

Mennyi is a háromszög szögeinek összege?

Pályaorientációs napi előadás

Nagy Gábor Péter

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

2024. június 20.

Mottó

Kapitány a gépháznak:

- Mennyi?
- 30!
- Mi 30?
- Mi mennyi?

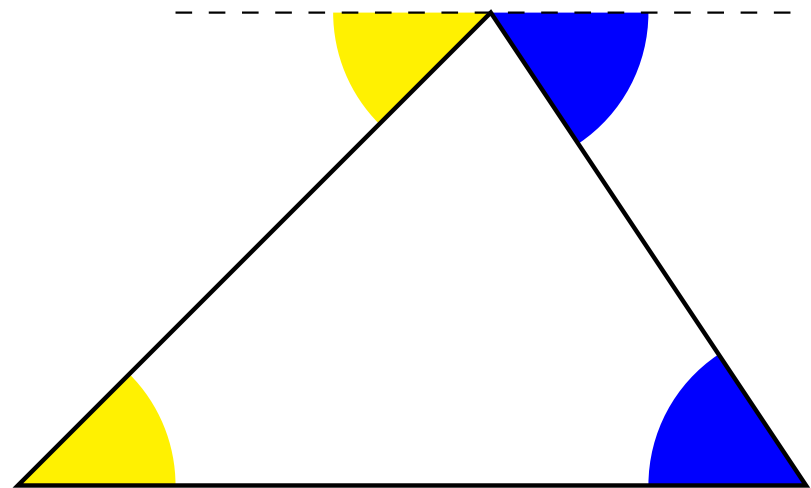
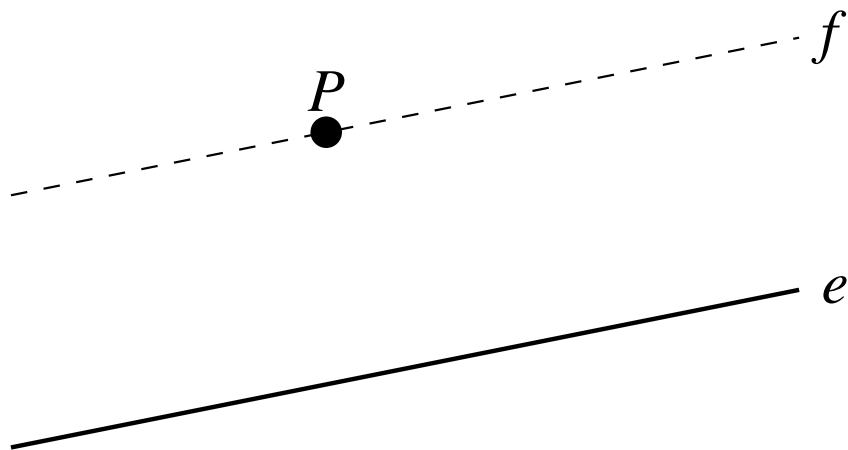
Tagolás

- 1 A geometriáról
- 2 A háromszögről
- 3 Egybevágóság és hasonlóság
- 4 Gömbi geometria

A „bizonyítás”

Párhuzamossági axióma

Adott a síkban az e egyenes és a P pont. Ekkor pontosan egy P -n átmenő f egyenes van, ami párhuzamos e -vel.



A kérdés: „Lötyög-e” f ???

Axiómák, geometria és a valóság

- A matematikában minden **fogalmat definiálunk** és minden **állítást bizonyítunk**.
- Kivéve: **alapfogalmak** (def. nélküli fogalmak) és **axiómák** (biz. nélküli állítások).
- Pl. alapfogalmakra: *pont, egyenes, illeszkedés, közrefogás, távolság, halmaz, üres halmaz, stb.*
- Pl. axiómákra: *párhuzamossági axióma, létezik üres halmaz, létezik tetszőlegesen nagy/kicsi szám, stb.*
- A **matematika** (a geometriát beleértve) **absztrakció**.
- A **fizikai valóságban** nincs se tetszőlegesen nagy, se pedig tetszőlegesen kicsi távolság:

$$10^{-26}m \lesssim d \lesssim 10^{26}m$$

Mi a háromszög?

- Háromszög = 3 + pont + szakasz
- Szakasz = egyenes + közrefogás

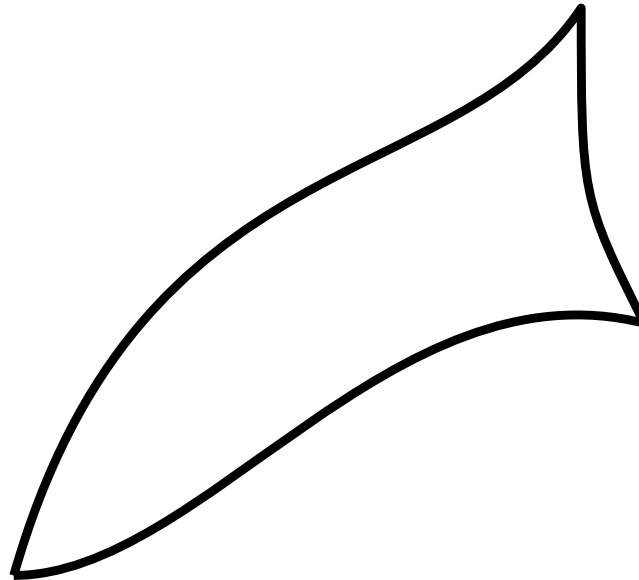
Mi a háromszög?

- Háromszög = 3 + pont + szakasz
- Szakasz = egyenes + közrefogás



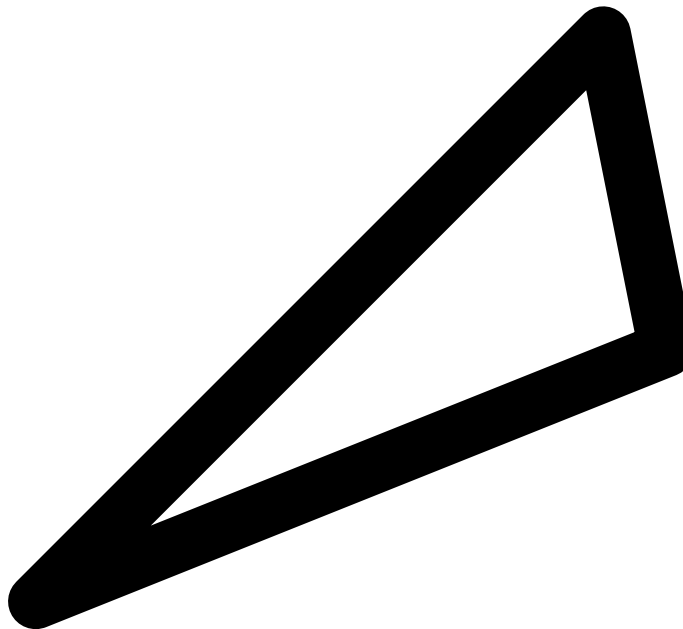
Mi a háromszög?

- Háromszög = 3 + pont + szakasz
- Szakasz = egyenes + közrefogás



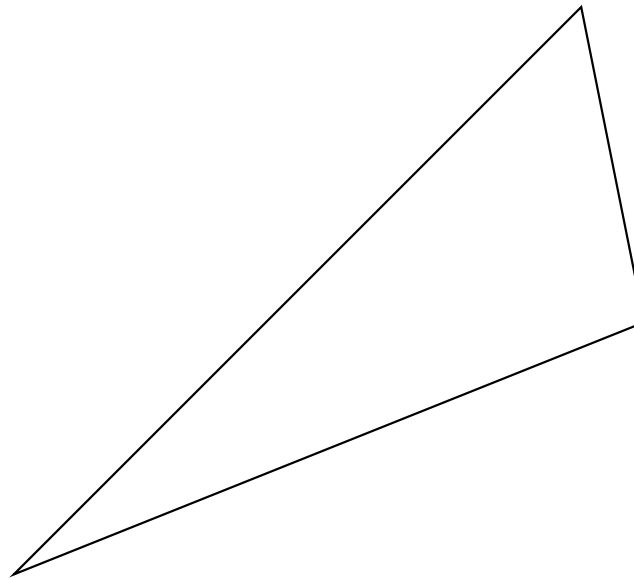
Mi a háromszög?

- Háromszög = 3 + pont + szakasz
- Szakasz = egyenes + közrefogás



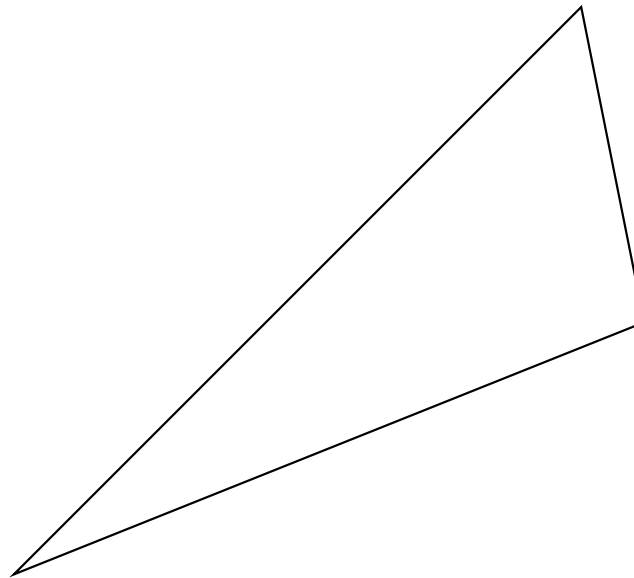
Mi a háromszög?

- Háromszög = 3 + pont + szakasz
- Szakasz = egyenes + közrefogás



Mi a háromszög?

- Háromszög = 3 + pont + szakasz
- Szakasz = egyenes + közrefogás



Mérjünk!

A szög

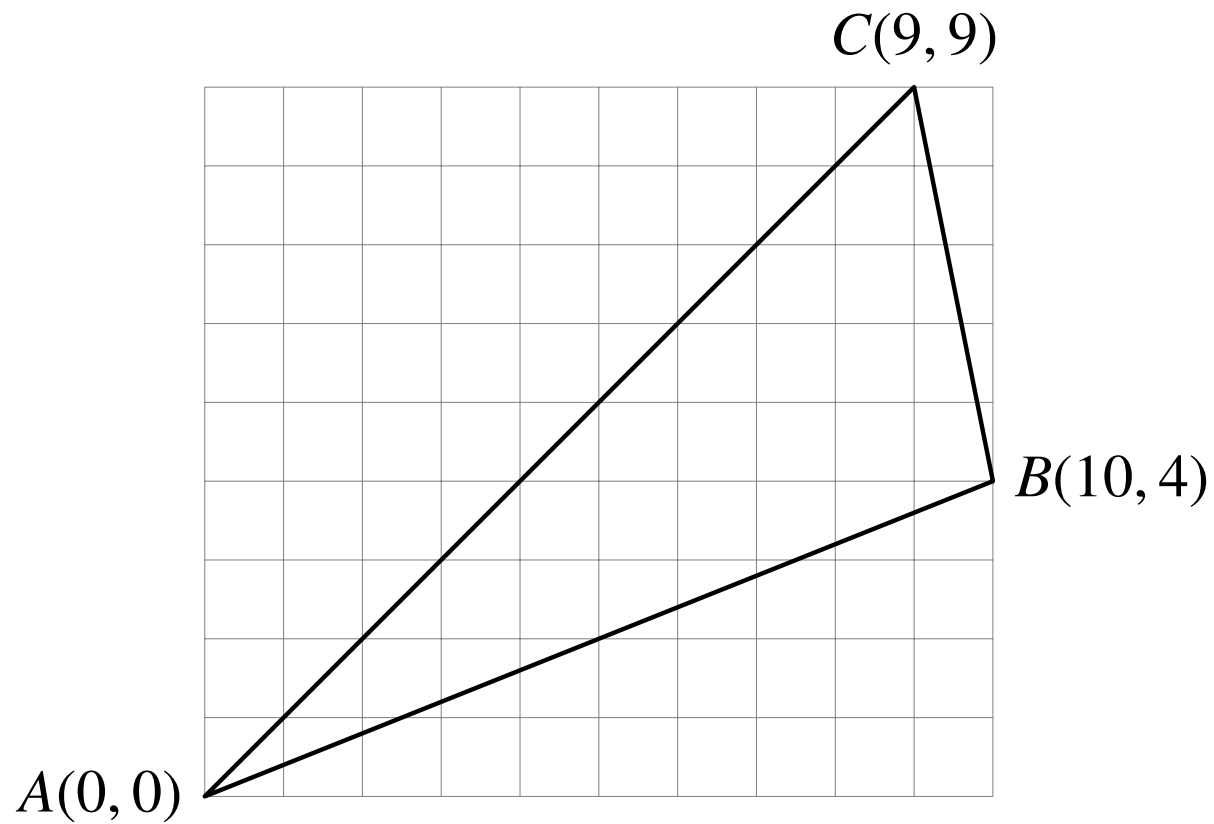
Probléma: Minek a szöge???

- Két egyenes?
- Két félegyenes?
- Irányított vagy irányítatlan?
- Szög = szögtartomány?

Műveletek:

- Egyenlőség: **egybevágóság!**
- Összeadás, szorzás, osztás
- Szögek mérése: **Nehéz, de igazából nincs rá szükségünk!**

Számoljunk!



$$\alpha = 23.1985905,$$

$$\beta = 100.4914770,$$

$$\gamma = 56.3099325.$$

Mekkora a baj?

De mi van, ha $\neq 180$???

- Nem teljesül a **párhuzamossági axióma**.
- Nem teljesül a **koszinusz-tétel**.
- Nem (jól) működnek a **vektorműveletek**.
- Nem (jól) működnek az **eltolások** és a **nyújtások**.

**És < 180 ???
 > 180 ???**

Egybevágóság és hasonlóság

Definíció

- Azt mondjuk, hogy a geometriai transzformáció **távolságtartó**, ha az É.T. minden P, Q pontjára $|PQ| = |P'Q'|$ teljesül.
- A sík (tér) ponthalmazának önmagára vett távolságtartó leképezéseit **egybevágósági transzformációknak** nevezzük.
- Két síkbeli alakzatot **egybevágónak** mondunk, ha egy egybevágósági transzformációval az egyik a másikba vihető.
- A geometriai transzformációt **hasonlósági transzformációnak** nevezzük, ha létezik egy olyan $\lambda > 0$ szám, hogy minden P, Q pontra teljesül $|P'Q'| = \lambda|PQ|$. A λ számot a hasonlóság **arányának** hívjuk.

Pl.: *tengelyes tükrözés, eltolás, forgatás, csúsztatva tükrözés, középpontos tükrözés, középpontos nyújtás.*

Előállítás tükrözéssel, szerkesztések

- Az **eltolás** két párhuzamos tengelyre vett tükrözés **egymásutánija**.
- A **forgatás** két metsző tengelyre vett tükrözés egymásutánija.
- A középpontos tükrözés 180 fokos forgatás.
- Az eltolás két középpontos tükrözés egymásutánija.
- A tengelyes tükrözés szerkesztése körzővel-vonalzóval = a *tengelyes tükrözés axiómája*.
- A tengelyes tükrözés „szerkesztése” *legközelebbi ponttal*.

Tétel (nehéz)

Két eltolás egymásutánija is eltolás.

A gömbi „mértan”

Feladatok a Lénárt-gömbön:

- A legrövidebb út és a gömbi főkörök kapcsolata
- Gömbi szakaszok és körök
- Gömbi távolságmérés, szögmérés
- Közepontos és tengelyes tükrözés szerkesztése a gömbön
- A gömbszeletek felszíne
- Gömbi „nyújtások” ???

A gömbi háromszögek területe ($R = 1$)

Lemma

Az α szögű gömbszelet területe 2α .

$$H + A = 2\alpha$$

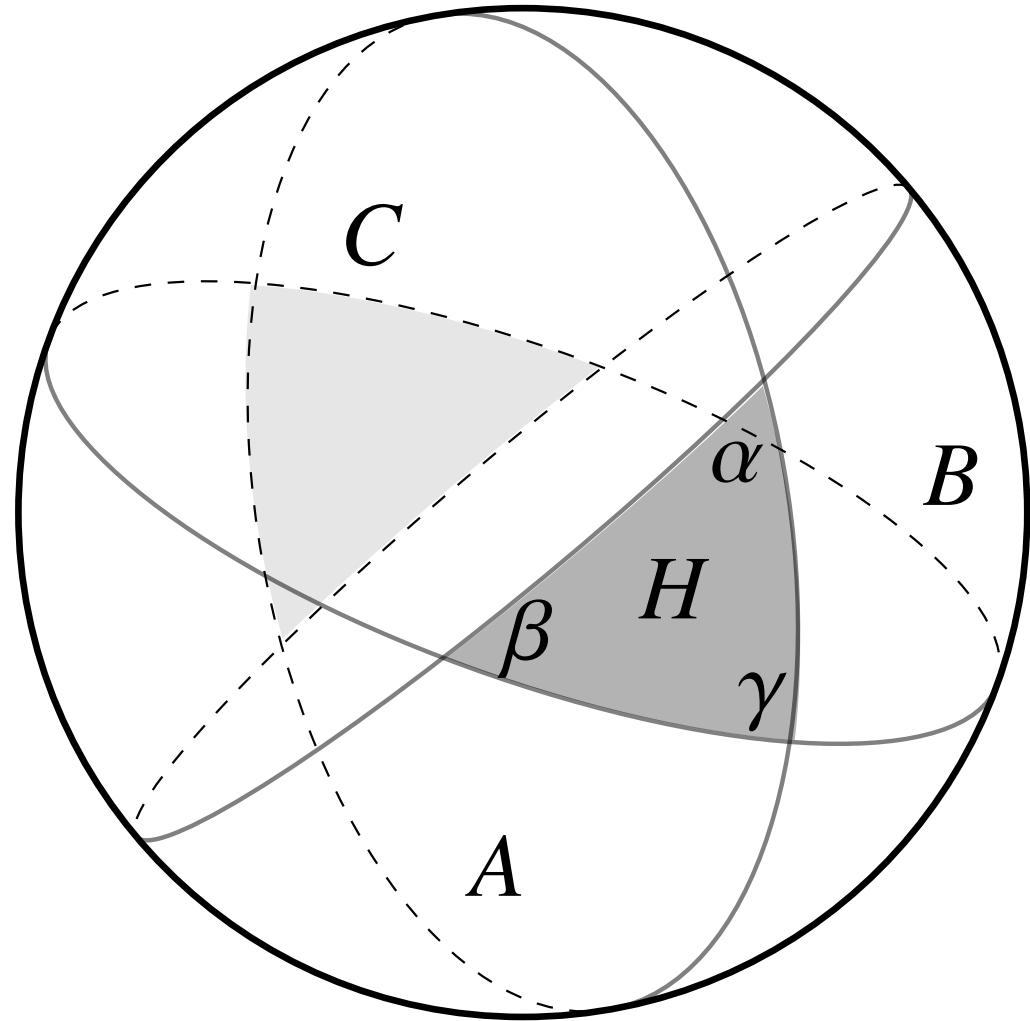
$$H + B = 2\beta$$

$$H + C = 2\gamma$$

$$2H + 2A + 2B + 2C = 4\pi$$

Állítás

Az α, β, γ szögű gömbi háromszög területe
 $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.



A „nagy” háromszögek szerepe

- Látjuk, hogy a gömbön a szögösszeg $> 180^\circ$.
- A különbség a területtel arányos.
- Minél nagyobb a (gömbi) háromszög, annál nagyobb a *defektus*.

A „valóság” és egy alkalmazása: a GPS

- A fény a „legrövidebb utat” követi.
- A gravitációs mező görbíti a teret.
- Semmi nem mozog a fénysebességnél gyorsabban.
- A rádióhullámok lényegében fénysebességgel terjednek.
- Távolság mérés = idő mérés.
- A GPS masszívan használja a koszinusz-tételt.
- A GPS pontossága kb. $s = 10m$. A Föld sugara kb. $r = 6384km$. A kívánt pontosság fokban:

$$\frac{s}{r} \cdot \frac{180}{\pi} = 8.9749 \cdot 10^{-5}.$$

- Einstein-féle addíciós képlet:

$$u \oplus v = \frac{u + v}{1 + (uv)/c^2}.$$

A „valóság” és egy alkalmazása: a GPS

- A fény a „legrövidebb utat” követi.
- A gravitációs mező görbíti a teret.
- Semmi nem mozog a fénysebességnél gyorsabban.
- A rádióhullámok lényegében fénysebességgel terjednek.
- Távolság mérés = idő mérés.
- A GPS masszívan használja a koszinusz-tételt.
- A GPS pontossága kb. $s = 10m$. A Föld sugara kb. $r = 6384km$. A kívánt pontosság fokban:

$$\frac{s}{r} \cdot \frac{180}{\pi} = 8.9749 \cdot 10^{-5}.$$

- Einstein-féle addíciós képlet:

$$u \oplus v = \frac{u + v}{1 + (uv)/c^2}.$$

A „valóság” és egy alkalmazása: a GPS

- A fény a „legrövidebb utat” követi.
- A gravitációs mező görbíti a teret.
- Semmi nem mozog a fénysebességnél gyorsabban.
- A rádióhullámok lényegében fénysebességgel terjednek.
- Távolság mérés = idő mérés.
- A GPS masszívan használja a koszinusz-tételt.
- A GPS pontossága kb. $s = 10m$. A Föld sugara kb. $r = 6384km$. A kívánt pontosság fokban:

$$\frac{s}{r} \cdot \frac{180}{\pi} = 8.9749 \cdot 10^{-5}.$$

- Einstein-féle addíciós képlet:

$$u \oplus v = \frac{u + v}{1 + (uv)/c^2}.$$

A „valóság” és egy alkalmazása: a GPS

- A fény a „legrövidebb utat” követi.
- A gravitációs mező görbíti a teret.
- Semmi nem mozog a fénysebességnél gyorsabban.
- A rádióhullámok lényegében fénysebességgel terjednek.
- Távolság mérés = idő mérés.
- A GPS masszívan használja a koszinusz-tételt.
- A GPS pontossága kb. $s = 10m$. A Föld sugara kb. $r = 6384km$. A kívánt pontosság fokban:

$$\frac{s}{r} \cdot \frac{180}{\pi} = 8.9749 \cdot 10^{-5}.$$

- Einstein-féle addíciós képlet:

$$u \oplus v = \frac{u + v}{1 + (uv)/c^2}.$$

A „valóság” és egy alkalmazása: a GPS

- A fény a „legrövidebb utat” követi.
- A gravitációs mező görbíti a teret.
- Semmi nem mozog a fénysebességnél gyorsabban.
- A rádióhullámok lényegében fénysebességgel terjednek.
- Távolság mérés = idő mérés.
- A GPS masszívan használja a koszinusz-tételt.
- A GPS pontossága kb. $s = 10m$. A Föld sugara kb. $r = 6384km$. A kívánt pontosság fokban:

$$\frac{s}{r} \cdot \frac{180}{\pi} = 8.9749 \cdot 10^{-5}.$$

- Einstein-féle addíciós képlet:

$$u \oplus v = \frac{u + v}{1 + (uv)/c^2}.$$

A „valóság” és egy alkalmazása: a GPS

- A fény a „legrövidebb utat” követi.
- A gravitációs mező görbíti a teret.
- Semmi nem mozog a fénysebességnél gyorsabban.
- A rádióhullámok lényegében fénysebességgel terjednek.
- Távolság mérés = idő mérés.
- A GPS masszívan használja a koszinusz-tételt.
- A GPS pontossága kb. $s = 10m$. A Föld sugara kb. $r = 6384km$. A kívánt pontosság fokban:

$$\frac{s}{r} \cdot \frac{180}{\pi} = 8.9749 \cdot 10^{-5}.$$

- Einstein-féle addíciós képlet:

$$u \oplus v = \frac{u + v}{1 + (uv)/c^2}.$$

A „valóság” és egy alkalmazása: a GPS

- A fény a „legrövidebb utat” követi.
- A gravitációs mező görbíti a teret.
- Semmi nem mozog a fénysebességnél gyorsabban.
- A rádióhullámok lényegében fénysebességgel terjednek.
- Távolság mérés = idő mérés.
- A GPS masszívan használja a koszinusz-tételt.
- A GPS pontossága kb. $s = 10m$. A Föld sugara kb. $r = 6384km$. A kívánt pontosság fokban:

$$\frac{s}{r} \cdot \frac{180}{\pi} = 8.9749 \cdot 10^{-5}.$$

- Einstein-féle addíciós képlet:

$$u \oplus v = \frac{u + v}{1 + (uv)/c^2}.$$

A „valóság” és egy alkalmazása: a GPS

- A fény a „legrövidebb utat” követi.
- A gravitációs mező görbíti a teret.
- Semmi nem mozog a fénysebességnél gyorsabban.
- A rádióhullámok lényegében fénysebességgel terjednek.
- Távolság mérés = idő mérés.
- A GPS masszívan használja a koszinusz-tételt.
- A GPS pontossága kb. $s = 10m$. A Föld sugara kb. $r = 6384km$. A kívánt pontosság fokban:

$$\frac{s}{r} \cdot \frac{180}{\pi} = 8.9749 \cdot 10^{-5}.$$

- Einstein-féle addíciós képlet:

$$u \oplus v = \frac{u + v}{1 + (uv)/c^2}.$$

Konklúzió

DOUGLAS ADAMS: GALAXIS ÚTIKALAUZ STOPPOSOKNAK

A **GALAXIS Útikalauz stopposoknak** a következő értelemben használja a "végtelen" szót:

***Végtelen:** Nagyobb, mint a valaha létezett legnagyobb dolog, továbbá nagyobb sok egyéb dolagnál.*

Nevezetesen, sokkal nagyobb, mint az elképesztően óriási, a baromi nagy és a "Hű, ezt nézd meg, mekkora!".

A végtelen olyan nagy, hogy hozzá képest a nagyság maga is eltörpül.

Olyasmiről van szó, amit leginkább a gigantikusszor kolosszálisszor lélegzetelállítóan hatalmas képzetével tudnánk érzékeltetni.

Konklúzió

DOUGLAS ADAMS: GALAXIS ÚTIKALAUZ STOPPOSOKNAK

A **GALAXIS Útikalauz stopposoknak** a következő értelemben használja a "végtelen" szót:

***Végtelen:** Nagyobb, mint a valaha létezett legnagyobb dolog, továbbá nagyobb sok egyéb dolagnál.*

Nevezetesen, sokkal nagyobb, mint az elképesztően óriási, a baromi nagy és a "Hű, ezt nézd meg, mekkora!".

A végtelen olyan nagy, hogy hozzá képest a nagyság maga is eltörpül.

Olyasmiről van szó, amit leginkább a gigantikusszor kolosszálisszor lélegzetelállítóan hatalmas képzetével tudnánk érzékeltetni.

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!