

Feladatsor az Algebrai geometria c. tantárgyhoz

Számolós feladatok

1. Adott a Γ görbe $(x(t), y(t)) = (t^2 + t^3, t^3 + t^4)$ paraméterezése. Keressünk egy legfeljebb negyedfokú $f(X, Y)$ polinomot, melyre minden t esetén teljesül $f(x(t), y(t)) = 0$. [Útmutató: Vegyük észre, hogy $y = tx$.] Igaz-e, hogy minden olyan (x, y) esetén, melyre $f(x, y) = 0$, létezik t , hogy $x = x(t)$, $y = y(t)$ teljesül?

2. Mutassa meg, hogy létezik olyan $\Gamma : f(X, Y) = 0$ köbös görbe, melynek *egy kivétellel* minden pontja előáll az $(x(t), y(t)) = (1 + t^2, t + t^3)$ paraméterezésben.

3. Mutassa meg, hogy $x = i - 1$ gyöke az $f(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 2$ polinomnak. Keressen még egy komplex gyököt, majd faktorizálja teljesen a $f(X)$ -et.

4. Adjon meg egy olyan affin transzformációt, amely az $f(X, Y) = X^3 + Y^3 + 3XY$ polinomot a $g(X, Y) = X^3 + Y^3 - 3X^2 - 3Y^2 + 3XY + 1$ polinomba viszi.

5. Adjuk meg az $X^3 - 6X^2Y + 11XY^2 - 6Y^3 + 1 = 0$ görbe végtelen távoli pontjait.

6. A rezultáns segítségével keressük meg a alábbi paraméterezésben megadott görbék $f(X, Y)$ polinomját:

(a) $x(t) = t^4, y(t) = t + t^2$.

(b) $x(t) = t^2 + t^3, y(t) = t^4$.

(c) $x(t) = \frac{t^2}{1+t^2}, y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$.

[Útmutatás: Tekintsük az $f(X, Y, t) = X - x(t)$, $g(X, Y, t) = Y - y(t)$ polinomokat és a rezultáns segítségével küszöböljük ki a t ismeretlent.]

7. Adjuk meg azt a negyedfokú $f(X)$ polinomot, amelynek a gyökei pontosan az $X^2 + Y^2 = 1$ és az $Y^2 - 2XY - X^2 = 0$ görbék metszéspontjainak az abszcisszái.

8. Adjuk meg a $25X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$ görbének a $P_1(1, 7, 1)$ és $P_2(1, -1, 7)$ pontokat összekötő egyenessel vett metszéspontjait.

9. Adjuk meg az alábbi görbék szinguláris pontjait.

- (a) $XZ^2 - Y^3 + XY^2 = 0$.
- (b) $(X + Y + Z)^3 - 27XYZ = 0$.
- (c) $X^2Y^2 + 36XZ^3 + 24YZ^3 + 108Z^4 = 0$.

10. Adjuk meg az alábbi görbék szinguláris pontjait a komplex projektív síkon:

- (a) $X^3 + Y^3 = 3XY$ (Descartes-féle levél),
- (b) $(X^2 + Y^2)(X - 1)^2 = X^2$ (Nikomédész-féle konhoisz),
- (c) $(X^2 + Y^2)^3 = 4X^2Y^2$ (Négylevelű lóhere).

Rajzoljuk le ezeket a görbéket a valós projektív síkon.

11. Adjuk meg az alábbi görbék szinguláris pontjait és a szinguláris pontokban az érintőket:

- (a) $Y^3 - Y^2 + X^3 - X^2 + 3XY^2 + 3X^2Y + 2XY = 0$,
- (b) $X^4 + Y^4 - X^2Y^2 = 0$,
- (c) $X^3 + Y^3 - 3X^2 - 3Y^2 + 3XY + 1 = 0$,
- (d) $Y^2 + (X^2 - 5)(4X^4 - 20X^2 + 25) = 0$.

12. Vizsgáljuk meg az

$$X^2Y^5 - X^5Y^2 - 2XY^5Z + X^5Z^2 + Y^5Z^2 - X^3YZ^3 + 2\alpha X^2Y^2Z^3 - XY^3Z^3 = 0$$

($\alpha \in \mathbb{C}$) görbe szingularitásait az $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ és $(0, 0, 1)$ pontokban.

13. A k mely értékeire lesz az $X^3 + Y^3 + Z^3 + k(X + Y + Z)^3 = 0$ görbének egy vagy annál több szinguláris pontja? Határozzuk meg a szinguláris pontokat a k ezen értékeire.

14. Adjuk meg az alábbi görbepárok metszéspontjait.

- (a) $X(Y^2 - XZ) - Y^5 = 0$ és $Y^4 + Y^3Z - X^2Y^2 = 0$.

(b) $X^3 - Y^3 - 2XYZ = 0$ és $2X^3 - 4X^2Y - 3XY^2 - Y^3 - 2X^2Z = 0$.

(c) $X^4 + Y^4 + Y^2Z^2 = 0$ és $X^4 + Y^4 - 2Y^3Z - 2X^2YZ - XY^2Z + Y^2Z^2 = 0$.

15. Definiáljuk a $\Gamma : F(X, Y, Z) = (X^2 + Y^2)^2 + 3X^2YZ - Y^3Z = 0$ and $\Delta : G(X, Y, Z) = X^4 + Y^4 - 2Y^3Z - 2X^2YZ - XY^2Z + Y^2Z^2 = 0$ görbékét. Határozzuk meg a metszéspontokat a metszési multiplicitásokkal együtt.

Bizonyítós feladatok

16. Legyen $P(x_1, x_2, x_3)$ az $\Gamma : X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 0$ görbe egy tetszőleges pontja. Mutassuk meg, hogy P egyszerű, és a Γ irreducibilis. Adjuk meg a Γ P pontba húzott érintőjének egyenletét.

17. Legyen $F(X_1, X_2, X_3)$ egy másodfokú homogén polinom. Mutassuk meg, hogy ekkor F felírható

$$F(\mathbf{X}) = (X_1, X_2, X_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

alakban, ahol $a_{ij} = a_{ji}$. Továbbá az $F(\mathbf{X}) = 0$ görbének akkor és csak akkor van szinguláris pontja, ha $\det(a_{ij}) = 0$.

18. Legyen B_1, B_2 és B_3 az

$$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 = 0$$

irreducibilis kúpszelet három különböző pontja. Egy lineáris transzformációval a B_1, B_2, B_3 pontok elvihetők az E_1, E_2, E_3 pontokba. Ekkor a kúpszelet képének az egyenlete $c_3X_1X_2 + c_2X_1X_3 + c_1X_2X_3 = 0$ lesz, ahol $c_1c_2c_3 \neq 0$. Ezt az $x'_i = x_i/c_i$ (azaz $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$) lineáris transzformáció az $X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 = 0$ egyenletű kúpszeletbe viszi. Tehát bármely irreducibilis kúpszelet átvihető bármely másikba egy lineáris transzfomációval, és ez a transzformáció egyértelműen meghatározott.

19. Legyen $f(Y) = a_0Y^m + a_1Y^{m-1} + \dots$ és $g(Y) = Y - b$. Mutassuk meg, hogy ekkor $R_{f,g} = \pm f(b)$.

20. Legyen $F(X_1, X_2, X_3) = 0$ és $G(X_1, X_2, X_3) = 0$ két, egymást csak véges sok pontban metsző görbe. Mutassuk meg, hogy ekkor az $R_{F,G}(X_1, X_2)$

rezultáns csak akkor lehet azonosan nulla, ha mindkét görbe tartalmazza az $E_3(0, 0, 1)$ pontot.

21. Mutassuk meg, hogy

$$XY^2 + YZ^2 + ZX^2 + X^2Y + Y^2Z + Z^2X + kXYZ = 0$$

csak a $k = 2, 3$ vagy -6 esetekben szinguláris.

22. Mutassuk meg, hogy minden $n > 0$ értékhez létezik n -edfokú nem-szinguláris görbe.

23. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $F(X_1, \dots, X_n) \in C[X_1, \dots, X_n]$, A pedig egy $n \times n$ -es mátrix, $\det(A) \neq 0$. Legyen továbbá $F'(\mathbf{X}) = F(A\mathbf{X})$. Ekkor teljesül

$$\frac{\partial F'(\mathbf{x})}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_k}} = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n a_{j_1, i_1} \dots a_{j_k, i_k} \frac{\partial F(A\mathbf{x})}{\partial X_{j_1} \dots \partial X_{j_k}}.$$

24. Mutassa meg, hogy a $\Gamma : F(X, Y, Z) = XYZ + (Y + Z)^3$ görbének pontosan három inflexiós pontja van, és ezek mindegyike illeszkedik az $X + 3Y + 3Z = 0$ egyenesre.

25. Mutassa meg, hogy a $\Gamma : F(X, Y, Z) = X^3 + Y^3 - XY(X + Y + Z) = 0$ köbös görbének egyetlen szinguláris pontja van, és ebbe két érintő húzható. Mutassa meg, hogy Γ -nak pontosan három inflexiós pontja van, és ezek egy egyenesen helyezkednek el. [Útmutatás: Paraméterezze Γ -t.]