

Feladatsor a Konstruktív- és komputergeometria tárgyhoz

Összeállította: Dr. Nagy Gábor,
<http://www.math.u-szeged.hu/~nagyg/>

1. feladat. Adja meg az alábbi transzformációk fixpontjait és fixegyeneseit a közönséges és a projektív síkon:

- a) Tengelyes tükrözés.
- b) Forgatás
- c) Eltolás.
- d) Középpontos nyújtás.

2. feladat. Adottak a térbeli Σ síkon az alábbi transzformációk.

- a) Tengelyes tükrözés.
- b) Forgatás
- c) Eltolás.
- d) Merőleges nyújtás.
- e) Középpontos nyújtás.

Állítsa ezeket elő párhuzamos vetítések szorzataként. [Útmutatás: A forgatást két tengelyes tükrözés, a középpontos nyújtást pedig két merőleges tengelyű merőleges nyújtás szorzataként elő tudjuk állítani.]

3. feladat. Mutassa meg, hogy egy kör párhuzamos vetülete ellipszis.

4. feladat. Mutassa meg, hogy egy kör középpontos vetülete mindig kúpszelet.

5. feladat. Mutassa meg, hogy egy projektív leképezés akkor és csak akkor affin transzformáció, ha bármely négyzet képe paralelogramma. [Útmutatás: A paralelogramma szemközti oldalpárjainak metszéspontjai pontosan a végtelen távoli egyenest határozzák meg.]

6. feladat. Adottak a (közönséges) síkon a t, ℓ párhuzamos egyenesek és a $C \notin t, \ell$ pont. Legyen φ az a centrális-axiális kollineáció, melynek C centruma, t tengelye és amely az ℓ -et a végtelen távoli egyenesben viszi. Szerkesszük meg a tetszőleges P pont φ melletti képét. [Útmutatás: Először szerkesszük meg a P -n átmenő tetszőleges g egyenes képét. Ehhez használjuk fel arról a g' egyenesről rendelkezésre álló információkat, amely a C -t köti össze a $g \cap \ell$ ponttal.]

7. feladat. Mutassuk meg, hogy az n_1, n_2 egyenesek akkor és csak akkor lehetnek egy térbeli sík nyomvonalai a Monge-féle ábrázolásba, ha közös pontban metszik az $x_{1,2}$ -tengelyt.

8. feladat. A Monge-féle képeikkel adottak az e, g térbeli egyenesek és a P térbeli pont. Szerkesszük meg annak a h egyenesnek a képeit, mely átmegy P -n és metszi e -t és g -t. [Útmutatás: A Monge-féle alapszerkesztésekkel meg tudjuk szerkeszteni a P és e közös Σ síkjának nyomvonalait, majd megszerkesztjük a Σ és g metszéspontjának képeit.]

Definíció. $B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$, ahol $0 \leq k \leq n$. Ha $k < 0$ vagy $k > n$, akkor $\binom{n}{k} = B_k^n(t) = 0$.

9. feladat. Mutassa meg a Bernstein-polinomok alábbi tulajdonságait.

a) $B_k^n(t) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} t^j.$

b) $\frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) = t B_i^n(t).$

c) $B_i^n(t) = (1-t) B_i^{n-1}(t) + t B_{i-1}^{n-1}(t).$

d) $\sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_i^n(t) = t.$

e) $\binom{n}{i} t^i = \sum_{j=i}^n B_j^n(t).$

f) $B_k^n(ts) = \sum_{i=k}^n B_i^n(t) B_k^i(s).$

g) $(B_k^n(t))' = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)).$

10. feladat. Határozzuk meg a $P_0(-2, 2), P_1(2, -2), P_2(-2, -2), P_3(2, 2)$ kontrollpontok által meghatározott Bézier-görbe paraméteres alakját.

11. feladat. Határozzuk meg a $\mathbf{B}(t) = (8t^3 - 12t^2 + 6t - 1, 4t^2 - 4t + 1)$ Bézier-görbe kontrollpontjait. [Útmutatás: A kontrollpontok számát a görbe fokából megállapíthatjuk. Az első és utolsó kontrollpont egyszerű $t = 0$ és $t = 1$ helyettesítéssel adódik, a többire lineáris egyenletrendszert tudunk felírni.]