

Bevezetés a matematikába (2009. ősz) – 1. röpdolgozat

1. feladat. Fogalmazza meg a következő ítélet kontrapozícióját:

Ha a sorozat csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.

2. feladat. Vezessük be a következő jelöléseket: $E(x)$: „ x háromszög”, $D(x, a, b, c)$: „ a , b és c az x oldalai”. Fordítsuk le hétköznapi nyelvre a következő ítéletet: $\neg(\exists x)(E(x) \wedge D(x, 1, 2, 5))$.

3. feladat. Legyen

$$A = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ és } x \text{ 7-tel osztható kétjegyű szám}\}$$

$$B = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ és } x \text{ 3-mal osztható kétjegyű szám}\}$$

Határozzuk meg az $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ halmazt.

4. feladat. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- 1) tetszőleges A halmazra $A \in A$;
- 2) tetszőleges A halmazra $A \in \{A\}$;
- 3) Ha $A, B \subseteq C$ akkor $A \cup B \subseteq C$;

5. feladat. Bizonyítsa be az

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}$$

egyenlőséget.

6. feladat. Fogalmazza meg a következő ítélet kontrapozícióját:

Ha a háromszög egyenlő szárú és van egy 60 fokos szöge, akkor szabályos.

7. feladat. Vezessük be a következő jelöléseket: $E(x)$: „ x páros”, $D(x, y)$: „ x osztója y -nak”. Fordítsuk le hétköznapi nyelvre a következő ítéletet: $\neg(\exists x)(E(x) \wedge D(x, 75))$.

8. feladat. Legyen

$$A = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ és } x \text{ 7-tel osztható kétjegyű szám}\}$$

$$B = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ és } x \text{ 3-mal osztható kétjegyű szám}\}$$

Határozzuk meg az $A \cap B$, $A \cup B$ és $A \setminus B$ halmazokat.

9. feladat. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- 1) tetszőleges A, B halmazokra, ha $a \in A$ és $A \in B$, akkor $a \in B$;
- 2) tetszőleges A, B halmazokra, ha $A = B$, akkor $A \in \{B\}$.
- 3) $A \subseteq B$ akkor és csak akkor, ha $A \cap B = B$;

10. feladat. Bizonyítsa be, hogy a sík n darab egyenese maximálisan $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ részre osztja a síkot.

11. feladat. Fogalmazza meg a következő ítélet kontrapozícióját:
Ha p prímszám, $p \mid ab$ és $p \nmid a$, akkor $p \mid b$.

12. feladat. Vezessük be a következő jelöléseket: $E(x)$: „ x valós szám”, $D(x, y)$: „ $x^2 = y$ teljesül”. Fordítsuk le hétköznapi nyelvre a következő ítéletet:
 $\neg(\exists x)(E(x) \wedge D(x, -5))$.

13. feladat. Milyen A és B halmazok esetén igaz a hatványhalmazokra a

$$P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$$

egyenlőség?

14. feladat. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- 1) tetszőleges A halmazra $A \in A$;
- 2) Ha $A, B \subseteq C$ akkor $A \cup B \subseteq C$;
- 3) Ha $C \subseteq A, B$ akkor $C \subseteq A \cap B$;

15. feladat. Határozza meg az $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) rekurzív sorozat képletét.

16. feladat. Fogalmazza meg a következő ítélet kontrapozícióját:
Ha két egyenesnek nincs közös pontjuk, vagy a két egyenes egybeesik, akkor párhuzamosak.

17. feladat. Vezessük be a következő jelöléseket: $E(x)$: „ x kör”, $D(x, y)$: „ x -et valamely egyenes y pontban metszi”. Fordítsuk le hétköznapi nyelvre a következő ítéletet: $\neg(\exists x)(E(x) \wedge D(x, 3))$.

18. feladat. Hány elem van egy háromelemű halmaz hatványhalmazának hatványhalmazában?

19. feladat. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- 1) tetszőleges A halmazra $A \in \{A\}$;
- 2) $A \subseteq B$ akkor és csak akkor, ha $A \cap B = A$;
- 3) $A \subseteq B$ akkor és csak akkor, ha $A \cup B = B$.

20. feladat. Bizonyítsa be az

$$1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

összefüggést.

Bevezetés a matematikába (2009. ősz) – 2. röpdolgozat

1. feladat. Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B \setminus A = \{1, 3, 5\}$ és $A \cap B = \{2\}$. Határozzuk meg az A és B halmazokat.

2. feladat. Egy kft-ben 65 ember dolgozik. Közülük 23-en beszélnek angolul, 35-en németül, 30-an franciául. Angolul és németül 14-en, angolul és franciául 10-en, németül és franciául 16-an beszélnek, végül mind a három nyelvet 4-en beszélik. Hány olyan dolgozója van a társaságnak, aki egyik nyelvet sem beszél?

3. feladat. Határozza meg az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = -5x + 11$ leképezések $f \circ g$ szorzatleképezését.

4. feladat. Az alábbi leképezések közül melyik injektív?

(a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto -x + 13$,

(b) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$,

(c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$.

5. feladat. Az ún. Tribonacci-sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$t_1 = 1, t_2 = 1, t_3 = 2,$$

$$t_{n+1} = t_n + t_{n-1} + t_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Hány darab közös elem van a Fibonacci és Tribonacci sorozat első 10 elemében?

6. feladat. Írja fel az $\{1, 2, 3\}$ halmaz hatványhalmazát.

7. feladat. Egy kft-ben 98 ember dolgozik. Közülük 45-en beszélnek angolul, 43-en németül, 34-an franciául. Angolul és németül 17-en, angolul és franciául 13-en, németül és franciául 15-en beszélnek, végül mind a három nyelvet 6-en beszélik. Hány olyan dolgozója van a társaságnak, aki egyik nyelvet sem beszél?

8. feladat. Határozza meg az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 13$, $g(x) = 6x - 11$ leképezések $f \circ g$ szorzatleképezését.

9. feladat. Az alábbi leképezések közül melyik szürjektív?

(a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto -x + 3$,

(b) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$,

(c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$.

10. feladat. Határozzuk meg az $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ ($n \geq 2$) rekurzív sorozat első 8 elemét.

11. feladat. Írja fel az $A = \{1, 2, 3\}$ halmaz összes önmagára vett szürjektív leképezését.

12. feladat. Az $1, 2, \dots, 120$ természetes számok között hány olyan van, ami nem osztható sem 2-vel, sem 3-al, sem pedig 5-el?

13. feladat. Határozza meg az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x - 13$, $g(x) = 4x + 5$ leképezések $f \circ g$ szorzatleképezését.

14. feladat. Az alábbi leképezések közül melyik injektív?

(a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto -3x + 13$,

(b) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x^2 - 1$,

(c) $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto 2x^2 - 1$.

15. feladat. Az ún. Tribonacci-sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 1,$$

$$t_{n+1} = t_n + t_{n-1} + t_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Mennyi t_{11} ?

16. feladat. Az $1, 2, \dots, 150$ természetes számok között hány olyan van, ami nem osztható sem 2-vel, sem 5-el, sem pedig 7-el?

17. feladat. Határozzuk meg az $A = \{0, 1\}$ halmaznak a $B = \{2, 4, 6\}$ halmazra vett összes szürjektív leképezését.

18. feladat. Határozza meg az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 13$, $g(x) = -x + 5$ leképezések $f \circ g$ szorzatleképezését.

19. feladat. Az alábbi leképezések közül melyik szürjektív?

(a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto -x - 10$,

(b) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x^3 + 1$,

(c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^3 + 1$.

20. feladat. Értelmezzük az $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ ($n \geq 2$) rekurzív sorozatot. Állapítsa meg, hogy a sorozat

(a) szigorúan monoton csökkenő-e?

(b) szigorúan monoton növekvő-e?

Bevezetés a matematikába (2009. ősz) – 3. röpdolgozat

1. feladat. Hány négyjegyű számot írhatunk fel az 1, 3, 4, 6, 8 számjegyek felhasználásával, ha egy számjegyet többször használhatunk fel egy szám felírásakor?

2. feladat. Hány olyan hatjegyű szám van, amely öt különböző számjegyet tartalmaz? Ezek között hány olyan van, amely négy páratlan számjegyet tartalmaz?

3. feladat. Egy 27-es létszámú osztályban 4 jutalmat osztanak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha a jutalmak azonosak és egy tanuló legfeljebb egy jutalmat kaphat?

4. feladat. Írjuk fel az a, b, c, d elemek összes 3-tagú ismétlés nélküli variációit.

5. feladat. Igazoljuk, hogy $x > 1$ esetén

$$\log_2 x + \log_x 2 \geq 2.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

6. feladat. Hány négyjegyű számot írhatunk fel az 2, 4, 6, 7, 9 számjegyek felhasználásával, ha használhatunk fel egy szám felírásakor?

7. feladat. Hány olyan négyjegyű szám van, amely 3 különböző számjegyet tartalmaz? Ezek között hány olyan van, amely három páros számjegyet tartalmaz?

8. feladat. Egy 24-es létszámú osztályban 5 jutalmat osztanak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha a jutalmak különbözőek és egy tanuló legfeljebb egy jutalmat kaphat?

9. feladat. Írjuk fel az 1, 2, 3, 4 elemek összes 3-tagú ismétlés nélküli kombinációit.

10. feladat. Bizonyítsuk be, hogy $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, ahol $n \geq 2$.

11. feladat. Hány olyan ötjegyű szám képezhető, amely nem tartalmazza a 0 számjegyet és a 2-es és a 7-es számjegyet tartalmazza?

12. feladat. Hány olyan hatjegyű szám van, amely hat különböző számjegyet tartalmaz? Ezek között hány olyan van, amely három páros számjegyet tartalmaz?

13. feladat. Egy 32-as létszámú osztályban 4 jutalmat osztanak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha a jutalmak különbözőek és egy tanuló több jutalmat is kaphat?

14. feladat. Írjuk fel az a, b, c, d elemek összes 3-tagú ismétléses variációit.

15. feladat. Igazoljuk, hogy $ac + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$, ahol $a, b, c \geq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

16. feladat. Hány olyan ötjegyű szám képezhető, amely nem tartalmazza a 0 számjegyet és legalább egy páratlan számjegyet tartalmaz?

17. feladat. Hány olyan hatjegyű szám van, amely 5 különböző számjegyet tartalmaz? Ezek között hány olyan van, amely 5 páratlan számjegyet tartalmaz?

18. feladat. Egy 23-as létszámú osztályban 5 jutalmat osztanak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha a jutalmak azonosak és egy tanuló több jutalmat is kaphat?

19. feladat. Írjuk fel az 1, 2, 3, 4 elemek összes 3-tagú ismétléses kombinációit.

20. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, akkor

$$ab^2c^3d^4 \leq \left(\frac{a + 2b + 3c + 4d}{10} \right)^{10}.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Bevezetés a matematikába (2009. ősz) – 4. röpdolgozat

- 1. feladat.** Határozzuk meg azokat az $n \in \mathbb{Z}$ egész számokat, melyekre az $\frac{2n^2 + 6n + 7}{n - 2}$ egész szám.
- 2. feladat.** Végezzük el a $(4401)_7 - (5223)_7$ műveletet a 7-es számrendszerben.
- 3. feladat.** Írjuk fel a $3,4\dot{3}\dot{4}$ tizedes törtet közösleges törtként.
- 4. feladat.** Írja fel az $f(x) = x^2 + x + 1$ polinomfüggvény gyöktényezőss felbontását.
- 5. feladat.** Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a lehető legbővebb részhalmazát, ahol értelmezhető a $\log_{10}(-x^2 + 100)$ kifejezés! Adjuk meg az így értelmezett kifejezés értékkészletét is!
- 6. feladat.** Határozzuk meg azokat az $n \in \mathbb{Z}$ egész számokat, melyekre az $\frac{2n^2 + 6n - 7}{n - 2}$ egész szám.
- 7. feladat.** Végezzük el a $(3342)_7 - (2524)_7$ műveletet a 7-es számrendszerben.
- 8. feladat.** Írjuk fel a $12,5\dot{9}$ tizedes törtet közösleges törtként.
- 9. feladat.** Írja fel az $f(x) = x^3 - x$ polinomfüggvény gyöktényezőss felbontását.
- 10. feladat.** Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a lehető legbővebb részhalmazát, ahol értelmezhető a $\frac{7x + 6}{2x - 3}$ kifejezés! Adjuk meg az így értelmezett kifejezés értékkészletét is!
- 11. feladat.** Határozzuk meg azokat az $n \in \mathbb{Z}$ egész számokat, melyekre az $\frac{3n^2 + 4n + 7}{n - 2}$ egész szám.
- 12. feladat.** Írjuk fel a 2525 számot 5-ös számrendszerben.
- 13. feladat.** Írjuk fel a $0.\dot{3}6\dot{7}$ tizedes törtet közösleges törtként.
- 14. feladat.** Írja fel az $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ polinomfüggvény gyöktényezőss felbontását.
- 15. feladat.** Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a lehető legbővebb részhalmazát, ahol értelmezhető a $\cos(\sqrt{x - 1})$ kifejezés! Adjuk meg az így értelmezett kifejezés értékkészletét is!

16. feladat. Határozzuk meg azokat az $n \in \mathbb{Z}$ egész számokat, melyekre az $\frac{3n^2 + 4n - 7}{n - 2}$ egész szám.

17. feladat. Írjuk fel az 555 számot 3-as számrendszerben.

18. feladat. Írjuk fel a $0,4\dot{5}68$ tizedes törtet közösleges törtként.

19. feladat. Írja fel az $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ polinomfüggvény gyöktényezős felbontását.

20. feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a lehető legbővebb részhalmazát, ahol értelmezhető a $\sin(\log_{10}(x + 1))$ kifejezés! Adjuk meg az így értelmezett kifejezés értékkészletét is!

Bevezetés a matematikába (2009. ősz) – 5. röpdolgozat

1. feladat. Van-e az alábbi függvénynek inverze? Ha igen, adjuk meg azt; ha nincs, indokoljuk meg, miért!

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x \geq 0, \\ 2x - 1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

2. feladat. Határozzuk meg a $P(3, 3)$ és $Q(5, 3)$ pontok 1 : 1 arányú osztópontját.

3. feladat. Határozzuk meg a $P(-4, 0)$ és $Q(5, -5)$ pontokat összekötő egyenes paraméteres alakját.

4. feladat. Határozzuk meg a(z) $-2X + Y + 6 = 0$ és $X - Y - 1 = 0$ egyenletű egyenesek metszéspontját.

5. feladat. Határozzuk meg a $P(1, 3)$, $Q(4, 3)$ végpontú szakasz felezőmerőlegességének egyenletét.

6. feladat. Van-e az alábbi függvénynek inverze? Ha igen, adjuk meg azt; ha nincs, indokoljuk meg, miért!

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-5/4\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x + 3}{4x + 5}.$$

7. feladat. Határozzuk meg a $P(-4, 3)$ és $Q(3, -1)$ pontok 3 : 2 arányú osztópontját.

8. feladat. Határozzuk meg a $P(-4, -2)$ és $Q(-2, 3)$ pontokat összekötő egyenes paraméteres alakját.

9. feladat. Határozzuk meg a(z) $-X + 3 = 0$ és $Y - 4 = 0$ egyenletű egyenesek metszéspontját.

10. feladat. Határozzuk meg a $P(3, -5)$, $Q(-5, 4)$ végpontú szakasz felezőmerőlegességének egyenletét.

11. feladat. Van-e az alábbi függvénynek inverze? Ha igen, adjuk meg azt; ha nincs, indokoljuk meg, miért!

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{ha } x \geq 0, \\ -2x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

12. feladat. Határozzuk meg a $P(-4, 1)$ és $Q(-4, -4)$ pontok $5 : 2$ arányú osztópontját.

13. feladat. Határozzuk meg a $P(2, -3)$, $Q(5, -3)$ végpontú szakasz felezőmerőlegesének egyenletét.

14. feladat. Határozzuk meg a $(z) -5X + 4Y - 6 = 0$ és $X - Y + 1 = 0$ egyenletű egyenesek metszéspontját.

15. feladat. Határozzuk meg a $P(1, -3)$ és $Q(-5, 4)$ pontokat összekötő egyenes paraméteres alakját.

16. feladat. Van-e az alábbi függvénynek inverze? Ha igen, adjuk meg azt; ha nincs, indokoljuk meg, miért!

$$f : [1, 8] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{0,5} x.$$

17. feladat. Határozzuk meg a $P(4, 0)$ és $Q(-1, 3)$ pontok $3 : 2$ arányú osztópontját.

18. feladat. Számoljuk ki az $A(-2, 4)$, $B(4, -2)$ és $C(-1, 0)$ pontok által meghatározott háromszög súlypontját.

19. feladat. Határozzuk meg a $(z) 2X + 5Y + 12 = 0$ és $-Y - 4 = 0$ egyenletű egyenesek metszéspontját.

20. feladat. Határozzuk meg a $P(-5, 0)$ és $Q(1, -2)$ pontokat összekötő egyenes paraméteres alakját.

Bevezetés a matematikába (2009. ősz) – 2. röpdolgozat

- 1. feladat.** Számolja ki az $\mathbf{u}(5, 5, 2)$ és $\mathbf{v}(-2, 3, -5)$ vektorok skalárszorzatát.
- 2. feladat.** Számolja ki a $\mathbf{v}(-5, -5, 0)$ vektor hosszát.
- 3. feladat.** Számolja ki az $\mathbf{u}(3t, -4t + 4, 4t - 5)$ és $\mathbf{v}(1, 4, 3)$ vektorok skalárszorzatát.
- 4. feladat.** Számolja ki az $\mathbf{u}(-4, -2, -2)$ és $\mathbf{v}(-1, 5, 4)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét.
- 5. feladat.** Számolja ki az $\mathbf{u}(5, 4, 5)$ és $\mathbf{v}(5, 4, 5)$ vektorok által bezárt szöget.
- 6. feladat.** Számolja ki az $\mathbf{u}(-5t - 1, 4t, 5t + 5)$ és $\mathbf{v}(2, 3, 5)$ vektorok skalárszorzatát.
- 7. feladat.** Számolja ki az $\mathbf{u}(4, 3, 3)$ és $\mathbf{v}(-5, 4, -5)$ vektorok által bezárt szöget.
- 8. feladat.** Számoljuk ki az $A(-1, 5)$, $B(0, 2)$ és $C(4, -3)$ pontok által meghatározott háromszög területét.
- 9. feladat.** Számolja ki a $\mathbf{v}(2, 4, -3)$ vektor hosszát.
- 10. feladat.** Számolja ki az $\mathbf{u}(-4, -3, -1)$ és $\mathbf{v}(-4, -5, 3)$ vektorok skalárszorzatát.
- 11. feladat.** Számolja ki az $\mathbf{u}(1, -2, 1)$ és $\mathbf{v}(3, 0, 1)$ vektorok által bezárt szöget.
- 12. feladat.** Számolja ki az $\mathbf{u}(3t - 4, 5t, -3t + 5)$ és $\mathbf{v}(3, -2, -2)$ vektorok skalárszorzatát.
- 13. feladat.** Határozza meg t értékét úgy, hogy az $\mathbf{u}(-5t, 0, -5t - 1)$ vektor merőleges legyen a $\mathbf{v}(3, -4, 2)$ vektorra.
- 14. feladat.** Számolja ki az $\mathbf{u}(-3, -5, -3)$ és $\mathbf{v}(-1, 5, 0)$ vektorok skalárszorzatát.
- 15. feladat.** Számolja ki az $\mathbf{u}(-5, -4, -2)$ és $\mathbf{v}(-1, 5, 0)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét.
- 16. feladat.** Számolja ki a $\mathbf{v}(0, -5, -1)$ vektor hosszát.
- 17. feladat.** Számolja ki az $\mathbf{u}(5, -5, 4)$ és $\mathbf{v}(5, -3, 4)$ vektorok által bezárt szöget.

18. feladat. Számolja ki az $\mathbf{u}(-4, -5, 1)$ és $\mathbf{v}(-4, -3, 2)$ vektorok skalárszorzatát.

19. feladat. Számolja ki az $\mathbf{u}(3, 3t + 3, -4t + 1)$ és $\mathbf{v}(-4, 1, -2)$ vektorok skalárszorzatát.

20. feladat. Számoljuk ki az $A(3, 1)$, $B(0, -3)$ és $C(1, 0)$ pontok által meghatározott háromszög területét.