett távolságainak különbsége állandó.

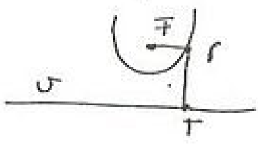


$$\big||F_1P| - |F_2P|\big| = \text{áll.}$$

Elnevezések: F_1, F_2: fókuszok

F_1P, F_2P: rádiusz vektorok

Def: A **parabola** azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek egy adott ponttól és egy egyenestől vett távolsága megegyezik.



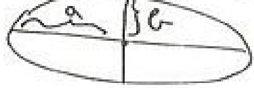
F: fókusz $\quad |FP| = |PT|$

v: vezéregyenes

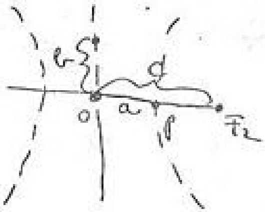
II. Kúpszeletek polárkoordinátás egyenletei: 4.tét.

[1] Kúpszeletek kanonikus egyenlete:

a.) Ha a és b a ellipszis nagy és kis féltengelye, akkor kanonikus egyenlete: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

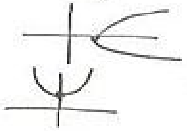
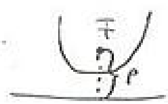


b.) Ha a és b a hiperbola valós és képzetes féltengelye, akkor kanonikus egyenlete:
$\frac{x^2}{a_2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



$OP = a$
$OF_2 = c$
$b^2 = c^2 - a^2$

c.) A p paraméterű parabola kanonikus egyenlete.
$y^2 = 2px$
$x^2 = 2py$

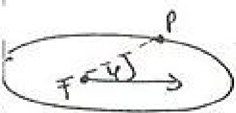



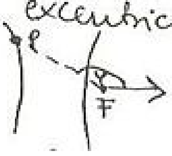
[2] Kúpszeletek polárkoordinátás egyenlete:

Tétel: Az ellipszis, hiperbola és parabola polárkoordinátás egyenlete: $r = \frac{p}{1-e\cdot\cos\varphi}$, $r=\frac{p}{\pm 1 - e\cdot\cos\varphi}$, $r=\frac{p}{1-\cos\varphi}$

ahol p a kúpszelet paraméterét

e az ellipszis vagy hiperbola numerikus excentricitását jelenti



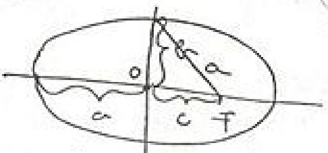


Elnevezések : $2a$: nagytengely (ellipszisnél) / valós tengely (hiperbolánál)

$2b$: kistengely (ellip.-nél) / képzetes tengely (hiperbolánál)

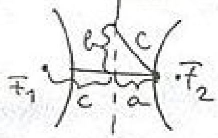
c : fókusznak középponttól vett távolsága ? → lineáris excentricitás

Ellipszis esetében:



$a^2 = b^2 + c^2$

Hiperbola esetében:



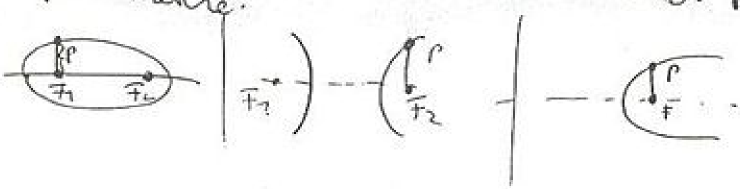
$a^2 + b^2 = c^2$

$\boxed{e = \frac{c}{a}}$ → numerikus excentricitás (e) : $\frac{\text{lineáris excentric}}{\text{fél nagytengely}}$

$$e = \frac{\text{lineáris excentricitás}}{\text{fél nagytengely}}$$

Kúpszelet paramétere:

A fókuszt tartalmazó kúpszelettengelyre a fókuszban emelt merőleges a kúpszelet egy húrját tartalmazza. E húr hosszának fele a kúpszelet paramétere.



III. Kúp síkmetszetei:

Tétel: Minden kúpszelet előáll egy forgáskúp síkmetszeteként.

Jelentése: a) kúp és sík közös része mindig kúpszelet

b) Minden kúpszelet előáll kúp és sík síkmetszeteként.

Előállítás:

Dandelin-gömbök

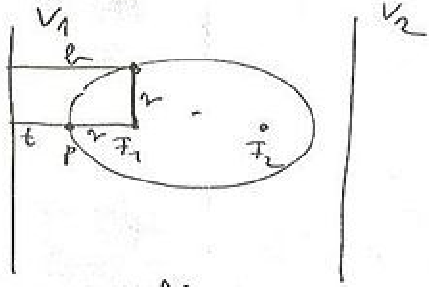
1.) A kúpszelet ellipszis, ha olyan síkkal metszük el, amely a kúp egyik alkotójával sem párhuzamos. (Ha a kúp tengelyére merőleges a metsző sík, akkor a síkmetszet kör)

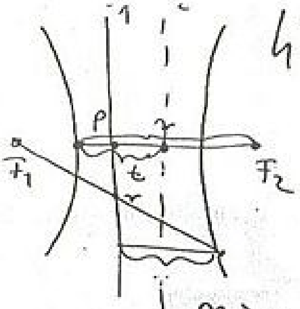
2.) Ha a metszősík a kúp egyetlen alkotójával párhuzamos, akkor parabola keletkezik.

3.) Ha pedig metszősík a kúp két alkotójával párhuzamos, akkor hiperbola.

IV. Kúpszeletek jellemzése távolságokkal, fókuszokkal:

Tétel: Azon pontok halmaza a síkon, amelyekre egy ponttól való távolságuk egy ponton át nem haladó egyenestől való távolsághoz aránya megadott pozitív értéket kapunk, ellipszis, hiperbola vagy parabola aszerint, hogy az adott érték 1-nél kisebb, 1-nél nagyobb vagy 1-gyel egyenlő. Ilyen mértani hely...





$\frac{r}{t} < 1$ $\frac{r}{t} > 1$

A P pont távolságát az F fókuszponttól jelölje: r
Vezessünk be egy v egyenest (megfelelő egyenletű), és a P pont távolságát ettől az egyenestől: t-vel jelöljük.

Bebizonyítható, hogy: $r = e \cdot t \Rightarrow \frac{r}{t} = e$, vagyis a keresett hányados valóban állandó, mivel itt e a numerikus excentricitást jelöli:

Tehát valóban: ha $\frac{r}{t} < 1$ $(\Rightarrow e < 1) \Rightarrow$ ellipszis

$\frac{r}{t} = 1$ $(e = 1) \Rightarrow$ parabola

$\frac{r}{t} > 1$ $(e > 1) \Rightarrow$ hiperbola

Kúpszelet mindegyik fókuszához tartozik tehát olyan egyenes, hogy a kúpszelet pontjainak a fókusztól mért távolságát az ettől az egyenestől való távolságával osztva állandó hányadost kapunk.
Az olyan egyenest vezéregyenesnek (direktrix) hívjuk.
Parabola esetében ez a definíciónál szereplő vezéregyenes!

V. Kúpszeletek érintőinek tulajdonságai:

Def: Kúpszelet érintője az az egyenes, amelynek egyetlen közös pontja van a kúpszelettel, a többi külsőpont.

$\boxed{\text{Tétel}}$: A kúpszelet minden pontjába egyetlen érintő húzható.

Megjegyzés: Belső pont
Külső pont

1.) ellipszisnél (Ellipszis pontjaira: $|F_1P| + |F_2P| = 2a$)

Q belsőpontja az ellipszisnek, ha: $|F_1Q| + |F_2Q| < 2a$

(R külsőpont, ha: $|F_1R| + |RF_2| > 2a$)

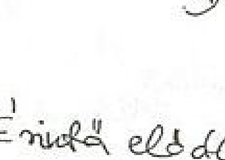
2.) hiperbolánál: (Hiperbola pontjaira: $||F_1P| - |F_2P|| = 2a$)

Q belsőpontja, ha $||F_1Q| - |F_2Q|| > 2a$

3.) Parabolánál: (Parabolapontja, ha: $|PF| = PT$

Q belsőpont, ha: $|QF| < |QT|$

Érintő előállítása:



e: PF_1 és PF_2 között a külső szögfelező

$P \in e$-re teljesül, hogy P rajta van a kúpszeleten, de $\forall\ Q \neq P$ pontról belátható, hogy külső pont.

fókusz = gyújtópont

11.

49

(11) Affinitások fogalma, affinitások alaptételei

Lineáris vektortranszformációk:

Def: Legyen φ leképezés a következő $\vec{\varphi}(\vec{PQ}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$

$\vec{PQ} = \vec{v}$

Állítás: $\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$ csak $\vec{v}$-től függ, a reprezentánstól nem.

Def: $\vec{\varphi}$-t lineáris vektortranszformációnak nevezzük, ha additív és homogén, vagyis

$$\vec{\varphi}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \vec{\varphi}(\underline{v}_1) + \vec{\varphi}(\underline{v}_2)$$

$$\vec{\varphi}(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot \vec{\varphi}(\underline{v})$$

Affinitás és kapcsolata a vektortranszformációkkal

Def: Affinitás: egyenestartó (szakasztartó), bijektív leképezés. ponthalmazt önmagára

pl: A: lineáris vektortranszformáció
$\underline{c}$: adott vektor, O origó

Ekkor φ affinitás mellett P pont képe: $\overrightarrow{O\varphi(P)} = A(\vec{OP}) + \underline{c}$

Állítás: Ha A nem elfajuló vektortranszformáció, akkor φ affinitás.

VI. Affinitások alaptételek:

JU

Tétel: Minden affinitás előáll $A(\vec{OP})+\underline{b}$ alakban, ahol A nem elfajuló lineáris vektortranszformáció, $\underline{b}$ tetszőlegesen adott vektor.

Biz: Jelölje az affinitást φ.
Vegyünk egy tetszőleges $\underline{v}$ vektort, és annak PQ reprezentánsát. $\underline{v}=\vec{PQ}$
$\underline{v}$ vektor képe $\vec{\varphi}(\underline{v})=\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$

a) Állítás: Egy vektor affinitás melletti képe csak a vektortól függ, és annak reprezentánsától nem.
Vagyis ha $\vec{PQ}=\vec{P'Q'} \Rightarrow \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}=\overrightarrow{\varphi(P')\varphi(Q')}$

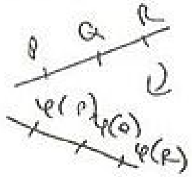
Biz: $\vec{PQ}=\vec{P'Q'} \Rightarrow (PQ)\sim(P'Q') \Leftrightarrow PQ\parallel P'Q'$ és $PP'\parallel QQ'$

Mivel az φ affinitás bijektív $\forall e\parallel f$ esetén $\varphi(e)\parallel\varphi(f)$ $\Rightarrow$
$\varphi(P)\varphi(Q)\parallel\varphi(P')\varphi(Q')$ és
$\varphi(P)\varphi(P')\parallel\varphi(Q)\varphi(Q') \Rightarrow \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}=\overrightarrow{\varphi(P')\varphi(Q')}$

b) Állítás: $\vec{\varphi}$ additív

$$\underbrace{\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}+\overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(R)}}=\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(R)}$$
$$\vec{\varphi}(\vec{PQ})+\vec{\varphi}(\vec{QR})=\vec{\varphi}(\vec{PR})=\vec{\varphi}(\vec{PQ}+\vec{QR})$$
$$\vec{\varphi}(\vec{PQ})+\vec{\varphi}(\vec{QR})=\vec{\varphi}(\vec{PQ}+\vec{QR})$$

c, Állítás: $\vec{\varphi}$ homogén



$\lambda \, \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$

Az egyenestartás miatt $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$ is egy egyenesen van, és mivel az affinitás sorrendtartó $\Rightarrow$ a sorrendjük sem változik

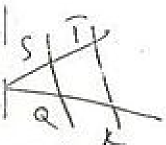
$$\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(R)} = f(\lambda, \overrightarrow{PQ}) \cdot \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$$

$$\vec{\varphi}(\overrightarrow{PR}) = f(\lambda, \overrightarrow{PQ}) \cdot \vec{\varphi}(\overrightarrow{PQ})$$

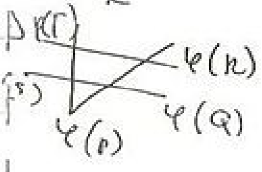
Bizonyítandó: $f(\lambda, \overrightarrow{PQ}) = \lambda$

Állítás: $f(\lambda, PQ)$ nem függ $\overrightarrow{PQ}$-tól. 1. lépés

a) Legyen $PS \nparallel PQ$ és $\overrightarrow{PT} = \lambda \cdot \overrightarrow{PS}$; $\overrightarrow{PR} = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$



$\Rightarrow$ párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt $SQ \parallel TR$



Mivel φ affinitás $\Rightarrow$ párhuzamosságtartó

$$\varphi(S)\varphi(Q) \parallel \varphi(T)\varphi(R)$$

$\Rightarrow$ párhuzamos szelők tétele miatt: (megfelelő szakaszok aránya megegyezik): $f(\lambda, \overrightarrow{PQ}) = f(\lambda, \overrightarrow{PS}) \Rightarrow$

f nem függ $\overrightarrow{PQ}$-tól

b.) Legyen $\overrightarrow{PS} \parallel \overrightarrow{PQ}$

Legyen $\overrightarrow{PV}$ olyan, hogy $\overrightarrow{PV} \nparallel \overrightarrow{PQ} \Rightarrow$ a.) pont alapján!

$$f(\lambda, \overrightarrow{PS}) = f(\lambda, \overrightarrow{PV}) = f(\lambda, \overrightarrow{PQ}) = f(\lambda)$$

$\boxed{2.}$ Állítás: f additív.

Vizsgáljuk $\vec{\varphi}((\lambda_1+\lambda_2)\vec{PQ})$ vektort

1.) $\vec{\varphi}((\lambda_1+\lambda_2)\vec{PQ}) = \vec{\varphi}(\lambda_1 \cdot (\vec{PQ}) + \vec{\varphi}(\lambda_2(\vec{PQ})) =$

($\uparrow \vec{\varphi}$ additív) $= f(\lambda_1)\vec{\varphi}(\vec{PQ}) + f(\lambda_2)\vec{\varphi}(\vec{PQ}) =$

$= \underline{(f(\lambda_1)+f(\lambda_2))\vec{\varphi}(\vec{PQ})}$

2.) $\vec{\varphi}((\lambda_1+\lambda_2)\vec{PQ}) = \underline{f(\lambda_1+\lambda_2)\vec{\varphi}(\vec{PQ})}$

1.) + 2.) $\Rightarrow f(\lambda_1)+f(\lambda_2) = f(\lambda_1+\lambda_2)$ ✓

$\boxed{3.}$ Állítás: f monoton.

$$\begin{cases} \vec{\varphi}((\lambda_1\lambda_2)(\vec{PQ})) = f(\lambda_1\lambda_2)\vec{\varphi}(\vec{PQ}) \\ \vec{\varphi}((\lambda_1\lambda_2)(\vec{PQ})) = \vec{\varphi}(\lambda_1(\lambda_2\vec{PQ})) = f(\lambda_1)\vec{\varphi}(\lambda_2 \cdot \vec{PQ}) = \\ \qquad = f(\lambda_1)\cdot f(\lambda_2)\cdot\vec{\varphi}(\vec{PQ}) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(\lambda_1\cdot\lambda_2) = f(\lambda_1)\cdot f(\lambda_2)$. ✓

Ha $\lambda > 0$: $f(\lambda) = f(\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{\lambda}) = f(\sqrt{\lambda})\cdot f(\sqrt{\lambda}) = (f(\sqrt{\lambda}))^2 \geq$

Ha $\lambda_1 > \lambda_2$: $f(\lambda_1) = f(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_2) = \underbrace{f(\lambda_1-\lambda_2)}_{\geq 0} + f(\lambda_2) \geq f(\lambda_2)$

$\uparrow$ additív

vagyis, ha $\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow f(\lambda_1) \geq f(\lambda_2)$ $\quad \boxed{f(1)=1}$

Látható, hogy f additív, monoton $\Rightarrow$ alk.-tó rá a Cauchy-függvényegyenlet lemma (1.4. tételnél már le van írva) $\Rightarrow f(\lambda) = f(1)\cdot\lambda$

$f(1) = f(1\cdot 1) = f(1)\cdot f(1) = (f(1))^2$, mivel φ bijekció $\Rightarrow f(1)\neq 0 \Downarrow f(1)=1$

vagyis $f(\lambda) = 1\cdot\lambda = \lambda$

mi miatt $\vec{\varphi}(\vec{PR}) = f(\lambda, \vec{PQ})\cdot\vec{\varphi}(\vec{PQ}) = \lambda\cdot\vec{\varphi}(\vec{PQ})$, vagyis $\vec{\varphi}$ homotéci.

$\Rightarrow \vec{\varphi}$ lineáris vektortranszformáció!

$$\overrightarrow{O\varphi(P)} = \overrightarrow{O\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} = \underbrace{\overrightarrow{O\varphi(O)}}_{\underline{b}} + \underbrace{\vec{\varphi}(\overrightarrow{OP})}_{\vec{\varphi} = A} =$$

$$= A(\overrightarrow{OP}) + \underline{b}.$$

Tehát, ha φ affinitás $\Rightarrow$ valóban előáll $A(\overrightarrow{OP}) + \underline{b}$ alakban

Példák affinitásra: ~~valóban előáll $A(\overrightarrow{OP}) + \underline{b}$ alakban~~

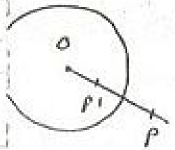
– merőleges affinitás $\Rightarrow$ mátrixa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

– nyírás: $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(12) Inverzió fogalma, egyenes és kör inverziós képe; az inverzió szögtartása, térbeli inverzió, gömb, egyenes, sík, kör inverz képe, „körgyenes" tartó transzformációk

1.) Inverzió fogalma, egyenes, kör inverziós képe:

Def: Inverzió: Adott egy O középpont, r sugarú k kör (alapkör). A tetsz. $P \neq O$ pont képe az a P' pont, amely rajta van a PO félegyenesen és amelyre:



$$|OP'| \cdot |OP| = r^2$$

Elnevezések: k: az inverzió alapköre
O: az inverzió centruma
r: az inverzió hatványa

→ Az inverzió fixpontjai: az alapkör fixpontjai
→ Ha $|OP| > r \Rightarrow |OP'| < r$
→ Ha $|OP| < r \Rightarrow |OP'| > r$
→ Inverzió kétszeri egymásutáni végrehajtása: identitás

Egyenes képe inverziónál:

a) O-n átmenő egyenes képe: önmaga, kivétel O pont (invariáns egyenes)

b) O-n át nem menő egyenes képe O-n átmenő kör.

Megszerkesztése: • Állítsunk O pontból az egyenesre merőlegest, → kimetsz egy T pontot.

• Hat. meg T képét: T', A keresett kör az OT' fölé írt

Kör képe inverziónál:

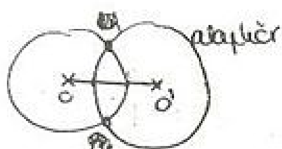
a, O-n átmenő kör képe:
O-n átnem menő egyenes (lsd. előző ismétlés!...)

b, O-n átnem menő kör képe: kör

Megszerkesztése: kössük össze a 2 kör középpontját (alapkör az, amelyik képét keressük) egy egyenessel.

?

- ez az egyenes az invertálandó kört egy P és Q pontban metszi
- szerkesszük meg P, Q képeit P', Q'-t
- szerkesszük Thalesz-kört P'Q' fölé: kapott kör a keresett kör.



Def: „Körégyenes": az inverzív síkon olyan objektum, amely vagy egyenes vagy kör.

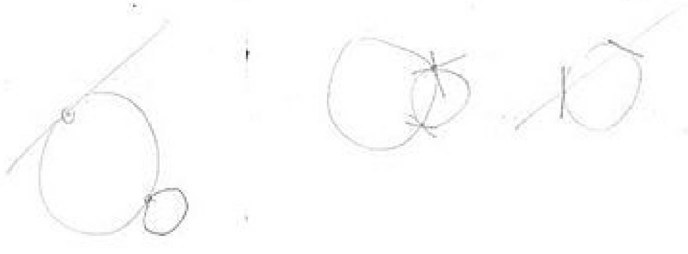
Def: Két körégyenest érintkezőnek mondunk, ha pontosan egy közös pontjuk van.

Pl: kör-kör
kör-egyenes
párhuzamos egyenesek || érintkez. pont a távolipontban

Állítás: Az inverzió érintkezés tartó = megtartja a 0 szöget

Def: Két körégyenes metsző, ha van közös pontjuk, de nem érintkeznek.

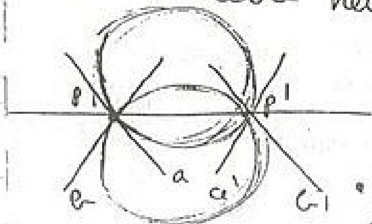
Def: Két metsző körégyenes szöge: a metsző körégyeneseket egy metszéspontjukban érintő egyenesek szöge.



11. Az inverzió szögtartása

Tétel: Ha 2 alakzat, melyeknek mindegyike kör vagy egyenes, egymást egy, a pólustól különböző pontban metszi, akkor inverzeik ugyanakkora szögben metszik egymást.

B: Feltételezhetjük, hogy a két alakzat metszéspontja az inverzével nem azonos.



- Tekintsük tehát az inverz és egymástól különböző P, P' pontokat, valamint a P-n áthaladó a és b egyeneseket.
- Tekintsük az olyan kört, amely az (a) egyenest a pólustól különböző P pontban érinti.

vertáljuk ezt az olyan alakzatot, így egy mindkét körtől
álló alakzatot kapunk.
nek képe P', ehhez rendeljük hozzá azt az (a') egyenest,
mely az olyan körrel P' pontban érintkezik.
illeszkedéstartás miatt ez megtehető. Megj.: a, a' nem
tekintjük inverzei egymásnak, hiszen ha „a" pólusra
nem menő egyenes, képe kör.
legendő bizonyítani, hogy az a, b hajlásszöge megegyezik
, b' hajlásszögével, mert ha azok az eredeti
lakzatok érintői, akkor az a', b' az inverz
alakzatokat érintik.

A p, p' pontokon áthaladó olyan kör vagy egyenes, amely az a egyenest p pontban érinti.
Ez a kör vagy egyenes érinti az a' egyenest, ugyanígy b is meghatároz egy a p, p' pontokon áthaladó kört v. egyenest, amely érinti a b, b' egyeneseket.
Ezek ~~érintik~~ szerint a és b valamint a', b' metsző köröknek vagy pedig egymást metsző köröknek és egyeneseknek a metszéspontokban vett érintői.
Ezért a 2 egyenes hajlásszöge valóban egyenlő.

Körgyenestartó transzformációk:

Def: Körgyenestartó transzformáció: olyan bijekció az inverzív síkon, amelynél tetsz. kör vagy egyenes képe is kör vagy egyenes.

Alaptétel: Minden körgyenestartó transzformáció egy hasonlóság, vagy egy inverzió és egy izometria szorzataként áll elő. (A pontok egy-k[illegible] kiegészítik. Ha [illegible] a pontok lényegé[illegible])

Bi: (vázlat): T/h: φ körgyenestartó transzformáció:

a, φ a végtelen távoli pontot helyben hagyja: $\varphi(\infty)=\infty$

$\Rightarrow$ belátható, hogy φ egy hasonlóság.

b, φ a ∞ távoli pontot nem hagyja helyben: $\varphi(\infty)=0$

$\Rightarrow$ φ egy inverzió és egy izometria szorzataként áll elő.

15.) Az euklideszi és affin tér analitikus tárgyalása, Vektorok, vektorműveletek, alterek

I.) Az euklideszi tér analitikus tárgyalása:

(Forrás: előadott n dim-re általánosítva)

Def: Lineáris kombináció: Az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots \underline{x}_n$ vektorok lineáris kombinációja a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{x}_i$ alakú kifejezés.

Def: Lineárisan független vektorrendszer: A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorrendszer vektorai lineárisan függetlenek, ha $\forall$ $\underline{v}$ vektor legfeljebb egyféleképpen áll elő ezek lineáris kombinációjaként.

Def: Generátorrendszer: A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_n$ vektorrendszer generátorrendszer, ha bm. vektor előáll ezek lineáris kombinációjaként.

Def: Bázis: lineárisan független generátorrendszer

euklideszi norma, belső szorzat, hossz, bezárt $\measuredangle$

Def: Ortonormált bázis:

1.) Egy $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ bázis $\boxed{\text{ortogonális}}$, ha $\forall i \neq j$, $\underline{b}_i \perp \underline{b}_j$

2.) Egy $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ bázis $\boxed{\text{normált}}$, ha $\forall i$ $|\underline{b}_i| = 1$

3.) Ortonormált bázisnak, amely: ortogonális és normált

Def: **Koordinátarendszer:**

origó + $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ bázis

origó: az euklideszi tér egy kitüntetett pontja

Helyvektor: az origóból egy adott pontba mutató vektor.

Mivel az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ bázis, bm. pont helyvektora egyértelműen felírható a báziselemek lineáris kombinációjaként:

$$\vec{OP} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + \ldots + x_n\underline{e}_n$$

Így bm. P pontnak kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetünk egy valós szám n-est: $P \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n)$

$\Rightarrow$ Ezt a szám n-est nevezzük a vektor koordinátáinak

Vektorműveletek leírása koordinátákkal:

(1) Vektorok összege: $\left.\begin{array}{l}\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \underline{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)\end{array}\right\} \underline{x}+\underline{y} = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$

(2) Skalárral való szorzás: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{v}$ n-dim-os vektor: $\underline{v} = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\lambda \cdot \underline{v} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

(3) Skaláris szorzat számolása: (ortonormált bázisban)

$$\underbrace{\underline{u} = (x_1, \ldots, x_n) \quad \underline{v} = (y_1, \ldots, y_n)}_{\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$$

(4) Vektoriális szorzat: (3 dim. ortonormált bázisban)

$$\left.\begin{array}{l}\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k} \\ \underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}\end{array}\right\} \underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

formális determináns

(5) Vegyes szorzat: (3 dim. ortonormált bázis)

$$\left.\begin{array}{l}\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \\ \underline{c} = (c_1, c_2, c_3)\end{array}\right\} \quad \underline{a}\underline{b}\underline{c} = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(II.) Az affin tér analitikus tárgyalása:

(vektorok, vektorműveletek, altérek) (Forrás: Szabó L. jegyzet 179. old.)

→ Itt a véges dimenziós valós vektortereket metrika nélkül vizsgáljuk, vagyis bennük kitüntetett belső szorzat nélkül.

→ Durván fogalmazva az olyan irányú vizsgálatok alkotják az affin geometria tárgyát.

A továbbiakban az $\boxed{A^n}$ = n-dim. valós vektorteret jelöl, és AFFIN TÉR-nek nevezzük.

A kitüntetett origó miatt a vektor és a pont fogalmakat azonos értelemben használhatjuk.

D: Az A^n tér $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ pontjait affin függetlennek nevezzük, ha az $\underline{a}_1-\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_k-\underline{a}_0$ vektorok lineárisan függetlenek.

Tekintsük az $(\underline{a}, \alpha)$ alakú rendezett elempárok halmazát, ahol $\underline{a} \in A^n$ vektor és $\alpha \in \mathbb{R}$ valós szám.

Ez a párok a között bevezetett $(\underline{a}, \alpha)+(\underline{b}, \beta) := (\underline{a}+\underline{b}, \alpha+\beta)$

$\lambda \cdot (\underline{a}, \alpha) := (\lambda \underline{a}, \lambda \alpha)$

műveletekkel $\boxed{n+1}$ dimenziós vektorteret alkotnak.

$\boxed{\text{Tél}}$: Az $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ pontok akkor és csak akkor affin függetlenek, ha az $(\underline{a}_0, 1), (\underline{a}_1, 1), \dots (\underline{a}_k, 1)$ vektorok lineárisan függetlenek.

Tekintsük az A^n térben $\boxed{n+1}$ darab $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ affin független pontokat.

$\Rightarrow$ Segítségükkel a térben ún. affin koordinátarendszer vezethető be.

Affin koordináta rendszer:

- $\boxed{n+1}$ db affin független pont : $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$
- mivel az $\underline{a}_1 - \underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n - \underline{a}_0$ vektorok az alaptérben bázist alkotnak, ezért minden $\underline{x}$ vektorra az $\boxed{\underline{x} - \underline{a}_0}$ vektor a következő alakba írható:

$$\boxed{\underline{x} - \underline{a}_0 = \sum_{i=1}^{n} x^i (\underline{a}_i - \underline{a}_0)}, \quad x^i \in \mathbb{R}$$

Így minden $\underline{x}$ vektorhoz az $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ koordinátát rendelhetjük, amelyeket vektornak az $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ alappontokra vonatkozó affin koordinátáinak nevezzük.

Látható, hogy az $\underline{a}_0$ minden koordinátája zérus, ezért ezt a pontot a koordinátarész origójának mondjuk.

Bázis átmenet affin térben:

Tétel: Legyen $(x^1, \dots, x^n)$ és $(y^1, \dots, y^n)$ az A^n tér 2 affin koord.-ján rendszere. Ekkor az azonos pontokhoz rendelt x és y koordináták között az $\boxed{y^i = \sum_{j=1}^{n} A^i_j x^j + p^i}$ lineáris összefüggés érvényes, ahol (A_j^i) nem-elfajuló, $n \times n$ típusú matrix, valamint $p^i \in$

• Megfordítva, az $(x^1, \dots, x^n)$ affin koordinátarendszerből a fenti formulákkal számoztatott $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ függvények affin koordináta rendszert definiálnak.

III) Affin alterek:

Tekintsük az A^n térben $k+1$ affin független pontot, és jelöljük ezeket $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ jelekkel. Ezek segítségével képezzük az: $\underline{a}_0 + \sum_{i=1}^{k} x^i(\underline{a}_i - \underline{a}_0)$, $x^i \in R$ alakban előálló vektorok halmazát.

Az így előállítható halmazokat k-dim.-ós affin altereknek nevezzük.

Def: Az A^n-tér $(n-1)$ dimenziós affin altereit <u>hipertereknek</u> nevezzük.

$\boxed{\text{Tétel}}$: A (k) dim. affin altér mindig $(n-k)$ számú hipertér metszeteként áll elő.

(Megjegyzés: ez nem így van megfogalmazva, hanem valamilyen determinánsokkal. Lásd 2. jegyzet. 7. old. 5.1.5. Tétel)

(15) Vektorok skaláris és vektoriális szorzata, vegyesszorzat és tul-i, kiszámolásuk ortonormált bázisban

I.) Vektorok skaláris szorzata

Df: Adott $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skaláris szorzata: $|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos(\underline{a},\underline{b})$

Tulajdonságai: 1.) $\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a}$ kommutatív

bilineáris $\begin{cases} 2.)\ (\lambda\underline{a})\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot(\lambda\underline{b})=\lambda\cdot(\underline{a}\,\underline{b}) \\ 3.)\ (\underline{a}+\underline{b})\cdot\underline{c}=\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{b}\cdot\underline{c} \text{ disztributív} \end{cases}$

4.) $\underline{a}\cdot\underline{b}=0 \iff \underline{a}=\underline{0}$ vagy $\underline{b}=0$ vagy $\underline{a}\perp$

minusz-tétel: ABC Δ esetén: $|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2\cdot|BC|\cdot|AB|\cdot\cos(AB,AC)$

Megjegyzés: skalár szorzat segítségével bizonyítható

Skaláris szorzat kiszámítása koordinátákkal (ortonormált bázis)

Legyen $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$ ortonormált bázis

$$\left.\begin{aligned} \underline{u} &= \alpha_1\underline{e}_1+\alpha_2\underline{e}_2+\alpha_3\underline{e}_3 \\ \underline{v} &= \beta_1\underline{e}_1+\beta_2\underline{e}_2+\beta_3\underline{e}_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\underline{u}\cdot\underline{v}=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\beta_i=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}$$

(II.) Vektorok vektoriális szorzata:

Def: A térbeli $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata az a $\underline{c}$ vektor, amely teljesíti a következőket:

a.) $|\underline{c}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin(\underline{a},\underline{b})\sphericalangle$

b.) $\underline{c} \perp \underline{a}, \underline{b}$ vektorok mindegyikére

c.) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ jobbsodrású rendszert alkotnak.

Jobbsodrású rendszer:

$\underline{a}, \underline{b}$ síkjában vegyük azt az irányítást, amelyben $\underline{a}$ a $\underline{b}$ jobbpartjára esik. Ennek az irányított síknak a jobbpartján van $\underline{c}$. Ekkor az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ rendszert jobbsodrású rendszernek nevezzük. Vektoriális szorzat jele $\boxed{\underline{a} \times \underline{b}}$

Tulajdonságai:

1.) $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$

bilineáris
$$\left\{\begin{array}{l} 2.)\ (\lambda \underline{a}) \times \underline{b} = \lambda(\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{a} \times (\lambda \underline{b}) \\ 3.)\ (\underline{a}+\underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c} \end{array}\right.$$

$$\underline{c} \times (\underline{a}+\underline{b}) = \underline{c} \times \underline{a} + \underline{c} \times \underline{b}$$

Vektoriális szorzat kiszámítása koordinátákkal:
(ortonormált bázisban)

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ortonormált bázis ($\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ merőleges egységvektorok) és

$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$
$\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$
$\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$

Legyen $\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$
$\underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}$

$$\underline{a}\times\underline{b} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\underline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\underline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\cdot\underline{k}}_{\text{helyettesítve és alkalmazva a disztributivitást}} = \underbrace{\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}_{\text{formális determináns}}$$

A vektoriális szorzat egy további tulajdonsága:

Ha φ izometria, és $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok:

$$\varphi(\underline{a})\times\varphi(\underline{b}) = \begin{cases} \varphi(\underline{a}\times\underline{b}), & \text{ha } \varphi \text{ mozgás} \\ -\varphi(\underline{a}\times\underline{b}), & \text{ha } \varphi \text{ irányításváltó izometria} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Kifejtési tétel}}$: 1.) $(\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c} = (\underline{a}\underline{c})\underline{b} - (\underline{b}\underline{c})\underline{a}$

2.) $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = (\underline{a}\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\underline{b})\underline{c}$

Vegyes szorzat:

Def: Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok vegyesszorzata $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}$

Jel: $\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}$

$\boxed{\text{Állítás:}}$

$$\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c} = \begin{cases} V(\underline{a},\underline{b},\underline{c} \text{ által kifeszített paralelepipedon}), & \text{ha } \underline{a},\underline{b},\underline{c} \text{ jobbsodrású} \\ -V(\underline{a},\underline{b},\underline{c} \text{ által kifeszített paralelepipedon}), & \text{ha } \underline{a},\underline{b},\underline{c} \text{ nem jobbsodrású} \end{cases}$$

Biz: $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c} = \underbrace{|\underline{a}\times\underline{b}|}_{\underline{a},\underline{b} \text{ oldalú paralelogramma területe}}\cdot\underbrace{|\underline{c}|\cdot\cos(\underline{a}\times\underline{b},\underline{c})}_{\underline{a},\underline{b},\underline{c} \text{ által kifeszített paralelepipedon magassága, vagy annak (-1)-szerese.}}$

Következmény: FELCSERÉLÉSI TÉTEL!

Ha $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ jobbsodrású $\Rightarrow$ $\underline{b}, \underline{c}, \underline{a}$ ill. $\underline{c}, \underline{a}, \underline{b}$ is jobbsodrású rendszert állot:

$$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = \underline{b}\,\underline{c}\,\underline{a} = \underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b}$$

· Kiindulás: ortonormált jobbsodrású bázisban:

Legyen: $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ az ortonormált bázis

$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \underline{b} = (b_1, b_2, b_3),\ \underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c} = (\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot (c_1\underline{i} + c_2\underline{j} + c_3\underline{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

16 Vektorok lineáris függetlensége, bázis, vektor koordinátái, báziscsere mátrixa
egyenes és sík egyenletei a síkon és térben
izometriák mátrixa

1) ~~Vektorok lineáris függetlensége, bázis, vektor koordinátái~~

Def: Lineáris kombináció: Az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ vektorok lineáris kombinációja a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i$ alak

Def: Lineárisan független vektorrendszer:
Egy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorrendszer vektorai lineárisan függetlenek, ha $\forall \underline{y}$ vektor legfeljebb egyféleképpen áll elő ezek lineáris kombinációjaként

Állítás: A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorrendszer vektorai akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha a null vektort csak a csupa nulla együtthatós lineáris kombinációjuk állítja elő.

Jelölés: $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ lin. független vektorrendszer $\Leftrightarrow$
$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0 \; \forall n$?

Def: Generátorrendszer: A $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ vektorrendszer generátorrendszer a síkban (v. térben), ha minden vektor előáll $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Def: Bázis: lineárisan független generátorrendszer.

Tétel: 1.) A sík vektorai közül bm. 2 nem 0 és nem párhuzamos vektor bázist alkot, és így az összes bázist megkapjuk.

2.) A tér vektorai közül bm. 3 komplanáris (vagyis nem párhuzamos) vektor bázist alkot, és így az összes bázis.

Def: Ortonormált bázis: + eukl. belső norm.

1.) Egy $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ bázis $\boxed{\text{ortogonális}}$ $\Leftrightarrow \underline{b}_i \perp \underline{b}_j, \forall i \neq j$ esetén

2.) Egy $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ bázis $\boxed{\text{normált}}$ $\Leftrightarrow |\underline{b}_i| = 1, \forall i$ esetén

3.) Ortonormált bázis az, amely ortogonális, és normált.

II.) Vektor koordinátái, báziscsere mátrixa:

Koordinátarendszer: origó + $\underline{e}, \underline{f}$ ($\underline{g}$) bázis

Origó: a sík egy kitüntetett pontja

Helyvektor: az origóból egy adott pontba mutató vektor, segítségével bijekciót képezhetünk a pont és az origóból induló reprezentánsa között! $P \leftrightarrow \overrightarrow{OP}$

Koordináták: Az $\overrightarrow{OP}$ egyértelműen előáll bázisvektorok lineáris kombinációjaként. $\overrightarrow{OP} = x_1\underline{e} + x_2\underline{f}$

Így minden pontnak kölcsönösen egyértelmű módon meghatároz egy valós számpárt → ezeket nevezzük koordinátáknak.

[illegible]: Legyenek $(O, \underline{e}, \underline{f})$ és $(O', \underline{e}', \underline{f}')$ különböző koordinátarendszerek

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{OP} = x_1 \underline{e} + x_2 \underline{f} \qquad \overrightarrow{O'P} = x_1' \underline{e}' + x_2' \underline{f}'$$

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + x_1 \underline{e} + x_2 \underline{f}$$

$$x_1' \underline{e}' + x_2' \underline{f}' = \overrightarrow{O'O} + x_1 \underline{e} + x_2 \underline{f}$$

Két bázis közötti kapcsolat: $\underline{e} = b_{11} \underline{e}' + b_{12} \underline{f}'$

$\underline{f} = b_{21} \underline{e}' + b_{22} \underline{f}'$

$$\Rightarrow x_1' \underline{e}' + x_2' \underline{f}' = \overrightarrow{O'O} + x_1(b_{11} \underline{e}' + b_{12} \underline{f}') + x_2(b_{21} \underline{e}' + b_{22} \underline{f}')$$

+ legyen $\overrightarrow{O'O} = x_0 \underline{e}' + y_0 \underline{f}'$

$$\Rightarrow x_1' \underline{e}' + x_2' \underline{f}' = \underline{e}'(b_{11} x_1 + b_{21} x_2 + x_0) + \underline{f}'(b_{12} x_1 + b_{22} x_2 + y_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}} \quad \text{ahol } \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}:$$

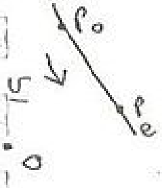
bázisátmenet mátrixa!

Egyenes és sík egyenletei síkon és a térben:

Egyenes egyenletei:

Irányvektoros egyenlet:

Alapja: Az egyenes egyértelműen meghatározható egy pontjával: (P_0) és egy vele párhuzamos vektorral → irányvektor: ($\underline{v}$)



$\forall P$ pontra $P \in e \Leftrightarrow \exists t: \overrightarrow{P_0P} = \underline{v}\cdot t$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\underline{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + t\cdot v_1 \\ y &= y_0 + t\cdot v_2 \end{aligned}}$$

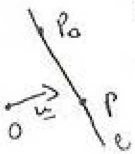
Egyenes paraméteres irányvektoros egyenletrendszere

kiküszöbölve t-t: Az egyenes irányvektoros egyenlete

$$v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$$

b) Normálvektoros egyenlet:

Alapja: A síkon egy egyenes egyértelműen megadható egy pontjával és egy, az egyenesre merőleges vektorral: normálvektor: $\underline{n}$



$$P \in e \Leftrightarrow \underline{n} \perp \overrightarrow{P_0P} \Leftrightarrow \underline{n}\cdot\overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$$

vagyis $\underline{n}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0$ $\quad \underline{n}(n_1, n_2)$

Koordinátákkal: $n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) = 0$

$$\boxed{n_1x + n_2y = n_1x_0 + n_2y_0}$$

2.] Egyenes egyenlete térben:

A síkbeli irányvektoros egyenlettel analóg módon:
Legyen az egyenes egy pontja P_0, irányvektora: $\underline{v}$

$P \in e \Leftrightarrow \exists t : \overrightarrow{P_0P} = t\cdot\underline{v}$ $\qquad \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$

$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\cdot\underline{v} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\underline{v}}$

Koordinátákkal:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$x = x_0 + t\cdot v_1 \Rightarrow t = \frac{x-x_0}{v_1}$, ha $v_1 \neq 0$
$y = y_0 + t\cdot v_2 \Rightarrow t = \frac{y-y_0}{v_2}$, ha $v_2 \neq 0$
$z = z_0 + t\cdot v_3 \Rightarrow t = \frac{z-z_0}{v_3}$, ha $v_3 \neq 0$

Ha $v_1 = 0 \Rightarrow x = x_0$, $v_2 = 0 \Rightarrow y = y_0$, $v_3 = 0 \Rightarrow z = z_0$

$\Rightarrow$ ha v_1, v_2, v_3 egyike sem 0,
az egyenes térbeli egyenletrendszere: $\boxed{\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}}$

Sík egyenletei:

A sík „irányvektoros" egyenlete:

Tek.: a sík egy P_0 pontját és az origóból kiinduló helyvektorát meg. ált. irj. sík; $\parallel$ a Σ síkkal

$P \in \Sigma \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}$ előáll $\underline{v_1}, \underline{v_2}$ lin. kombinációjaként

$P \in \Sigma \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta : \overrightarrow{P_0P} = \alpha\cdot\underline{v_1} + \beta\cdot\underline{v_2}$

mivel $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \alpha\cdot\underline{v_1} + \beta\cdot\underline{v_2}} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix}$$

Megj.: A kapott egyenletrendszerből α, β kiejthető. Ide az kapott egyenlet nem lesz szimmetrikus

6.) A sík normálvektoros egyenlete:

A sík egyértelműen meghatározható egy pontja és egy normálvektora segítségével.

Normálvektor: olyan vektor, aminek párhuzamossági osztálya merőlegesek a keresett síkra, jel: $\underline{n}$

$$P \in \Sigma \iff \underline{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$$

$$\underline{n}\,(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0$$

Koordinátákkal: $\boxed{n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0}$

7.) Izometriák mátrixa:

Legyen φ tetsz. izometria $\Rightarrow$ hozzárendelhető egy őt jellemző $\vec{\varphi}$ lineáris vektortranszformáció

Ha adott egy $\underline{v} = \overrightarrow{PQ}$ vektor, akkor $\vec{\varphi}(\underline{v}) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}$

Tulajdonságai:
1.) csak $\underline{v}$-től függ, a reprezentánstól független
2.) Additivitás: $\vec{\varphi}(\underline{v_1}+\underline{v_2}) = \vec{\varphi}(\underline{v_1}) + \vec{\varphi}(\underline{v_2})$
3.) Homogenitás: $\vec{\varphi}(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot \vec{\varphi}(\underline{v})$

Ha φ izometria $\Rightarrow$ $\vec{\varphi}$ megőrzi a szalámszorzatot. $\forall \underline{u}, \underline{v}$ vektorok esetében: $\vec{\varphi}(\underline{u}) \cdot \vec{\varphi}(\underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

Legyen $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ ortonormált bázis

$$\vec{\varphi}(\underline{e}_1) = f_{11}\underline{e}_1 + f_{21}\underline{e}_2$$
$$\vec{\varphi}(\underline{e}_2) = f_{12}\underline{e}_1 + f_{22}\underline{e}_2$$

$$1 = |\underline{e}_1| = |\varphi(\underline{e}_1)| = \sqrt{(f_{11}\underline{e}_1 + f_{21}\underline{e}_2)^2} = \sqrt{f_{11}^2 + f_{21}^2}$$

$$1 = |\underline{e}_2| = |\varphi(\underline{e}_2)| = \dots = \sqrt{f_{12}^2 + f_{22}^2}$$

$\boxed{\text{Feltétel}}$: (1.) $|\vec{\varphi}(\underline{e}_1)| = 1 \Rightarrow f_{11}^2 + f_{21}^2 = 1$

$|\vec{\varphi}(\underline{e}_2)| = 1 \Rightarrow f_{12}^2 + f_{22}^2 = 1$

(2.) $\varphi(\underline{e}_1) \perp \varphi(\underline{e}_2) \Rightarrow \varphi(\underline{e}_1) \cdot \vec{\varphi}(\underline{e}_2) = 0$

$f_{11} f_{21} + f_{12} f_{22} = 0$

Ha az $\begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}$ mátrix kielégíti az (1.) és (2.) formulákat, akkor van olyan φ izometria, amelynek mátrixa az adott mátrix.