

A határozott integrál alkalmazásai (6. hét)

Matematika informatikusoknak 2

Nagy Gábor Péter

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

2025/2026-os tanév II. féléve

Tagolás

- 1 Területszámítás és síkgörbék hossza
- 2 Numerikus integrálás
- 3 Jelkiegyenlítés és mozgás
- 4 Improprius integrálok
- 5 Valószínűségi alkalmazások

Tagolás

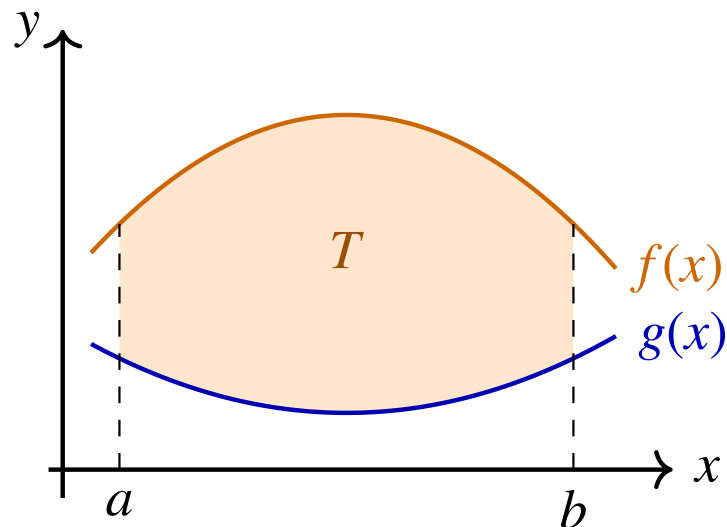
- 1 Területszámítás és síkgörbék hossza
- 2 Numerikus integrálás
- 3 Jelkiegyenlítés és mozgás
- 4 Improprius integrálok
- 5 Valószínűségi alkalmazások

Görbék által közbezárt terület

Kérdés: Mekkora a terület, amelyet f és g görbéje közbezár az $[a, b]$ intervallumon, ha $f(x) \geq g(x)$?

Ötlet: Az f alatti terület mínusz a g alatti terület:

$$T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$



Képlet

Ha $f(x) \geq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ -re:

$$T = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

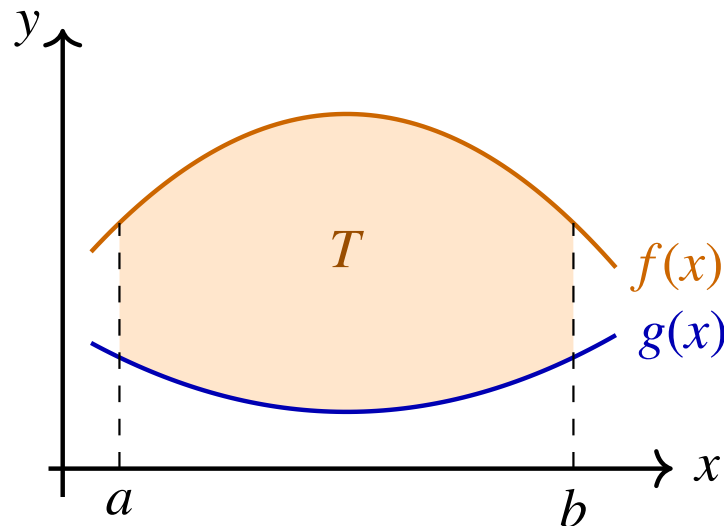
Megjegyzés. Az a és b határokat általában a **metzéspontokból** kapjuk: $f(x) = g(x)$.

Görbék által közbezárt terület

Kérdés: Mekkora a terület, amelyet f és g görbéje közbezár az $[a, b]$ intervallumon, ha $f(x) \geq g(x)$?

Ötlet: Az f alatti terület mínusz a g alatti terület:

$$T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$



Képlet

Ha $f(x) \geq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ -re:

$$T = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

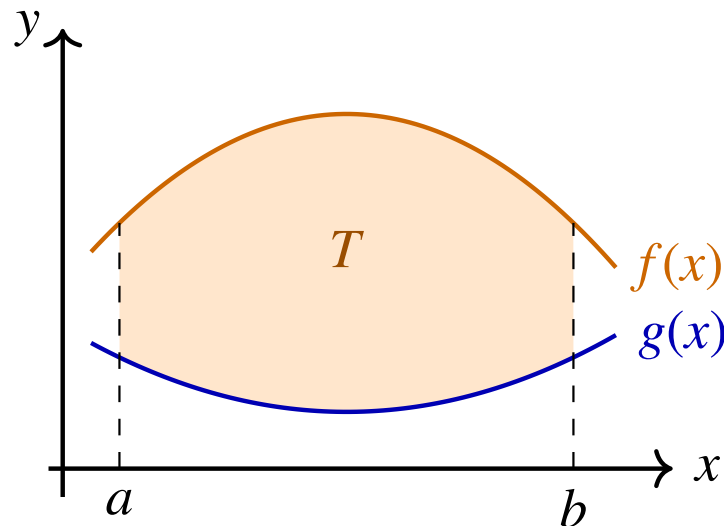
Megjegyzés. Az a és b határokat általában a **metzéspontokból** kapjuk: $f(x) = g(x)$.

Görbék által közbezárt terület

Kérdés: Mekkora a terület, amelyet f és g görbéje közbezár az $[a, b]$ intervallumon, ha $f(x) \geq g(x)$?

Ötlet: Az f alatti terület mínusz a g alatti terület:

$$T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$



Képlet

Ha $f(x) \geq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ -re:

$$T = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

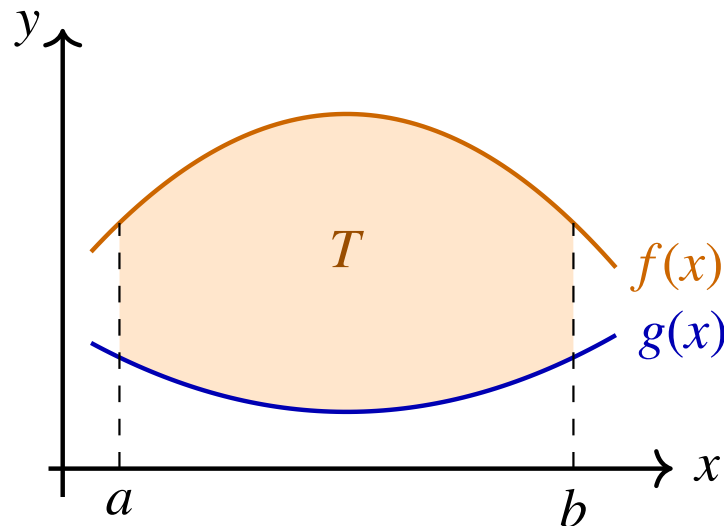
Megjegyzés. Az a és b határokat általában a **metzéspontokból** kapjuk: $f(x) = g(x)$.

Görbék által közbezárt terület

Kérdés: Mekkora a terület, amelyet f és g görbéje közbezár az $[a, b]$ intervallumon, ha $f(x) \geq g(x)$?

Ötlet: Az f alatti terület mínusz a g alatti terület:

$$T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$



Képlet

Ha $f(x) \geq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ -re:

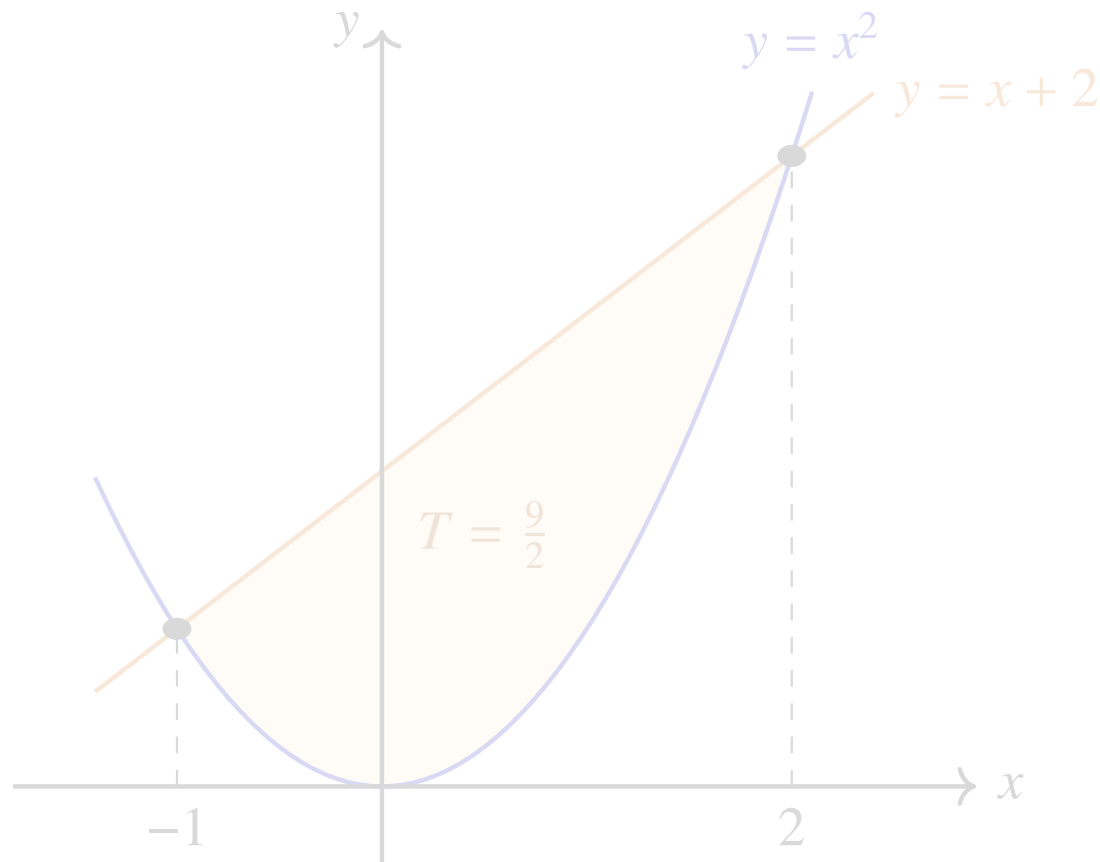
$$T = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Megjegyzés. Az a és b határokat általában a **metszéspontokból** kapjuk: $f(x) = g(x)$.

Kidolgozott példa: parabola és egyenes (ábra)

Feladat

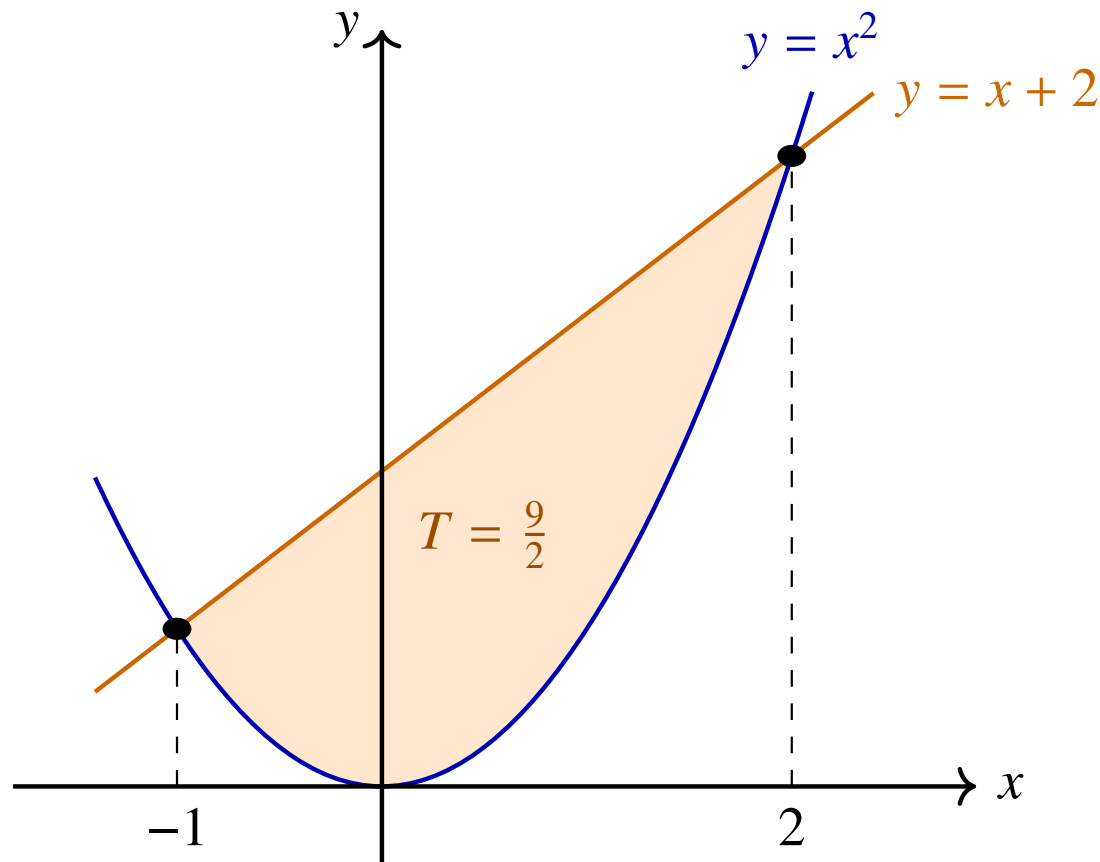
Határozzuk meg az $f(x) = x + 2$ és $g(x) = x^2$ görbék által közbezárt terület nagyságát!



Kidolgozott példa: parabola és egyenes (ábra)

Feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x + 2$ és $g(x) = x^2$ görbék által közbezárt terület nagyságát!



Kidolgozott példa: parabola és egyenes (számítás)

Feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x + 2$ és $g(x) = x^2$ görbék által közbezárt terület nagyságát!

1. lépés – metszéspontok:

$$x^2 = x + 2 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x - 2)(x + 1) = 0 \implies x_1 = -1, x_2 = 2.$$

2. lépés – melyik görbe van felül?

$x = 0$: $f(0) = 2 > g(0) = 0$, tehát $f(x) \geq g(x)$ az $[-1, 2]$ -n. ✓

3. lépés – integrálás:

$$T = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2}.$$

Kidolgozott példa: parabola és egyenes (számítás)

Feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x + 2$ és $g(x) = x^2$ görbék által közbezárt terület nagyságát!

1. lépés – metszéspontok:

$$x^2 = x + 2 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x - 2)(x + 1) = 0 \implies x_1 = -1, x_2 = 2.$$

2. lépés – melyik görbe van felül?

$x = 0$: $f(0) = 2 > g(0) = 0$, tehát $f(x) \geq g(x)$ az $[-1, 2]$ -n. ✓

3. lépés – integrálás:

$$T = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2}.$$

Kidolgozott példa: parabola és egyenes (számítás)

Feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x + 2$ és $g(x) = x^2$ görbék által közbezárt terület nagyságát!

1. lépés – metszéspontok:

$$x^2 = x + 2 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x - 2)(x + 1) = 0 \implies x_1 = -1, x_2 = 2.$$

2. lépés – melyik görbe van felül?

$x = 0$: $f(0) = 2 > g(0) = 0$, tehát $f(x) \geq g(x)$ az $[-1, 2]$ -n. ✓

3. lépés – integrálás:

$$T = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2}.$$

Kidolgozott példa: parabola és egyenes (számítás)

Feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x + 2$ és $g(x) = x^2$ görbék által közbezárt terület nagyságát!

1. lépés – metszéspontok:

$$x^2 = x + 2 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies (x - 2)(x + 1) = 0 \implies x_1 = -1, x_2 = 2.$$

2. lépés – melyik görbe van felül?

$x = 0$: $f(0) = 2 > g(0) = 0$, tehát $f(x) \geq g(x)$ az $[-1, 2]$ -n. ✓

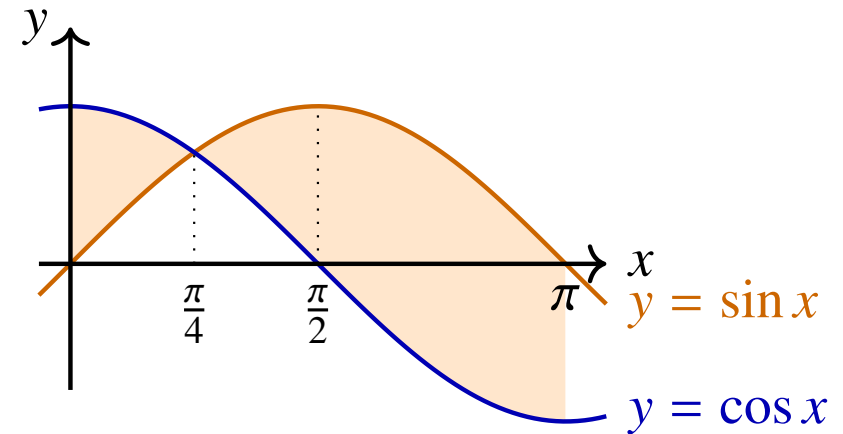
3. lépés – integrálás:

$$T = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2}.$$

Kidolgozott példa: $\sin x$ és $\cos x$ által közbezárt terület

Feladat

Határozzuk meg a $\sin x$ és $\cos x$ görbék által közbezárt terület nagyságát a $[0, \pi]$ intervallumon!



Metszéspont: $\sin x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \pi/4$.

Melyik görbe van felül?

- $x \in [0, \pi/4]$: $\cos x \geq \sin x$ ✓
- $x \in [\pi/4, \pi]$: $\sin x \geq \cos x$ ✓

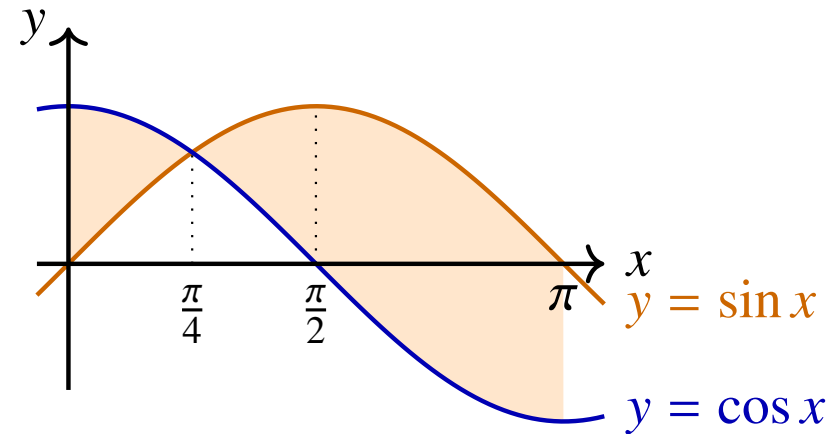
Integrálás:

$$T = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx.$$

Kidolgozott példa: $\sin x$ és $\cos x$ által közbezárt terület

Feladat

Határozzuk meg a $\sin x$ és $\cos x$ görbék által közbezárt terület nagyságát a $[0, \pi]$ intervallumon!



Metszéspont: $\sin x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \pi/4$.

Melyik görbe van felül?

- $x \in [0, \pi/4]$: $\cos x \geq \sin x$ ✓
- $x \in [\pi/4, \pi]$: $\sin x \geq \cos x$ ✓

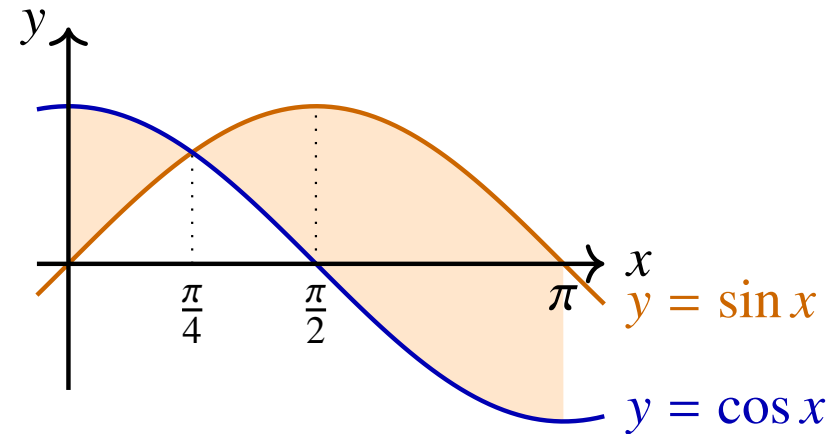
Integrálás:

$$T = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx.$$

Kidolgozott példa: $\sin x$ és $\cos x$ által közbezárt terület

Feladat

Határozzuk meg a $\sin x$ és $\cos x$ görbék által közbezárt terület nagyságát a $[0, \pi]$ intervallumon!



Metszéspont: $\sin x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \pi/4$.

Melyik görbe van felül?

- $x \in [0, \pi/4]: \cos x \geq \sin x \checkmark$
- $x \in [\pi/4, \pi]: \sin x \geq \cos x \checkmark$

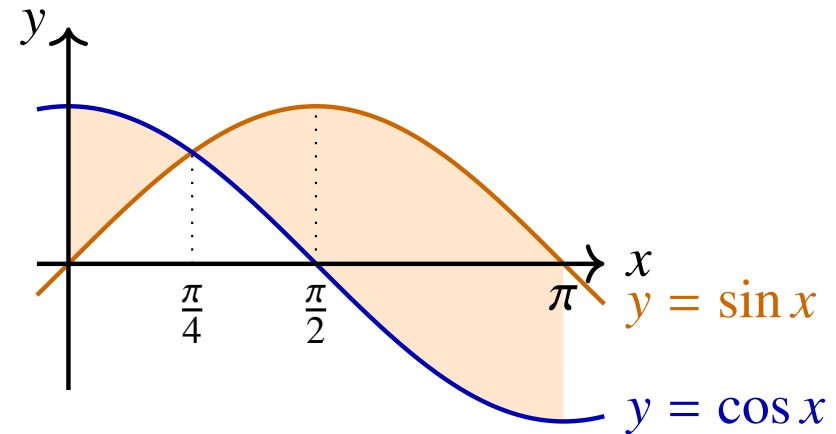
Integrálás:

$$T = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx.$$

Kidolgozott példa: $\sin x$ és $\cos x$ által közbezárt terület

Feladat

Határozzuk meg a $\sin x$ és $\cos x$ görbék által közbezárt terület nagyságát a $[0, \pi]$ intervallumon!



Metszéspont: $\sin x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \pi/4$.

Melyik görbe van felül?

- $x \in [0, \pi/4]$: $\cos x \geq \sin x$ ✓
- $x \in [\pi/4, \pi]$: $\sin x \geq \cos x$ ✓

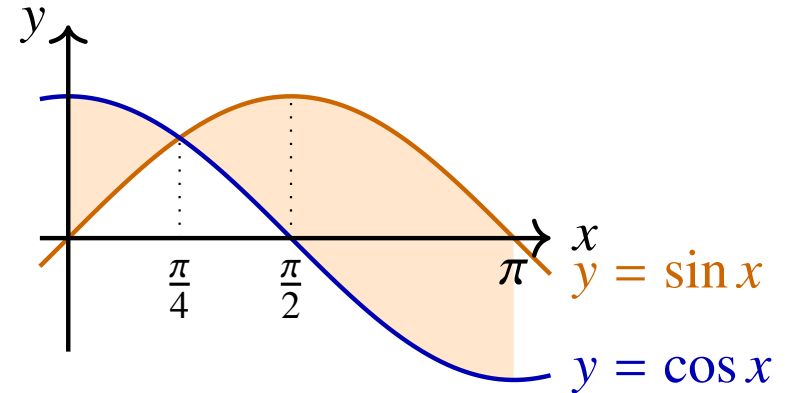
Integrálás:

$$T = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx.$$

Kidolgozott példa: $\sin x$ és $\cos x$ által közbezárt terület

Feladat

Határozzuk meg a $\sin x$ és $\cos x$ görbék által közbezárt terület nagyságát a $[0, \pi]$ intervallumon!



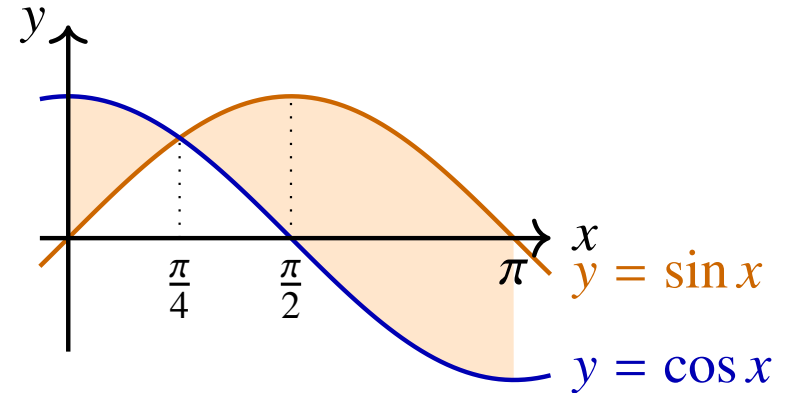
Integrálás:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\pi/4} + \left[-\cos x - \sin x \right]_{\pi/4}^{\pi} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 \right) + \left(1 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Kidolgozott példa: $\sin x$ és $\cos x$ által közbezárt terület

Feladat

Határozzuk meg a $\sin x$ és $\cos x$ görbék által közbezárt terület nagyságát a $[0, \pi]$ intervallumon!



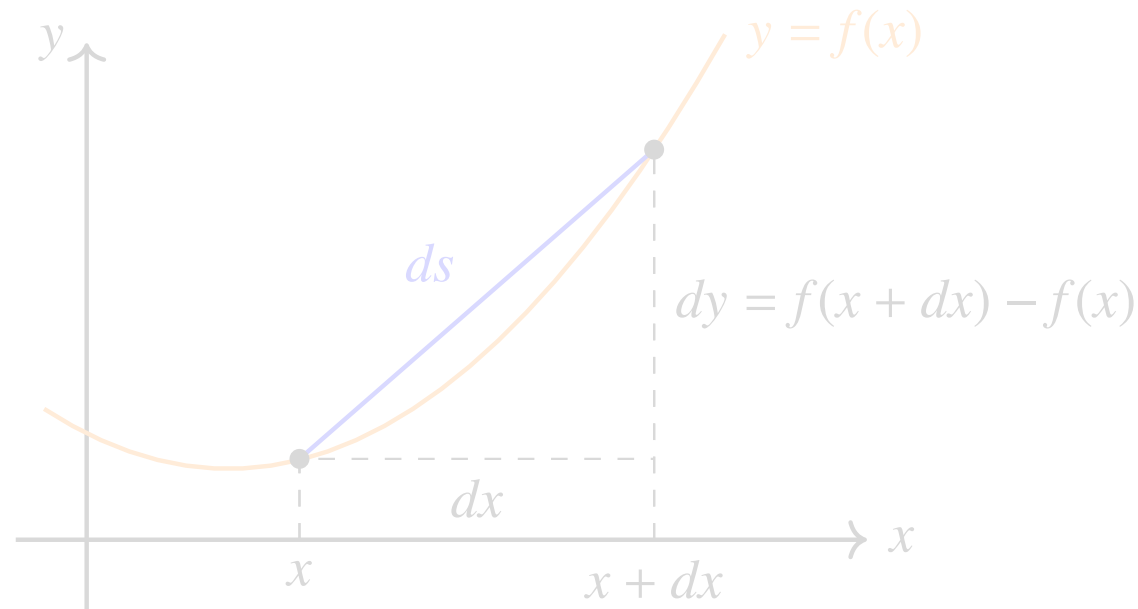
Integrálás:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\pi/4} + \left[-\cos x - \sin x \right]_{\pi/4}^{\pi} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 \right) + \left(1 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Síkgörbék hossza: szemléltetés

Kérdés: Hogyan mérjük meg egy $y = f(x)$ görbe ívhosszát az $[a, b]$ intervallumon?

Ötlet: Közelítsük a görbét **kis húrdarabokkal**, majd vegyük a határértéket.



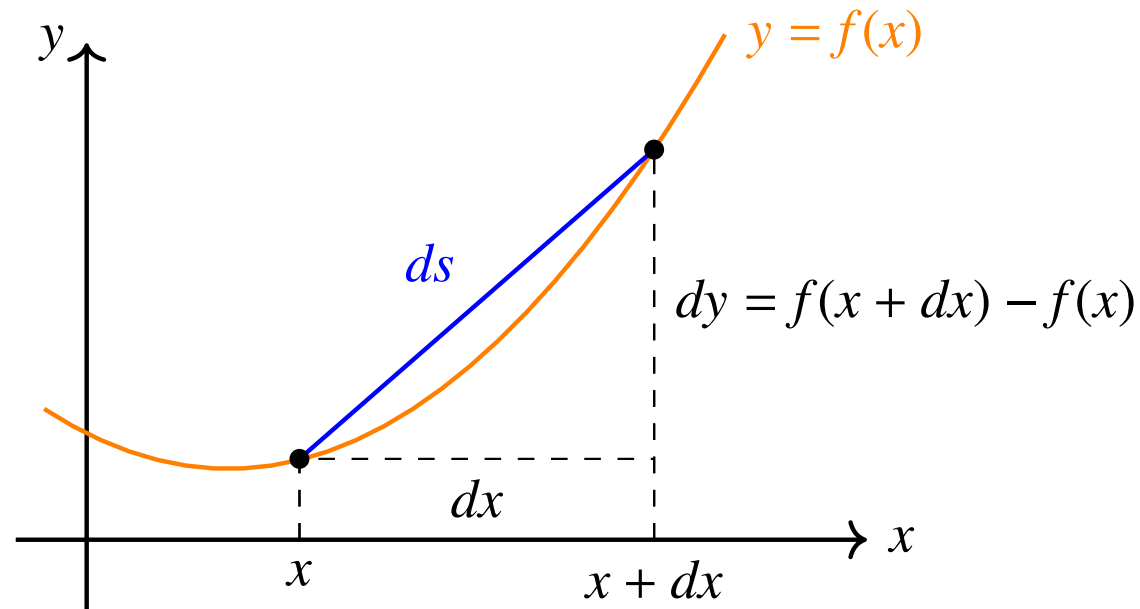
Észrevétel: Egy kis $[x, x + dx]$ szakaszon a húr hossza:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \approx \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Síkgörbék hossza: szemléltetés

Kérdés: Hogyan mérjük meg egy $y = f(x)$ görbe ívhosszát az $[a, b]$ intervallumon?

Ötlet: Közelítsük a görbét **kis húrdarabokkal**, majd vegyünk a határértéket.



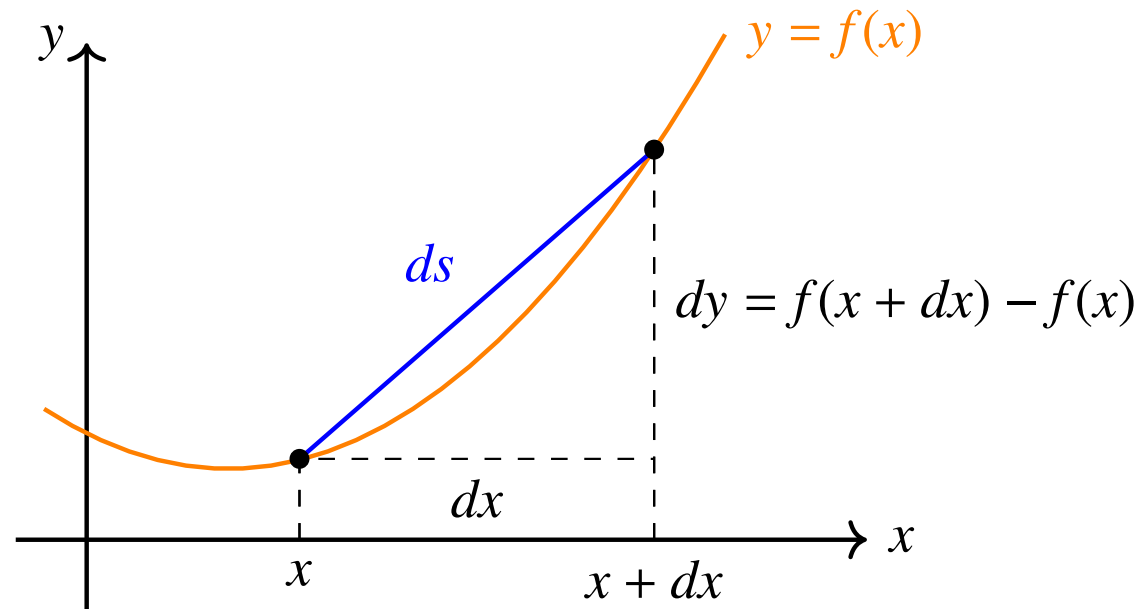
Észrevétel: Egy kis $[x, x + dx]$ szakaszon a húr hossza:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \approx \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Síkgörbék hossza: szemléltetés

Kérdés: Hogyan mérjük meg egy $y = f(x)$ görbe ívhosszát az $[a, b]$ intervallumon?

Ötlet: Közelítsük a görbét **kis húrdarabokkal**, majd vegyünk a határértéket.



Észrevétel: Egy kis $[x, x + dx]$ szakaszon a húr hossza:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \approx \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Síkgörbék hossza: képlet és példa

Ívhossz-képlet

Ha f differenciálható és f' folytonos $[a, b]$ -n:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Példa: $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ ívhossza $[0, 3]$ -on

$f'(x) = x^{1/2}$, tehát $1 + f'(x)^2 = 1 + x$. Helyettesítés: $u = 1 + x$:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + x} dx = \left[\frac{2}{3}(1 + x)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{14}{3}.$$

Megjegyzés. Az ívhossz-integrál a legtöbb elemi függvényre **nem fejezhető ki zárt alakban** (pl. $f(x) = \sin x$ esetén *elliptikus integrál* adódik) – ez a numerikus integrálás egyik legfontosabb alkalmazási területe.

Síkgörbék hossza: képlet és példa

Ívhossz-képlet

Ha f differenciálható és f' folytonos $[a, b]$ -n:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Példa: $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ ívhossza $[0, 3]$ -on

$f'(x) = x^{1/2}$, tehát $1 + f'(x)^2 = 1 + x$. Helyettesítés: $u = 1 + x$:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + x} dx = \left[\frac{2}{3}(1 + x)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{14}{3}.$$

Megjegyzés. Az ívhossz-integrál a legtöbb elemi függvényre **nem fejezhető ki zárt alakban** (pl. $f(x) = \sin x$ esetén *elliptikus integrál* adódik) – ez a numerikus integrálás egyik legfontosabb alkalmazási területe.

Síkgörbék hossza: képlet és példa

Ívhossz-képlet

Ha f differenciálható és f' folytonos $[a, b]$ -n:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Példa: $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ ívhossza $[0, 3]$ -on

$f'(x) = x^{1/2}$, tehát $1 + f'(x)^2 = 1 + x$. Helyettesítés: $u = 1 + x$:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+x} dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$$

Megjegyzés. Az ívhossz-integrál a legtöbb elemi függvényre **nem fejezhető ki zárt alakban** (pl. $f(x) = \sin x$ esetén *elliptikus integrál* adódik) – ez a numerikus integrálás egyik legfontosabb alkalmazási területe.

Tagolás

- 1 Területszámítás és síkgörbék hossza
- 2 Numerikus integrálás**
- 3 Jelkiegyenlítés és mozgás
- 4 Improprius integrálok
- 5 Valószínűségi alkalmazások

Motiváció: mikor nem tudunk analitikusan integrálni?

A Newton–Leibniz-tétel csak akkor alkalmazható, ha az integrandusnak ismerjük a **primitív függvényét**. Ez sok esetben nem teljesül:

Integrál	Miért nem elemi?
$\int e^{-x^2} dx$	normális eloszlás – nincs elemi primitív
$\int \frac{\sin x}{x} dx$	sinc függvény – jelfeldolgozás
$\int \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$	elliptikus integrál – ívhossz
$\int_a^b f(x) dx$	f csak mérési adatokból ismert

Motiváció: mikor nem tudunk analitikusan integrálni?

A Newton–Leibniz-tétel csak akkor alkalmazható, ha az integrandusnak ismerjük a **primitív függvényét**. Ez sok esetben nem teljesül:

Integrál	Miért nem elemi?
$\int e^{-x^2} dx$	normális eloszlás – nincs elemi primitív
$\int \frac{\sin x}{x} dx$	sinc függvény – jelfeldolgozás
$\int \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$	elliptikus integrál – ívhossz
$\int_a^b f(x) dx$	f csak mérési adatokból ismert

Numerikus integrálás

Numerikus integrálás

Adott $[a, b]$ és f (vagy mérési adatok): közelítsük $\int_a^b f(x) dx$ értékét véges sok f -kiértékeléssel, minél kisebb hibával.

- **Gépi tanulás és statisztika** – valószínűségi modellek konstansainak kiszámítása, Bayes-i következtetés, becslés Monte Carlo módszerrel.
- **Számítógépes grafika** – fényvisszaverődési modellek (rendering equation), globális megvilágítás számítása (path tracing).
- **Jelfeldolgozás és kommunikáció** – Fourier-transzformált numerikus közelítése (FFT), szűrők tervezése, jel energiájának kiszámítása.
- **Fizikai szimulációk** – mozgásegyenletek integrálása időben (pl. részecskeszimulációk, robotika, játékmotorok), végeselem-módszer.
- **Kriptográfia és számításelmélet** – nagy prímek és speciális függvények numerikus kiértékelése, véletlenszám-generátorok statisztikai tesztelése.

Numerikus integrálás

Numerikus integrálás

Adott $[a, b]$ és f (vagy mérési adatok): közelítsük $\int_a^b f(x) dx$ értékét véges sok f -kiértékeléssel, minél kisebb hibával.

- **Gépi tanulás és statisztika** – valószínűségi modellek konstansainak kiszámítása, Bayes-i következtetés, becslés Monte Carlo módszerrel.
- Számítógépes grafika – fényvisszaverődési modellek (rendering equation), globális megvilágítás számítása (path tracing).
- Jelfeldolgozás és kommunikáció – Fourier-transzformált numerikus közelítése (FFT), szűrők tervezése, jel energiájának kiszámítása.
- Fizikai szimulációk – mozgásegyenletek integrálása időben (pl. részecskeszimulációk, robotika, játékmotorok), végeselem-módszer.
- Kriptográfia és számításelmélet – nagy prímek és speciális függvények numerikus kiértékelése, véletlenszám-generátorok statisztikai tesztelése.

Numerikus integrálás

Numerikus integrálás

Adott $[a, b]$ és f (vagy mérési adatok): közelítsük $\int_a^b f(x) dx$ értékét véges sok f -kiértékeléssel, minél kisebb hibával.

- **Gépi tanulás és statisztika** – valószínűségi modellek konstansainak kiszámítása, Bayes-i következtetés, becslés Monte Carlo módszerrel.
- **Számítógépes grafika** – fényvisszaverődési modellek (rendering equation), globális megvilágítás számítása (path tracing).
- **Jelfeldolgozás és kommunikáció** – Fourier-transzformált numerikus közelítése (FFT), szűrők tervezése, jel energiájának kiszámítása.
- **Fizikai szimulációk** – mozgásegyenletek integrálása időben (pl. részecskeszimulációk, robotika, játékmotorok), végeselem-módszer.
- **Kriptográfia és számításelmélet** – nagy prímek és speciális függvények numerikus kiértékelése, véletlenszám-generátorok statisztikai tesztelése.

Numerikus integrálás

Numerikus integrálás

Adott $[a, b]$ és f (vagy mérési adatok): közelítsük $\int_a^b f(x) dx$ értékét véges sok f -kiértékeléssel, minél kisebb hibával.

- **Gépi tanulás és statisztika** – valószínűségi modellek konstansainak kiszámítása, Bayes-i következtetés, becslés Monte Carlo módszerrel.
- **Számítógépes grafika** – fényvisszaverődési modellek (rendering equation), globális megvilágítás számítása (path tracing).
- **Jelfeldolgozás és kommunikáció** – Fourier-transzformált numerikus közelítése (FFT), szűrők tervezése, jel energiájának kiszámítása.
- **Fizikai szimulációk** – mozgásegyenletek integrálása időben (pl. részecskeszimulációk, robotika, játékmotorok), végeselem-módszer.
- **Kriptográfia és számításelmélet** – nagy prímek és speciális függvények numerikus kiértékelése, véletlenszám-generátorok statisztikai tesztelése.

Numerikus integrálás

Numerikus integrálás

Adott $[a, b]$ és f (vagy mérési adatok): közelítsük $\int_a^b f(x) dx$ értékét véges sok f -kiértékeléssel, minél kisebb hibával.

- **Gépi tanulás és statisztika** – valószínűségi modellek konstansainak kiszámítása, Bayes-i következtetés, becslés Monte Carlo módszerrel.
- **Számítógépes grafika** – fényvisszaverődési modellek (rendering equation), globális megvilágítás számítása (path tracing).
- **Jelfeldolgozás és kommunikáció** – Fourier-transzformált numerikus közelítése (FFT), szűrők tervezése, jel energiájának kiszámítása.
- **Fizikai szimulációk** – mozgásegyenletek integrálása időben (pl. részecskeszimulációk, robotika, játékmotorok), végeselem-módszer.
- **Kriptográfia és számításelmélet** – nagy prímek és speciális függvények numerikus kiértékelése, véletlenszám-generátorok statisztikai tesztelése.

Numerikus integrálás

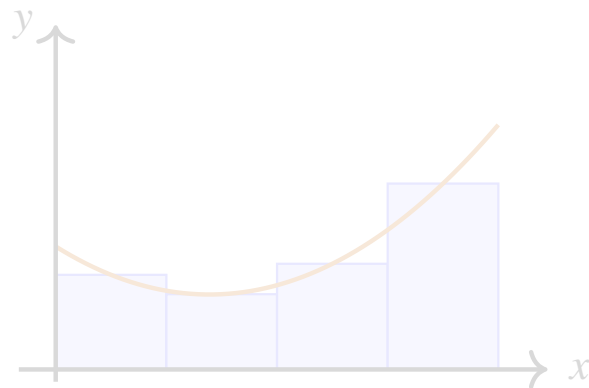
Numerikus integrálás

Adott $[a, b]$ és f (vagy mérési adatok): közelítsük $\int_a^b f(x) dx$ értékét véges sok f -kiértékeléssel, minél kisebb hibával.

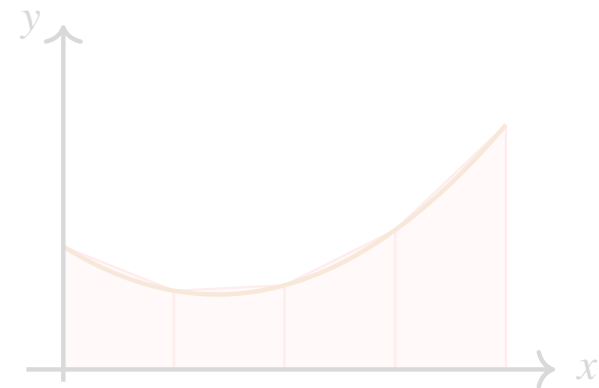
- **Gépi tanulás és statisztika** – valószínűségi modellek konstansainak kiszámítása, Bayes-i következtetés, becslés Monte Carlo módszerrel.
- **Számítógépes grafika** – fényvisszaverődési modellek (rendering equation), globális megvilágítás számítása (path tracing).
- **Jelfeldolgozás és kommunikáció** – Fourier-transzformált numerikus közelítése (FFT), szűrők tervezése, jel energiájának kiszámítása.
- **Fizikai szimulációk** – mozgásegyenletek integrálása időben (pl. részecskeszimulációk, robotika, játékmotorok), végeselem-módszer.
- **Kriptográfia és számításelmélet** – nagy prímek és speciális függvények numerikus kiértékelése, véletlenszám-generátorok statisztikai tesztelése.

Téglalap- és trapézszabály

Osszuk fel $[a, b]$ -t n egyenlő részre: $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$.



középponti (M_n)



trapézszabály (T_n)

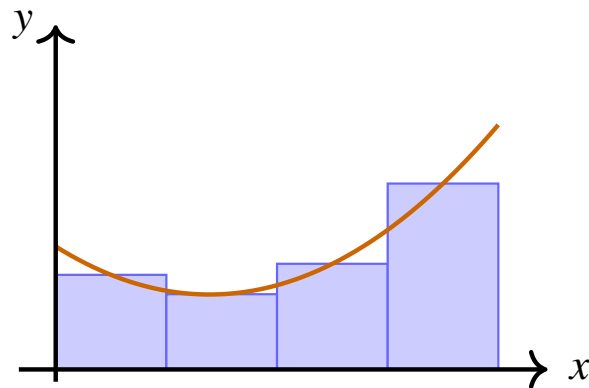
Képletek

$$M_n = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + \frac{h}{2}\right), \quad T_n = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right).$$

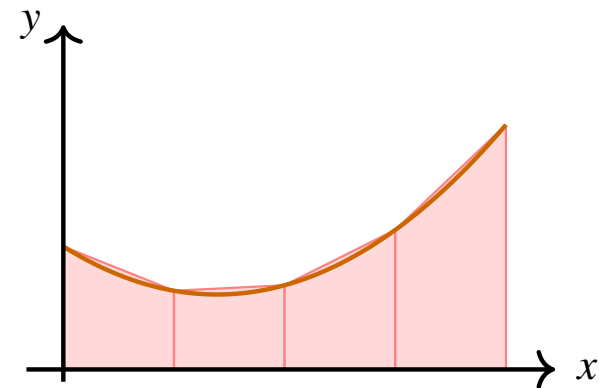
Megjegyzés. T_n felírható a bal és jobb oldali Riemann-összegek átlagaként.

Téglalap- és trapézszabály

Osszuk fel $[a, b]$ -t n egyenlő részre: $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$.



középponti (M_n)



trapézszabály (T_n)

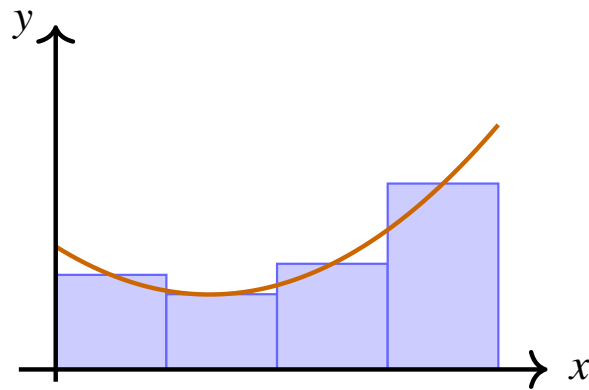
Képletek

$$M_n = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + \frac{h}{2}\right), \quad T_n = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right).$$

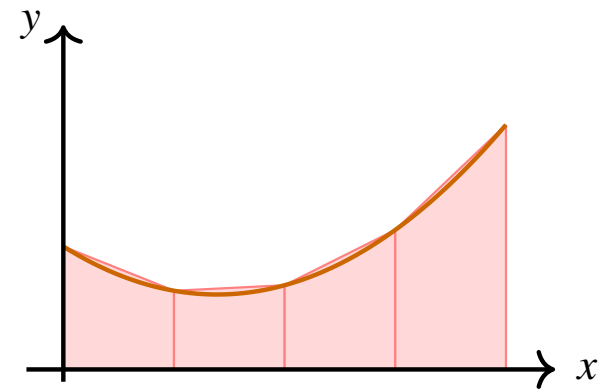
Megjegyzés. T_n felírható a bal és jobb oldali Riemann-összegek átlagaként.

Téglalap- és trapézszabály

Osszuk fel $[a, b]$ -t n egyenlő részre: $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$.



középponti (M_n)



trapézszabály (T_n)

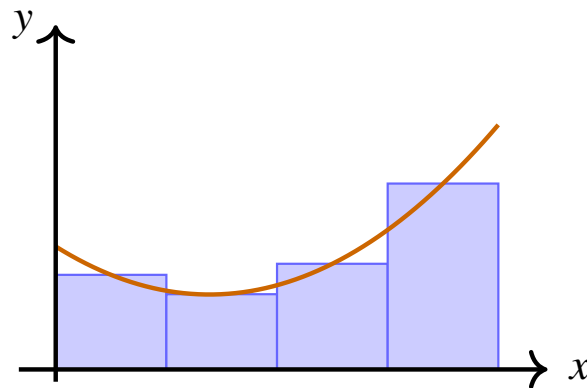
Képletek

$$M_n = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + \frac{h}{2}\right), \quad T_n = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right).$$

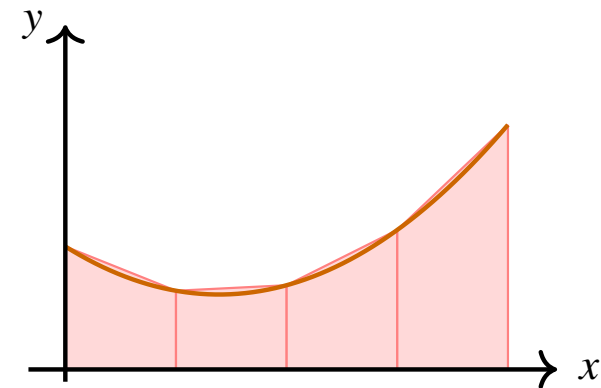
Megjegyzés. T_n felírható a bal és jobb oldali Riemann-összegek átlagaként.

Téglalap- és trapézszabály

Osszuk fel $[a, b]$ -t n egyenlő részre: $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$.



középponti (M_n)



trapézszabály (T_n)

Képletek

$$M_n = h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + \frac{h}{2}\right), \quad T_n = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right).$$

Megjegyzés. T_n felírható a bal és jobb oldali Riemann-összegek átlagaként.

Simpson-szabály

Ötlet: Ahelyett, hogy egyenessel közelítjük f -et minden kis szakaszon (trapézszabály), közelítsük **másodfokú polinommal** (parabola) minden két szomszédos részintervallumon.

Egy $[x_0, x_2]$ párra (ahol $x_1 = (x_0 + x_2)/2$, $h = x_1 - x_0$) a parabola alatti terület:

$$\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)).$$

Simpson-szabály (n páros)

$$S_n = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

A súlyok mintázata: 1, 4, 2, 4, 2, ..., 2, 4, 1.

Simpson-szabály

Ötlet: Ahelyett, hogy egyenessel közelítjük f -et minden kis szakaszon (trapézszabály), közelítsük **másodfokú polinommal** (parabola) minden két szomszédos részintervallumon.

Egy $[x_0, x_2]$ párra (ahol $x_1 = (x_0 + x_2)/2$, $h = x_1 - x_0$) a parabola alatti terület:

$$\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)).$$

Simpson-szabály (n páros)

$$S_n = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

A súlyok mintázata: 1, 4, 2, 4, 2, ..., 2, 4, 1.

Simpson-szabály

Ötlet: Ahelyett, hogy egyenessel közelítjük f -et minden kis szakaszon (trapézszabály), közelítsük **másodfokú polinommal** (parabola) minden két szomszédos részintervallumon.

Egy $[x_0, x_2]$ párra (ahol $x_1 = (x_0 + x_2)/2$, $h = x_1 - x_0$) a parabola alatti terület:

$$\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)).$$

Simpson-szabály (n páros)

$$S_n = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

A súlyok mintázata: 1, 4, 2, 4, 2, ..., 2, 4, 1.

Hibabecslés $\int_a^b f(x) dx$ közelítésére

Tétel: Hibabecslés

Legyen $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ és $M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Módszer	Hibakorlát	Rend
Középponti (M_n)	$\frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$	$O(h^2)$
Trapéz (T_n)	$\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$	$O(h^2)$
Simpson (S_n)	$\frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$	$O(h^4)$

Mit jelent ez a gyakorlatban? Ha n -t megduplázom (azaz h -t felezem):

- Középponti/trapéz hiba: **negyedére** csökken ($2^2 = 4$).
- Simpson hiba: **tizenhatodára** csökken ($2^4 = 16$).

Megjegyzés. A Simpson-szabály **harmadfokú polinomokra pontos** (bár parabolával közelít) – ez megmagyarázza a váratlanul jó konvergenciát.

Hibabecslés $\int_a^b f(x) dx$ közelítésére

Tétel: Hibabecslés

Legyen $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ és $M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Módszer	Hibakorlát	Rend
Középponti (M_n)	$\frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$	$O(h^2)$
Trapéz (T_n)	$\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$	$O(h^2)$
Simpson (S_n)	$\frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$	$O(h^4)$

Mit jelent ez a gyakorlatban? Ha n -t megduplázom (azaz h -t felezem):

- Középponti/trapéz hiba: **negyedére** csökken ($2^2 = 4$).
- Simpson hiba: **tizenhatodára** csökken ($2^4 = 16$).

Megjegyzés. A Simpson-szabály **harmadfokú polinomokra pontos** (bár parabolával közelít) – ez megmagyarázza a váratlanul jó konvergenciát.

Hibabecslés $\int_a^b f(x) dx$ közelítésére

Tétel: Hibabecslés

Legyen $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ és $M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Módszer	Hibakorlát	Rend
Középponti (M_n)	$\frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$	$O(h^2)$
Trapéz (T_n)	$\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$	$O(h^2)$
Simpson (S_n)	$\frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$	$O(h^4)$

Mit jelent ez a gyakorlatban? Ha n -t megduplázom (azaz h -t felezem):

- Középponti/trapéz hiba: **negyedére** csökken ($2^2 = 4$).
- Simpson hiba: **tizenhatodára** csökken ($2^4 = 16$).

Megjegyzés. A Simpson-szabály **harmadfokú polinomokra pontos** (bár parabolával közelít) – ez megmagyarázza a váratlanul jó konvergenciát.

Hibabecslés $\int_a^b f(x) dx$ közelítésére

Tétel: Hibabecslés

Legyen $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ és $M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

Módszer	Hibakorlát	Rend
Középponti (M_n)	$\frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$	$O(h^2)$
Trapéz (T_n)	$\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$	$O(h^2)$
Simpson (S_n)	$\frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$	$O(h^4)$

Mit jelent ez a gyakorlatban? Ha n -t megduplázom (azaz h -t felezem):

- Középponti/trapéz hiba: **negyedére** csökken ($2^2 = 4$).
- Simpson hiba: **tizenhatodára** csökken ($2^4 = 16$).

Megjegyzés. A Simpson-szabály **harmadfokú polinomokra pontos** (bár parabolával közelít) – ez megmagyarázza a váratlanul jó konvergenciát.

Összehasonlítás és implementáció

Példa: $\int_0^1 e^x dx = e - 1 \approx 1,71828 \dots$

n	$ M_n - I $	$ T_n - I $	$ S_n - I $
2	$2,8 \times 10^{-3}$	$5,6 \times 10^{-3}$	$8,5 \times 10^{-6}$
4	$7,0 \times 10^{-4}$	$1,4 \times 10^{-3}$	$5,3 \times 10^{-7}$
8	$1,7 \times 10^{-4}$	$3,5 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-8}$
16	$4,4 \times 10^{-5}$	$8,7 \times 10^{-5}$	$2,1 \times 10^{-9}$

```
1 def simpson(f, a, b, n):
2     # n paros legyen
3     h = (b - a) / n
4     xs = [a + k * h for k in range(n + 1)]
5     s = f(xs[0]) + f(xs[n])
6     s += 4 * sum(f(xs[k]) for k in range(1, n, 2))
7     s += 2 * sum(f(xs[k]) for k in range(2, n-1, 2))
8     return s * h / 3
```

Összehasonlítás és implementáció

Példa: $\int_0^1 e^x dx = e - 1 \approx 1,71828 \dots$

n	$ M_n - I $	$ T_n - I $	$ S_n - I $
2	$2,8 \times 10^{-3}$	$5,6 \times 10^{-3}$	$8,5 \times 10^{-6}$
4	$7,0 \times 10^{-4}$	$1,4 \times 10^{-3}$	$5,3 \times 10^{-7}$
8	$1,7 \times 10^{-4}$	$3,5 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-8}$
16	$4,4 \times 10^{-5}$	$8,7 \times 10^{-5}$	$2,1 \times 10^{-9}$

```
1 def simpson(f, a, b, n):
2     # n paros legyen
3     h = (b - a) / n
4     xs = [a + k * h for k in range(n + 1)]
5     s = f(xs[0]) + f(xs[n])
6     s += 4 * sum(f(xs[k]) for k in range(1, n, 2))
7     s += 2 * sum(f(xs[k]) for k in range(2, n-1, 2))
8     return s * h / 3
```

Adaptív integrálás és tudományos könyvtárak

Probléma az egyenletes felosztással: Ha f az egyik helyen gyorsan, más helyen lassan változik, a rögzített n pontatlan eredményt adhat, vagy túl sok pontot használhat a lassan változó részekben.

Adaptív integrálás elve

A beosztást **dinamikusan** alakítjuk a függvény viselkedése alapján:

- Kezdjük egy durva felosztással.
- Számítsuk ki a közelítést és a hibabecslést.
- Ha a hiba túl nagy, osszuk tovább a szakaszt.

Használat SageMath-ban:

```
1 sage: # Szimbolikus (pontos):  
2 sage: integral(exp(-x^2), x, 0, 1)  
3 1/2*sqrt(pi)*erf(1)  
4 sage: # Numerikus (adaptiv Simpson / Gauss-Kronrod):  
5 sage: numerical_integral(exp(-x^2), 0, 1)  
6 (0.746824132812427, 8.291413475940723e-15)
```

Adaptív integrálás és tudományos könyvtárak

Probléma az egyenletes felosztással: Ha f az egyik helyen gyorsan, más helyen lassan változik, a rögzített n pontatlan eredményt adhat, vagy túl sok pontot használhat a lassan változó részekben.

Adaptív integrálás elve

A beosztást **dinamikusan** alakítjuk a függvény viselkedése alapján:

- Kezdjük egy durva felosztással.
- Számítsuk ki a közelítést és a hibabecslést.
- Ha a hiba túl nagy, osszuk tovább a szakaszt.

Használat SageMath-ban:

```
1 sage: # Szimbolikus (pontos):  
2 sage: integral(exp(-x^2), x, 0, 1)  
3 1/2*sqrt(pi)*erf(1)  
4 sage: # Numerikus (adaptiv Simpson / Gauss-Kronrod):  
5 sage: numerical_integral(exp(-x^2), 0, 1)  
6 (0.746824132812427, 8.291413475940723e-15)
```

Adaptív integrálás és tudományos könyvtárak

Probléma az egyenletes felosztással: Ha f az egyik helyen gyorsan, más helyen lassan változik, a rögzített n pontatlan eredményt adhat, vagy túl sok pontot használhat a lassan változó részekben.

Adaptív integrálás elve

A beosztást **dinamikusan** alakítjuk a függvény viselkedése alapján:

- Kezdjük egy durva felosztással.
- Számítsuk ki a közelítést és a hibabecslést.
- Ha a hiba túl nagy, osszuk tovább a szakaszt.

Használat SageMath-ban:

```
1 sage: # Szimbolikus (pontos):  
2 sage: integral(exp(-x^2), x, 0, 1)  
3 1/2*sqrt(pi)*erf(1)  
4 sage: # Numerikus (adaptiv Simpson / Gauss-Kronrod):  
5 sage: numerical_integral(exp(-x^2), 0, 1)  
6 (0.746824132812427, 8.291413475940723e-15)
```

Adaptív integrálás és tudományos könyvtárak

Probléma az egyenletes felosztással: Ha f az egyik helyen gyorsan, más helyen lassan változik, a rögzített n pontatlan eredményt adhat, vagy túl sok pontot használhat a lassan változó részekben.

Adaptív integrálás elve

A beosztást **dinamikusan** alakítjuk a függvény viselkedése alapján:

- Kezdjük egy durva felosztással.
- Számítsuk ki a közelítést és a hibabecslést.
- Ha a hiba túl nagy, osszuk tovább a szakaszt.

Használat SageMath-ban:

```
1 sage: # Szimbolikus (pontos):  
2 sage: integral(exp(-x^2), x, 0, 1)  
3 1/2*sqrt(pi)*erf(1)  
4 sage: # Numerikus (adaptiv Simpson / Gauss-Kronrod):  
5 sage: numerical_integral(exp(-x^2), 0, 1)  
6 (0.746824132812427, 8.291413475940723e-15)
```

Adaptív integrálás és tudományos könyvtárak

Probléma az egyenletes felosztással: Ha f az egyik helyen gyorsan, más helyen lassan változik, a rögzített n pontatlan eredményt adhat, vagy túl sok pontot használhat a lassan változó részekben.

Adaptív integrálás elve

A beosztást **dinamikusan** alakítjuk a függvény viselkedése alapján:

- Kezdjük egy durva felosztással.
- Számítsuk ki a közelítést és a hibabecslést.
- Ha a hiba túl nagy, osszuk tovább a szakaszt.

Használat SageMath-ban:

```
1 sage: # Szimbolikus (pontos):  
2 sage: integral(exp(-x^2), x, 0, 1)  
3 1/2*sqrt(pi)*erf(1)  
4 sage: # Numerikus (adaptiv Simpson / Gauss-Kronrod):  
5 sage: numerical_integral(exp(-x^2), 0, 1)  
6 (0.746824132812427, 8.291413475940723e-15)
```

Következtetések a numerikus integrálásról

Mikor írjunk saját implementációt?

- Tanulás, algoritmus megértése.
- Speciális struktúra kihasználása (pl. párhuzamos kiértékelés).

Mikor használjunk könyvtárat?

- Éles alkalmazásban **mindig** – a könyvtárak hibakezelése, pontossága és sebessége messze felülmúlja a kézzel írt kódot.

Megjegyzés. A `numerical_integral` visszaadja a **hibabecslést** is – ezt sosem szabad figyelmen kívül hagyni tudományos számításokban.

Következtetések a numerikus integrálásról

Mikor írjunk saját implementációt?

- Tanulás, algoritmus megértése.
- Speciális struktúra kihasználása (pl. párhuzamos kiértékelés).

Mikor használjunk könyvtárat?

- Éles alkalmazásban **mindig** – a könyvtárak hibakezelése, pontossága és sebessége messze felülmúlja a kézzel írt kódot.

Megjegyzés. A `numerical_integral` visszaadja a **hibabecslést** is – ezt sosem szabad figyelmen kívül hagyni tudományos számításokban.

Következtetések a numerikus integrálásról

Mikor írjunk saját implementációt?

- Tanulás, algoritmus megértése.
- Speciális struktúra kihasználása (pl. párhuzamos kiértékelés).

Mikor használjunk könyvtárat?

- Éles alkalmazásban **mindig** – a könyvtárak hibakezelése, pontossága és sebessége messze felülmúlja a kézzel írt kódot.

Megjegyzés. A `numerical_integral` visszaadja a **hibabecslést** is – ezt sosem szabad figyelmen kívül hagyni tudományos számításokban.

Tagolás

- 1 Területszámítás és síkgörbék hossza
- 2 Numerikus integrálás
- 3 Jelkiegyenlítés és mozgás**
- 4 Improprius integrálok
- 5 Valószínűségi alkalmazások

Átlagérték és RMS

Definíció: Függvény átlagértéke

Az f függvény **átlagértéke** az $[a, b]$ intervallumon:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Megjegyzés. Visszautalás az integrálközép-tételre: $\bar{f} = f(c)$ valamely $c \in (a, b)$ -re – az átlagértéket a függvény **ténylegesen felveszi**.

Definíció: RMS (Root Mean Square) érték

Az f függvény **négyzetes középértéke** az $[a, b]$ -n:

$$f_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^2 dx}.$$

Miért fontos az RMS?

- Az átlagérték nulla lehet, miközben a jel **nem nulla** (pl. váltóáram).
- Általánosan: $f_{\text{RMS}} \geq |\bar{f}|$ (Jensen-egyenlőtlenség).

Átlagérték és RMS

Definíció: Függvény átlagértéke

Az f függvény **átlagértéke** az $[a, b]$ intervallumon:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Megjegyzés. Visszautalás az integrálközép-tételre: $\bar{f} = f(c)$ valamely $c \in (a, b)$ -re – az átlagértéket a függvény **ténylegesen felveszi**.

Definíció: RMS (Root Mean Square) érték

Az f függvény **négyzetes középértéke** az $[a, b]$ -n:

$$f_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^2 dx}.$$

Miért fontos az RMS?

- Az átlagérték nulla lehet, miközben a jel **nem nulla** (pl. váltóáram).
- Általánosan: $f_{\text{RMS}} \geq |\bar{f}|$ (Jensen-egyenlőtlenség).

Átlagérték és RMS

Definíció: Függvény átlagértéke

Az f függvény **átlagértéke** az $[a, b]$ intervallumon:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Megjegyzés. Visszautalás az integrálközép-tételre: $\bar{f} = f(c)$ valamely $c \in (a, b)$ -re – az átlagértéket a függvény **ténylegesen felveszi**.

Definíció: RMS (Root Mean Square) érték

Az f függvény **négyzetes középértéke** az $[a, b]$ -n:

$$f_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^2 dx}.$$

Miért fontos az RMS?

- Az átlagérték nulla lehet, miközben a jel **nem nulla** (pl. váltóáram).
- Általánosan: $f_{\text{RMS}} \geq |\bar{f}|$ (Jensen-egyenlőtlenség).

Átlagérték és RMS

Definíció: Függvény átlagértéke

Az f függvény **átlagértéke** az $[a, b]$ intervallumon:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Megjegyzés. Visszautalás az integrálközép-tételre: $\bar{f} = f(c)$ valamely $c \in (a, b)$ -re – az átlagértéket a függvény **ténylegesen felveszi**.

Definíció: RMS (Root Mean Square) érték

Az f függvény **négyzetes középértéke** az $[a, b]$ -n:

$$f_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^2 dx}.$$

Miért fontos az RMS?

- Az átlagérték nulla lehet, miközben a jel **nem nulla** (pl. váltóáram).
- Általánosan: $f_{\text{RMS}} \geq |\bar{f}|$ (Jensen-egyenlőtlenség).

Átlagérték és RMS

Definíció: Függvény átlagértéke

Az f függvény **átlagértéke** az $[a, b]$ intervallumon:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Megjegyzés. Visszautalás az integrálközép-tételre: $\bar{f} = f(c)$ valamely $c \in (a, b)$ -re – az átlagértéket a függvény **ténylegesen felveszi**.

Definíció: RMS (Root Mean Square) érték

Az f függvény **négyzetes középértéke** az $[a, b]$ -n:

$$f_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^2 dx}.$$

Miért fontos az RMS?

- Az átlagérték nulla lehet, miközben a jel **nem nulla** (pl. váltóáram).
- Általánosan: $f_{\text{RMS}} \geq |\bar{f}|$ (Jensen-egyenlőtlenség).

Kidolgozott példa: szinuszos jel RMS értéke

Feladat

Határozzuk meg az

$$f(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

periodikus jel RMS értékét egy teljes

$$T = 2\pi/\omega$$

perióduson!

Számítás:

$$f_{\text{RMS}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{U_0^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt.$$

A $\cos(2\omega t)$ integrálja egy teljes perióduson nulla, tehát:

$$f_{\text{RMS}}^2 = \frac{U_0^2}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{U_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad f_{\text{RMS}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Kidolgozott példa: szinuszos jel RMS értéke

Feladat

Határozzuk meg az

$$f(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

periodikus jel RMS értékét egy teljes

$$T = 2\pi/\omega$$

perióduson!

Számítás:

$$f_{\text{RMS}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{U_0^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt.$$

A $\cos(2\omega t)$ integrálja egy teljes perióduson nulla, tehát:

$$f_{\text{RMS}}^2 = \frac{U_0^2}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{U_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad f_{\text{RMS}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Kidolgozott példa: szinuszos jel RMS értéke

Feladat

Határozzuk meg az

$$f(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

periodikus jel RMS értékét egy teljes

$$T = 2\pi/\omega$$

perióduson!

Számítás:

$$f_{\text{RMS}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{U_0^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt.$$

A $\cos(2\omega t)$ integrálja egy teljes perióduson nulla, tehát:

$$f_{\text{RMS}}^2 = \frac{U_0^2}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{U_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad f_{\text{RMS}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Kidolgozott példa: szinuszos jel RMS értéke

Feladat

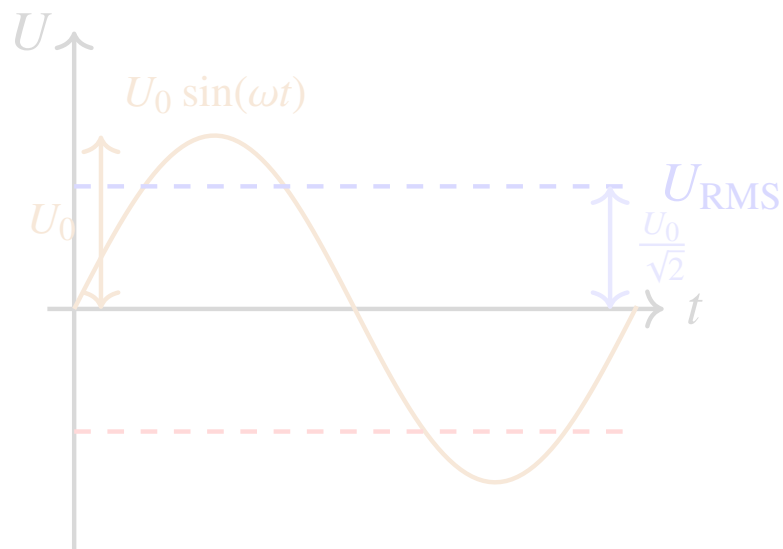
Határozzuk meg az

$$f(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

periodikus jel RMS értékét egy teljes

$$T = 2\pi/\omega$$

perióduson!



Gyakorlati jelentőség:

- A 230 V-os európai hálózati feszültség **RMS érték**: a csúcsérték $U_0 = 230 \sqrt{2} \approx 325 \text{ V}$.
- Az RMS-feszültség ugyanolyan teljesítményt ad le, mint egy 230 V-os **egyenfeszültség**.

Kidolgozott példa: szinuszos jel RMS értéke

Feladat

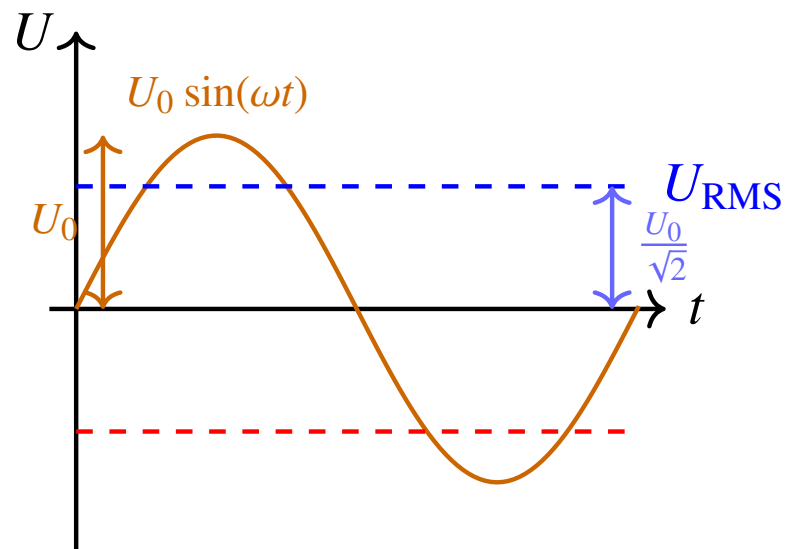
Határozzuk meg az

$$f(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

periodikus jel RMS értékét egy teljes

$$T = 2\pi/\omega$$

perióduson!



Gyakorlati jelentőség:

- A 230 V-os európai hálózati feszültség **RMS érték**: a csúcsérték $U_0 = 230 \sqrt{2} \approx 325 \text{ V}$.
- Az RMS-feszültség ugyanolyan teljesítményt ad le, mint egy 230 V-os **egyenfeszültség**.

Kidolgozott példa: szinuszos jel RMS értéke

Feladat

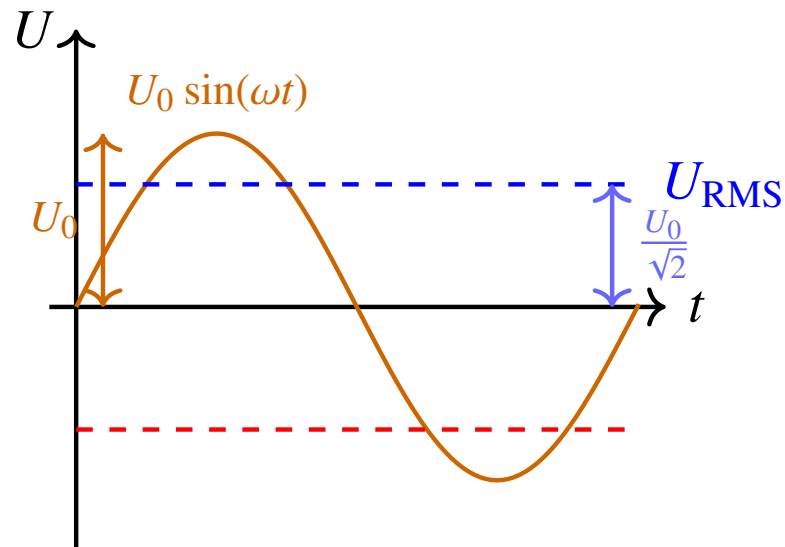
Határozzuk meg az

$$f(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

periodikus jel RMS értékét egy teljes

$$T = 2\pi/\omega$$

perióduson!



Gyakorlati jelentőség:

- A 230 V-os európai hálózati feszültség **RMS érték**: a csúcsérték $U_0 = 230 \sqrt{2} \approx 325 \text{ V}$.
- Az RMS-feszültség ugyanolyan teljesítményt ad le, mint egy 230 V-os **egyenfeszültség**.

Kidolgozott példa: szinuszos jel RMS értéke

Feladat

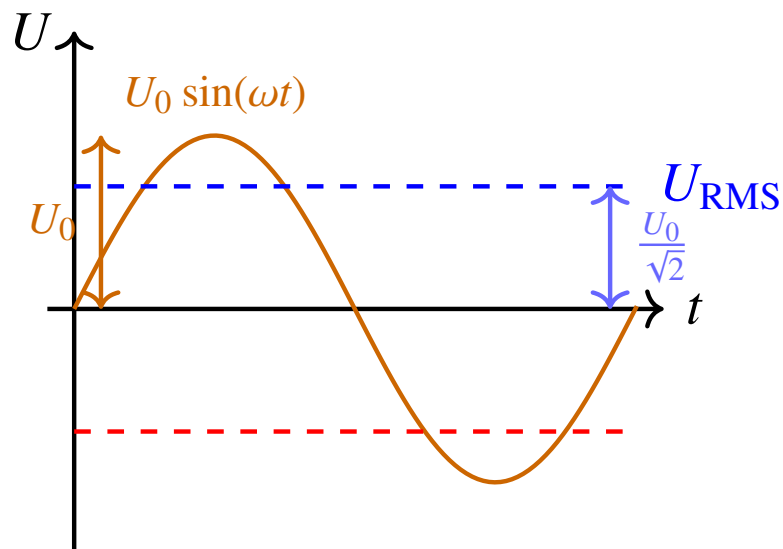
Határozzuk meg az

$$f(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

periodikus jel RMS értékét egy teljes

$$T = 2\pi/\omega$$

perióduson!



Gyakorlati jelentőség:

- A 230 V-os európai hálózati feszültség **RMS érték**: a csúcsérték $U_0 = 230 \sqrt{2} \approx 325 \text{ V}$.
- Az RMS-feszültség ugyanolyan teljesítményt ad le, mint egy 230 V-os **egyenfeszültség**.

Mozgásegyenlet I: sebesség és elmozdulás

Alapösszefüggések: A gyorsulás, sebesség és elmozdulás egymás deriváltjai:

$$v(t) = s'(t), \quad a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Integrálással visszafelé haladhatunk:

$$a(t) \xrightarrow{\int} v(t) \xrightarrow{\int} s(t).$$

Képletek (kezdeti feltételekkel)

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(\tau) d\tau, \quad s(t) = s_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau.$$

Mozgásegyenlet I: sebesség és elmozdulás

Alapösszefüggések: A gyorsulás, sebesség és elmozdulás egymás deriváltjai:

$$v(t) = s'(t), \quad a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Integrálással visszafelé haladhatunk:

$$a(t) \xrightarrow{\int} v(t) \xrightarrow{\int} s(t).$$

Képletek (kezdeti feltételekkel)

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(\tau) d\tau, \quad s(t) = s_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau.$$

Mozgásegyenlet I: szabadesés példa

Kidolgozott példa: Szabadon eső test h magasságból

$$a(t) = -g \approx -9,81 \text{ m/s}^2, v_0 = 0, s_0 = h.$$

$$v(t) = \int_0^t (-g) d\tau = -gt.$$

$$s(t) = h + \int_0^t (-g\tau) d\tau = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Földet ér, amikor $s(t^*) = 0$:

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v(t^*) = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}.$$

Megjegyzés. Ez pontosan a primitív függvény **kezdeti érték feladata** (4. fejezet) – most fizikai kontextusban.

Mozgásegyenlet I: szabadesés példa

Kidolgozott példa: Szabadon eső test h magasságból

$$a(t) = -g \approx -9,81 \text{ m/s}^2, v_0 = 0, s_0 = h.$$

$$v(t) = \int_0^t (-g) d\tau = -gt.$$

$$s(t) = h + \int_0^t (-g\tau) d\tau = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Földet ér, amikor $s(t^*) = 0$:

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v(t^*) = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}.$$

Megjegyzés. Ez pontosan a primitív függvény **kezdeti érték feladata** (4. fejezet) – most fizikai kontextusban.

Mozgásegyenlet I: szabadesés példa

Kidolgozott példa: Szabadon eső test h magasságból

$$a(t) = -g \approx -9,81 \text{ m/s}^2, v_0 = 0, s_0 = h.$$

$$v(t) = \int_0^t (-g) d\tau = -gt.$$

$$s(t) = h + \int_0^t (-g\tau) d\tau = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Földet ér, amikor $s(t^*) = 0$:

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v(t^*) = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}.$$

Megjegyzés. Ez pontosan a primitív függvény **kezdeti érték feladata** (4. fejezet) – most fizikai kontextusban.

Mozgásegyszerlet I: szabadesés példa

Kidolgozott példa: Szabadon eső test h magasságból

$$a(t) = -g \approx -9,81 \text{ m/s}^2, v_0 = 0, s_0 = h.$$

$$v(t) = \int_0^t (-g) d\tau = -gt.$$

$$s(t) = h + \int_0^t (-g\tau) d\tau = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Földet ér, amikor $s(t^*) = 0$:

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v(t^*) = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}.$$

Megjegyzés. Ez pontosan a primitív függvény kezdeti érték feladata (4. fejezet) – most fizikai kontextusban.

Mozgásegyszerlet I: szabadesés példa

Kidolgozott példa: Szabadon eső test h magasságból

$$a(t) = -g \approx -9,81 \text{ m/s}^2, v_0 = 0, s_0 = h.$$

$$v(t) = \int_0^t (-g) d\tau = -gt.$$

$$s(t) = h + \int_0^t (-g\tau) d\tau = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Földet ér, amikor $s(t^*) = 0$:

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v(t^*) = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}.$$

Megjegyzés. Ez pontosan a primitív függvény **kezdeti érték feladata** (4. fejezet) – most fizikai kontextusban.

Mozgásegyenlet II: nemlineáris eset

Valósabb modell: Léghellenállással eső test esetén a gyorsulás függ a sebességtől:

$$a(t) = -g + \frac{k}{m}v(t)^2,$$

ahol $k > 0$ a légellenállási együttható. Ez egy **elsőrendű nemlineáris differenciálegyenlet** – zárt alakú megoldása speciális (hiperbolikus függvényekkel), numerikusan azonban egyszerűen kezelhető.

Euler-módszer

Osszuk fel $[0, T]$ -t n egyenlő részre ($\Delta t = T/n$). Közelítsük:

$$v(t + \Delta t) \approx v(t) + a(t) \cdot \Delta t, \quad s(t + \Delta t) \approx s(t) + v(t) \cdot \Delta t.$$

Ez a **integrálközép** alkalmazása minden kis $[t, t + \Delta t]$ lépésen:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \int_t^{t+\Delta t} a(\tau) d\tau \approx v(t) + a(t) \cdot \Delta t.$$

Megjegyzés. Az Euler-módszer $O(\Delta t)$, a **Runge–Kutta módszerek** $O(\Delta t^4)$ pontosságúak.

Mozgásegyenlet II: nemlineáris eset

Valósabb modell: Léghellenállással eső test esetén a gyorsulás függ a sebességtől:

$$a(t) = -g + \frac{k}{m}v(t)^2,$$

ahol $k > 0$ a légellenállási együttható. Ez egy **elsőrendű nemlineáris differenciálegyenlet** – zárt alakú megoldása speciális (hiperbolikus függvényekkel), numerikusan azonban egyszerűen kezelhető.

Euler-módszer

Osszuk fel $[0, T]$ -t n egyenlő részre ($\Delta t = T/n$). Közelítsük:

$$v(t + \Delta t) \approx v(t) + a(t) \cdot \Delta t, \quad s(t + \Delta t) \approx s(t) + v(t) \cdot \Delta t.$$

Ez a **integrálközép** alkalmazása minden kis $[t, t + \Delta t]$ lépésen:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \int_t^{t+\Delta t} a(\tau) d\tau \approx v(t) + a(t) \cdot \Delta t.$$

Megjegyzés. Az Euler-módszer $O(\Delta t)$, a **Runge–Kutta** módszerek $O(\Delta t^4)$ pontosságúak.

Mozgásegyenlet II: nemlineáris eset

Valósabb modell: Léghellenállással eső test esetén a gyorsulás függ a sebességtől:

$$a(t) = -g + \frac{k}{m}v(t)^2,$$

ahol $k > 0$ a légellenállási együttható. Ez egy **elsőrendű nemlineáris differenciálegyenlet** – zárt alakú megoldása speciális (hiperbolikus függvényekkel), numerikusan azonban egyszerűen kezelhető.

Euler-módszer

Osszuk fel $[0, T]$ -t n egyenlő részre ($\Delta t = T/n$). Közelítsük:

$$v(t + \Delta t) \approx v(t) + a(t) \cdot \Delta t, \quad s(t + \Delta t) \approx s(t) + v(t) \cdot \Delta t.$$

Ez a **integrálközép** alkalmazása minden kis $[t, t + \Delta t]$ lépésen:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \int_t^{t+\Delta t} a(\tau) d\tau \approx v(t) + a(t) \cdot \Delta t.$$

Megjegyzés. Az Euler-módszer $O(\Delta t)$, a **Runge–Kutta módszerek** $O(\Delta t^4)$ pontosságúak.

Mozgásegyenlet II: Implementáció Pythonban

$$a(t) = -g + \frac{k}{m}v(t)^2, \quad v(t + \Delta t) \approx v(t) + a(t) \cdot \Delta t, \quad s(t + \Delta t) \approx s(t) + v(t) \cdot \Delta t.$$

```
1 def euler(g, k, m, v0, s0, T, n):
2     dt = T / n
3     v, s = v0, s0
4     for _ in range(n):
5         a = -g + (k/m) * v**2
6         v = v + a * dt
7         s = s + v * dt
8     return v, s
9
10 euler(g=9.81, k=0.1, m=1.0, v0=0, s0=100, T=4, n=1000)
11 # (-9.897558634625314, 67.27784494845693)
```

Megjegyzés. Az Euler-módszer és a pontosabb **Runge–Kutta** módszerek a `scipy.integrate.solve_ivp` függvényben érhetők el. Ezek a **differenciálegyenletek numerikus megoldásának** alapeszközei.

Mozgásegyenlet II: Implementáció Pythonban

$$a(t) = -g + \frac{k}{m}v(t)^2, \quad v(t + \Delta t) \approx v(t) + a(t) \cdot \Delta t, \quad s(t + \Delta t) \approx s(t) + v(t) \cdot \Delta t.$$

```
1 def euler(g, k, m, v0, s0, T, n):
2     dt = T / n
3     v, s = v0, s0
4     for _ in range(n):
5         a = -g + (k/m) * v**2
6         v = v + a * dt
7         s = s + v * dt
8     return v, s
9
10 euler(g=9.81, k=0.1, m=1.0, v0=0, s0=100, T=4, n=1000)
11 # (-9.897558634625314, 67.27784494845693)
```

Megjegyzés. Az Euler-módszer és a pontosabb Runge–Kutta módszerek a `scipy.integrate.solve_ivp` függvényben érhetők el. Ezek a differenciálegyenletek numerikus megoldásának alapeszközei.

Mozgásegyenlet II: Implementáció Pythonban

$$a(t) = -g + \frac{k}{m}v(t)^2, \quad v(t + \Delta t) \approx v(t) + a(t) \cdot \Delta t, \quad s(t + \Delta t) \approx s(t) + v(t) \cdot \Delta t.$$

```
1 def euler(g, k, m, v0, s0, T, n):
2     dt = T / n
3     v, s = v0, s0
4     for _ in range(n):
5         a = -g + (k/m) * v**2
6         v = v + a * dt
7         s = s + v * dt
8     return v, s
9
10 euler(g=9.81, k=0.1, m=1.0, v0=0, s0=100, T=4, n=1000)
11 # (-9.897558634625314, 67.27784494845693)
```

Megjegyzés. Az Euler-módszer és a pontosabb **Runge–Kutta módszerek** a `scipy.integrate.solve_ivp` függvényben érhetők el. Ezek a **differenciálegyenletek numerikus megoldásának** alapeszközei.

Tagolás

- 1 Területszámítás és síkgörbék hossza
- 2 Numerikus integrálás
- 3 Jelkiegyenlítés és mozgás
- 4 Improprius integrálok**
- 5 Valószínűségi alkalmazások

Improprius integrálok: végtelen határok

A határozott integrál definíciója **véges** $[a, b]$ intervallumra vonatkozott. Mi történik, ha a felső határ ∞ ?

Definíció: Improprius integrál (végtelen felső határ)

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

ha a határérték létezik és véges. Ekkor az integrál **konvergens**, egyébként **divergens**.

Hasonlóan értelmezzük:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Improprius integrálok: végtelen határok

A határozott integrál definíciója **véges** $[a, b]$ intervallumra vonatkozott. Mi történik, ha a felső határ ∞ ?

Definíció: Improprius integrál (végtelen felső határ)

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

ha a határérték létezik és véges. Ekkor az integrál **konvergens**, egyébként **divergens**.

Hasonlóan értelmezzük:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Improprius integrálok: végtelen határok

A határozott integrál definíciója **véges** $[a, b]$ intervallumra vonatkozott. Mi történik, ha a felső határ ∞ ?

Definíció: Improprius integrál (végtelen felső határ)

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

ha a határérték létezik és véges. Ekkor az integrál **konvergens**, egyébként **divergens**.

Hasonlóan értelmezzük:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Improprius integrálok: példák

Alappélda: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} - (-1) \right) = 1.$$

Divergens eset: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = +\infty.$$

Improprius integrálok: példák

Alappélda: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} - (-1) \right) = 1.$$

Divergens eset: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = +\infty.$$

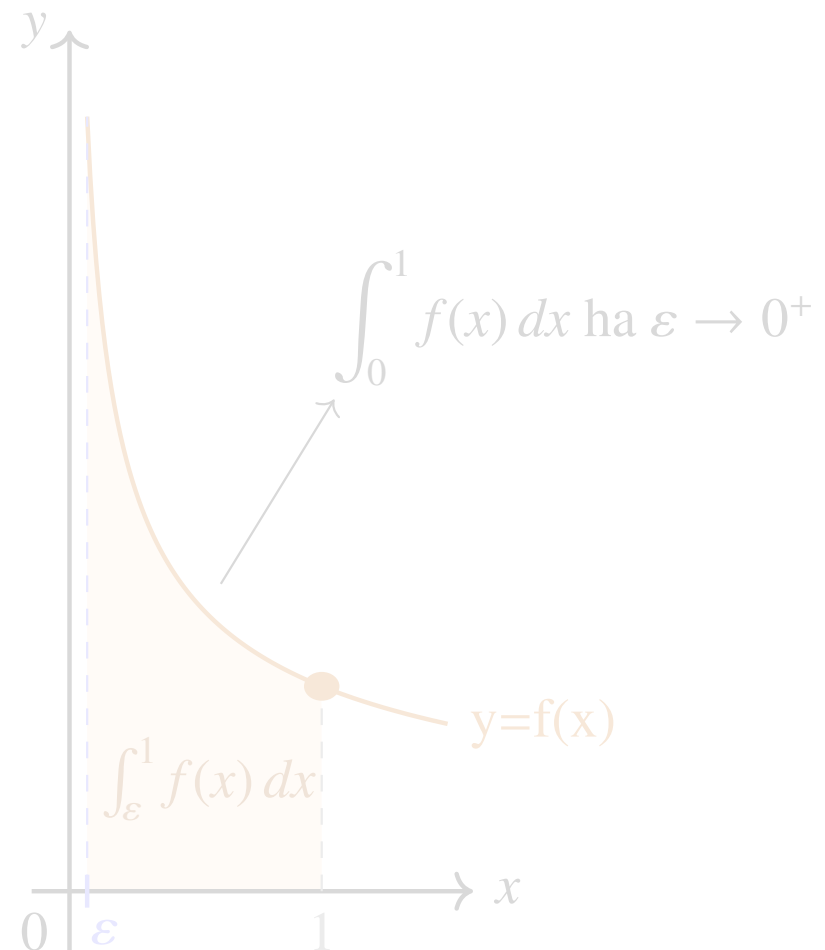
Improprius integrálok: szakadásos integrandus

A másik eset: f **nem korlátos** az integrálási intervallumon (pl. szakadása van a határon vagy belül).

Definíció: Improprius integrál
(szakadás a bal határon)

Ha f nem korlátos a -ban, de
 $[a + \varepsilon, b]$ -n integrálható:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$



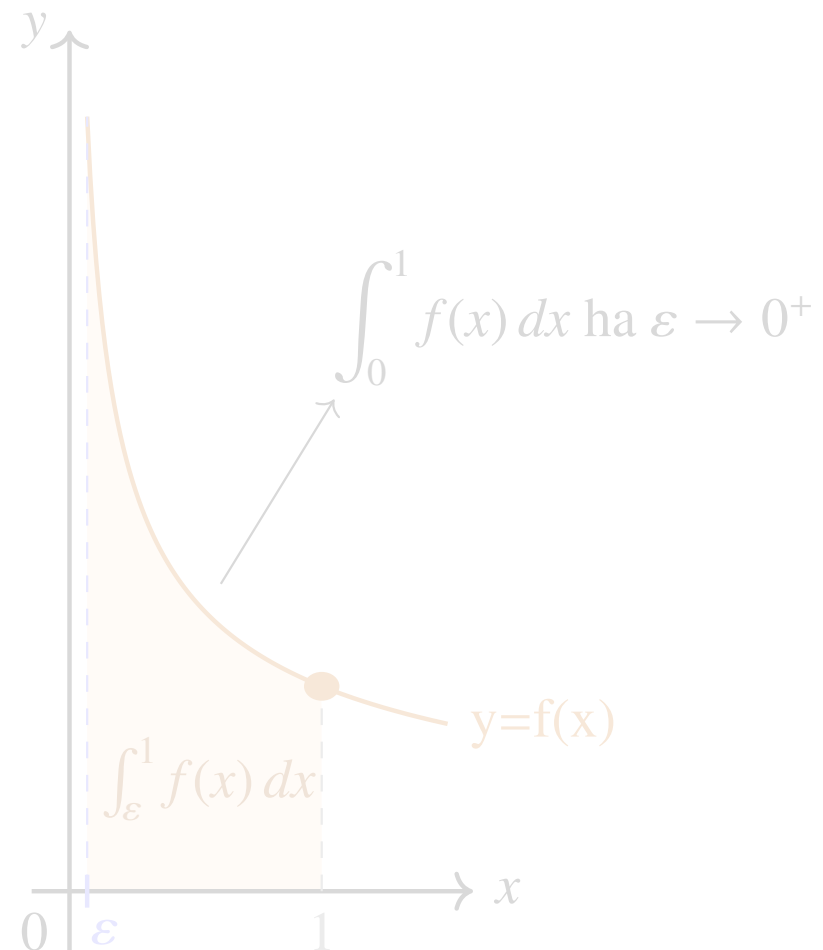
Impropius integrálok: szakadós integrandus

A másik eset: f **nem korlátos** az integrálási intervallumon (pl. szakadása van a határon vagy belül).

Definíció: Impropius integrál
(szakadás a bal határon)

Ha f nem korlátos a -ban, de $[a + \varepsilon, b]$ -n integrálható:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$



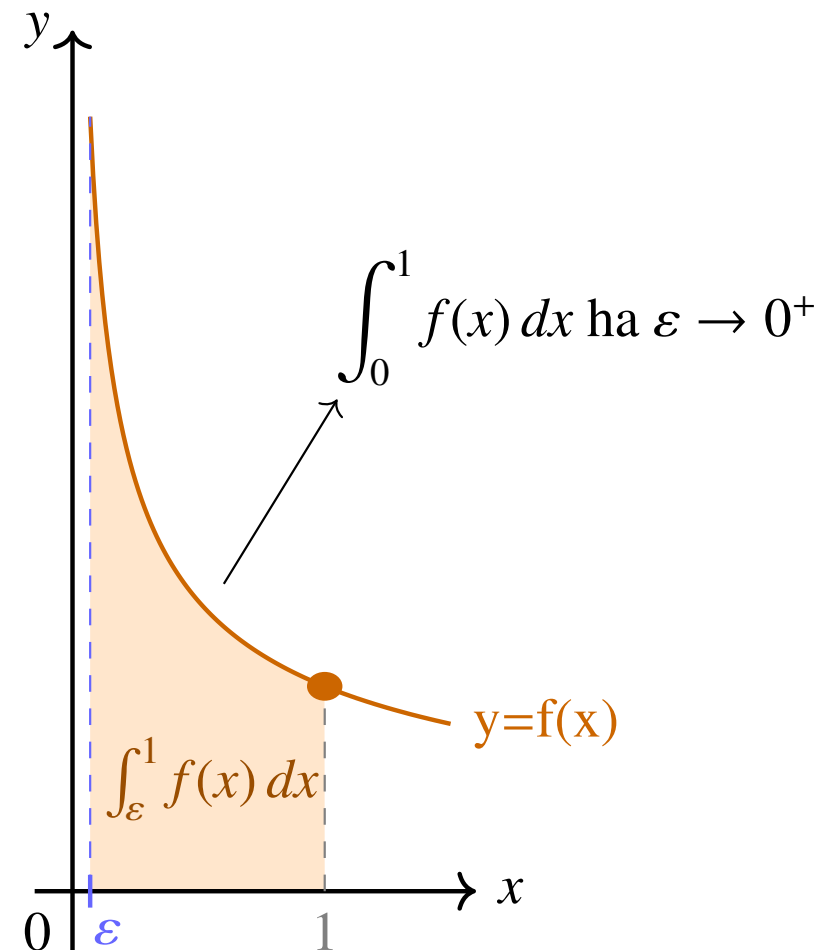
Improprius integrálok: szakadásos integrandus

A másik eset: f **nem korlátos** az integrálási intervallumon (pl. szakadása van a határon vagy belül).

Definíció: Improprius integrál
(szakadás a bal határon)

Ha f nem korlátos a -ban, de $[a + \varepsilon, b]$ -n integrálható:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$



Improprius integrálok: példák nem korlátos integrandusra

Példa: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$f(x) = 1/\sqrt{x}$ nem korlátos $x = 0$ -ban.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-1/2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Divergens eset: $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln x \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (0 - \ln \varepsilon) = +\infty.$$

Megjegyzés. A két fajta improprius integrál egységesen kezelhető: mindkét esetben egy **határértékkel kiterjesztett** Newton–Leibniz-tételről van szó.

Improprius integrálok: példák nem korlátos integrandusra

Példa: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$f(x) = 1/\sqrt{x}$ nem korlátos $x = 0$ -ban.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-1/2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Divergens eset: $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln x \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (0 - \ln \varepsilon) = +\infty.$$

Megjegyzés. A két fajta improprius integrál egységesen kezelhető: mindkét esetben egy **határértékkel kiterjesztett** Newton–Leibniz-tételről van szó.

Improprius integrálok: példák nem korlátos integrandusra

Példa: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$f(x) = 1/\sqrt{x}$ nem korlátos $x = 0$ -ban.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-1/2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Divergens eset: $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln x \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (0 - \ln \varepsilon) = +\infty.$$

Megjegyzés. A két fajta improprius integrál egységesen kezelhető: mindkét esetben egy **határértékkel kiterjesztett** Newton–Leibniz-tételről van szó.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ viselkedése

Az $1/x^p$ integrál vizsgálata

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^b \quad (p \neq 1).$$

- Ha $p > 1$: $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p} = 0$, tehát $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$ **(konvergens)**.
- Ha $p < 1$: $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p} = +\infty$ **(divergens)**.
- Ha $p = 1$: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$ **(divergens)**.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ viselkedése

Az $1/x^p$ integrál vizsgálata

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^b \quad (p \neq 1).$$

- Ha $p > 1$: $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p} = 0$, tehát $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$ **(konvergens)**.
- Ha $p < 1$: $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p} = +\infty$ **(divergens)**.
- Ha $p = 1$: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$ **(divergens)**.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ viselkedése

Az $1/x^p$ integrál vizsgálata

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^b \quad (p \neq 1).$$

- Ha $p > 1$: $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p} = 0$, tehát $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$ **(konvergens)**.
- Ha $p < 1$: $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p} = +\infty$ **(divergens)**.
- Ha $p = 1$: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$ **(divergens)**.

Improprius integrálok és algoritmuselemzés

Kapcsolat az algoritmuselemzéssel

Az **integrál-összehasonlító kritérium** szerint $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergenciája összekapcsolható $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergenciájával, ha $f(k) = a_k$ és f monoton csökkenő.

Alkalmazás – a harmonikus sor:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Megjegyzés. Ez az algoritmuselemzésben fontos eredmény: pl. a gyors rendezés (quicksort) várható lépésszámnak meghatározásakor.

Improprius integrálok és algoritmuselemzés

Kapcsolat az algoritmuselemzéssel

Az **integrál-összehasonlító kritérium** szerint $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergenciája összekapcsolható $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergenciájával, ha $f(k) = a_k$ és f monoton csökkenő.

Alkalmazás – a harmonikus sor:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Megjegyzés. Ez az algoritmuselemzésben fontos eredmény: pl. a gyors rendezés (quicksort) várható lépésszámnak meghatározásakor.

Improprius integrálok és algoritmuselemzés

Kapcsolat az algoritmuselemzéssel

Az **integrál-összehasonlító kritérium** szerint $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergenciája összekapcsolható $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergenciájával, ha $f(k) = a_k$ és f monoton csökkenő.

Alkalmazás – a harmonikus sor:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Megjegyzés. Ez az algoritmuselemzésben fontos eredmény: pl. a gyors rendezés (quicksort) várható lépésszámnak meghatározásakor.

Improprius integrálok és prímszámok

- A prímek $\sum_{p \leq n} 1/p$ reciprokösszegének a viselkedése kulcsfontosságú a modern kriptográfiában.
- A kérdés az improprius integrálokhoz kapcsolódik, a matematika ezen területét **analitikus számelméletnek** nevezzük.
- A következő tétel az **Eratoszthenész-szita** $O(n \log \log n)$ bonyolultságát magyarázza.
- Egyben megmutatja, hogy $\sum 1/p = +\infty$ (a prímek reciprokösszege divergens) – ami önmagában is mély számelméleti eredmény.

Tétel: A prímek reciprokösszege n -ig

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prím}}} \frac{1}{p} \approx \ln \ln n.$$

Improprius integrálok és prímszámok

- A prímek $\sum_{p \leq n} 1/p$ reciprokösszegének a viselkedése kulcsfontosságú a modern kriptográfiában.
- A kérdés az improprius integrálokhoz kapcsolódik, a matematika ezen területét **analitikus számelméletnek** nevezzük.
- A következő tétel az **Eratoszthenész-szita** $O(n \log \log n)$ bonyolultságát magyarázza.
- Egyben megmutatja, hogy $\sum 1/p = +\infty$ (a prímek reciprokösszege divergens) – ami önmagában is mély számelméleti eredmény.

Tétel: A prímek reciprokösszege n -ig

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prím}}} \frac{1}{p} \approx \ln \ln n.$$

Improprius integrálok és prímszámok

- A prímek $\sum_{p \leq n} 1/p$ reciprokösszegének a viselkedése kulcsfontosságú a modern kriptográfiában.
- A kérdés az improprius integrálokhoz kapcsolódik, a matematika ezen területét **analitikus számelméletnek** nevezzük.
- A következő tétel az **Eratoszthenész-szita** $O(n \log \log n)$ bonyolultságát magyarázza.
- Egyben megmutatja, hogy $\sum 1/p = +\infty$ (a prímek reciprokösszege divergens) – ami önmagában is mély számelméleti eredmény.

Tétel: A prímek reciprokösszege n -ig

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prím}}} \frac{1}{p} \approx \ln \ln n.$$

Improprius integrálok és prímszámok

- A prímek $\sum_{p \leq n} 1/p$ reciprokösszegének a viselkedése kulcsfontosságú a modern kriptográfiában.
- A kérdés az improprius integrálokhoz kapcsolódik, a matematika ezen területét **analitikus számelméletnek** nevezzük.
- A következő tétel az **Eratoszthenész-szita** $O(n \log \log n)$ bonyolultságát magyarázza.
- Egyben megmutatja, hogy $\sum 1/p = +\infty$ (a prímek reciprokösszege divergens) – ami önmagában is mély számelméleti eredmény.

Tétel: A prímek reciprokösszege n -ig

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prím}}} \frac{1}{p} \approx \ln \ln n.$$

Improprius integrálok és prímszámok

- A prímek $\sum_{p \leq n} 1/p$ reciprokösszegének a viselkedése kulcsfontosságú a modern kriptográfiában.
- A kérdés az improprius integrálokhoz kapcsolódik, a matematika ezen területét **analitikus számelméletnek** nevezzük.
- A következő tétel az **Eratoszthenész-szita** $O(n \log \log n)$ bonyolultságát magyarázza.
- Egyben megmutatja, hogy $\sum 1/p = +\infty$ (a prímek reciprokösszege divergens) – ami önmagában is mély számelméleti eredmény.

Tétel: A prímek reciprokösszege n -ig

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prím}}} \frac{1}{p} \approx \ln \ln n.$$

A prímszámtétel és a prímek reciprokösszege

Tétel (Prímszámtétel, 1. megfogalmazás)

Jelölje $\pi(n)$ az n -nél nem nagyobb prímszámok számát. Ekkor:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}, \quad \text{azaz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n / \ln n} = 1.$$

Tétel (Prímszámtétel, 2. megfogalmazás)

Jelölje p_k a k -adik prímszámot. Ekkor:

$$p_k \sim k \ln k, \quad \text{azaz} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{k \ln k} = 1.$$

Következmény: Az 1 és n közé eső prímek:

$$p_1, p_2, \dots, p_{\pi(n)}.$$

A prímszámtétel és a prímek reciprokösszege

Tétel (Prímszámtétel, 1. megfogalmazás)

Jelölje $\pi(n)$ az n -nél nem nagyobb prímszámok számát. Ekkor:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}, \quad \text{azaz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n / \ln n} = 1.$$

Tétel (Prímszámtétel, 2. megfogalmazás)

Jelölje p_k a k -adik prímszámot. Ekkor:

$$p_k \sim k \ln k, \quad \text{azaz} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{k \ln k} = 1.$$

Következmény: Az 1 és n közé eső prímek:

$$p_1, p_2, \dots, p_{\pi(n)}.$$

A prímszámtétel és a prímek reciprokösszege

Tétel (Prímszámtétel, 1. megfogalmazás)

Jelölje $\pi(n)$ az n -nél nem nagyobb prímszámok számát. Ekkor:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}, \quad \text{azaz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n / \ln n} = 1.$$

Tétel (Prímszámtétel, 2. megfogalmazás)

Jelölje p_k a k -adik prímszámot. Ekkor:

$$p_k \sim k \ln k, \quad \text{azaz} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{k \ln k} = 1.$$

Következmény: Az 1 és n közé eső prímek:

$$p_1, p_2, \dots, p_{\pi(n)}.$$

A prímek reciprokösszege és az integrálközelítés

Tétel: A prímek reciprokösszege

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prím}}} \frac{1}{p} \approx \ln \ln n.$$

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prím}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{\pi(n)} \frac{1}{p_k} \approx \sum_{k=2}^{\pi(n)} \frac{1}{k \ln k} \approx \int_2^{\pi(n)} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

Az utolsó közelítés a **Riemann-összeg** és az **integrálközépérték-tétel** alkalmazásával történik.

Az integrál kiszámítása: $\frac{1}{x \ln x}$ primitív függvénye $\ln(\ln x)$, tehát

$$\int_2^{\pi(n)} \frac{dx}{x \ln x} = \left[\ln(\ln x) \right]_2^{\pi(n)} = \ln(\ln \pi(n)) - \ln(\ln 2).$$

Végső lépés: $\ln(\ln \pi(n)) \approx \ln\left(\ln \frac{n}{\ln n}\right) = \ln(\ln n - \ln \ln n) \approx \ln(\ln n).$

A prímek reciprokösszege és az integrálközelítés

Tétel: A prímek reciprokösszege

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prím}}} \frac{1}{p} \approx \ln \ln n.$$

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prím}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{\pi(n)} \frac{1}{p_k} \approx \sum_{k=2}^{\pi(n)} \frac{1}{k \ln k} \approx \int_2^{\pi(n)} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

Az utolsó közelítés a **Riemann-összeg** és az **integrálközéppérték-tétel** alkalmazásával történik.

Az integrál kiszámítása: $\frac{1}{x \ln x}$ primitív függvénye $\ln(\ln x)$, tehát

$$\int_2^{\pi(n)} \frac{dx}{x \ln x} = \left[\ln(\ln x) \right]_2^{\pi(n)} = \ln(\ln \pi(n)) - \ln(\ln 2).$$

Végső lépés: $\ln(\ln \pi(n)) \approx \ln\left(\ln \frac{n}{\ln n}\right) = \ln(\ln n - \ln \ln n) \approx \ln(\ln n).$

A prímek reciprokösszege és az integrálközelítés

Tétel: A prímek reciprokösszege

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prím}}} \frac{1}{p} \approx \ln \ln n.$$

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prím}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{\pi(n)} \frac{1}{p_k} \approx \sum_{k=2}^{\pi(n)} \frac{1}{k \ln k} \approx \int_2^{\pi(n)} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

Az utolsó közelítés a **Riemann-összeg** és az **integrálközéppérték-tétel** alkalmazásával történik.

Az integrál kiszámítása: $\frac{1}{x \ln x}$ primitív függvénye $\ln(\ln x)$, tehát

$$\int_2^{\pi(n)} \frac{dx}{x \ln x} = \left[\ln(\ln x) \right]_2^{\pi(n)} = \ln(\ln \pi(n)) - \ln(\ln 2).$$

Végső lépés: $\ln(\ln \pi(n)) \approx \ln\left(\ln \frac{n}{\ln n}\right) = \ln(\ln n - \ln \ln n) \approx \ln(\ln n).$

A prímek reciprokösszege és az integrálközelítés

Tétel: A prímek reciprokösszege

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prím}}} \frac{1}{p} \approx \ln \ln n.$$

$$\sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prím}}} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{\pi(n)} \frac{1}{p_k} \approx \sum_{k=2}^{\pi(n)} \frac{1}{k \ln k} \approx \int_2^{\pi(n)} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

Az utolsó közelítés a **Riemann-összeg** és az **integrálközéppérték-tétel** alkalmazásával történik.

Az integrál kiszámítása: $\frac{1}{x \ln x}$ primitív függvénye $\ln(\ln x)$, tehát

$$\int_2^{\pi(n)} \frac{dx}{x \ln x} = \left[\ln(\ln x) \right]_2^{\pi(n)} = \ln(\ln \pi(n)) - \ln(\ln 2).$$

Végső lépés: $\ln(\ln \pi(n)) \approx \ln\left(\ln \frac{n}{\ln n}\right) = \ln(\ln n - \ln \ln n) \approx \ln(\ln n).$

Tagolás

- 1 Területszámítás és síkgörbék hossza
- 2 Numerikus integrálás
- 3 Jelkiegyenlítés és mozgás
- 4 Improprius integrálok
- 5 Valószínűségi alkalmazások**

Folytonos valószínűségi változó

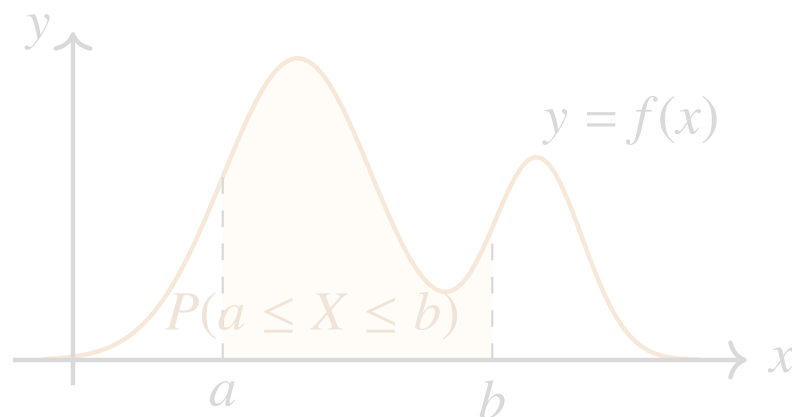
Definíció: Sűrűségfüggvény

Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **sűrűségfüggvény**, ha

$$f(x) \geq 0 \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Az X folytonos valószínűségi változó **valószínűsége** egy $[a, b]$ intervallumon:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$



Megjegyzés. A normalizálási feltétel ($\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$) egy improprius integrál.

Folytonos valószínűségi változó

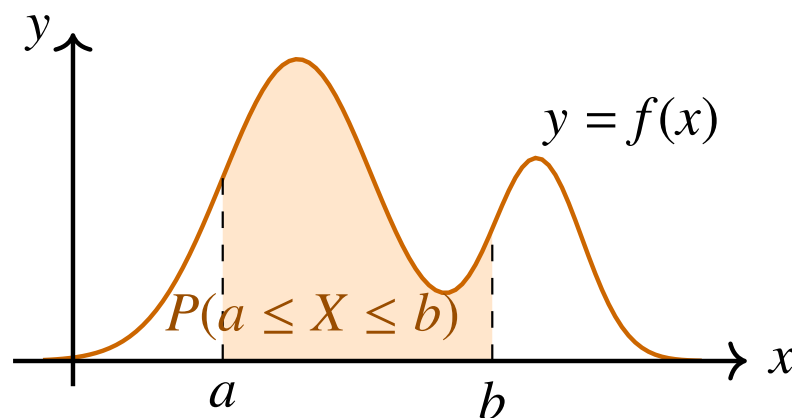
Definíció: Sűrűségfüggvény

Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **sűrűségfüggvény**, ha

$$f(x) \geq 0 \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Az X folytonos valószínűségi változó **valószínűsége** egy $[a, b]$ intervallumon:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$



Megjegyzés. A normalizálási feltétel ($\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$) egy improprius integrál.

Folytonos valószínűségi változó

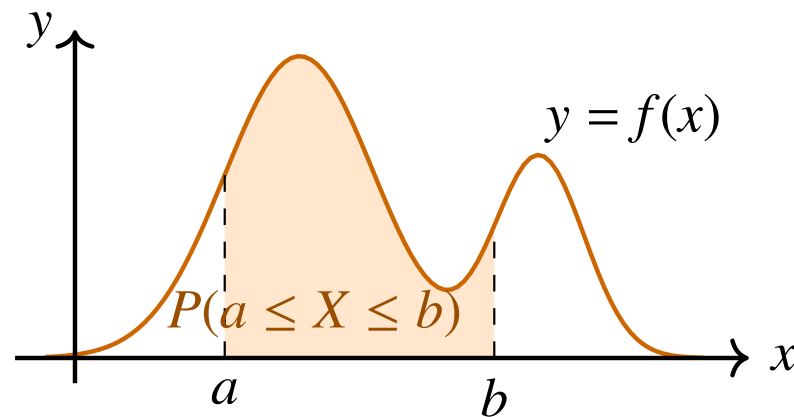
Definíció: Sűrűségfüggvény

Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **sűrűségfüggvény**, ha

$$f(x) \geq 0 \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Az X folytonos valószínűségi változó **valószínűsége** egy $[a, b]$ intervallumon:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$



Megjegyzés. A normalizálási feltétel ($\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$) egy improprius integrál.

Várható érték és szórásnégyzet

Definíció

Legyen X folytonos valószínűségi változó f sűrűségfüggvénnyel.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (\text{várható érték}),$$

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, \quad (\text{szórásnégyzet, variancia}),$$

ahol $\mu = E[X]$. A **szórás**: $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Fizikai analógia:

- $E[X]$: az f sűrűséggel elosztott tömeg súlypontja.
- $\text{Var}(X)$: a súlyponttól való tehetetlenségi nyomaték.

Várható érték és szórásnégyzet

Definíció

Legyen X folytonos valószínűségi változó f sűrűségfüggvénnyel.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (\text{várható érték}),$$

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, \quad (\text{szórásnégyzet, variancia}),$$

ahol $\mu = E[X]$. A **szórás**: $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Fizikai analógia:

- $E[X]$: az f sűrűséggel elosztott tömeg **súlypontja**.
- $\text{Var}(X)$: a súlyponttól való **tehetetlenségi nyomaték**.

Várható érték és szórásnégyzet

Definíció

Legyen X folytonos valószínűségi változó f sűrűségfüggvénnyel.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (\text{várható érték}),$$

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, \quad (\text{szórásnégyzet, variancia}),$$

ahol $\mu = E[X]$. A **szórás**: $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Fizikai analógia:

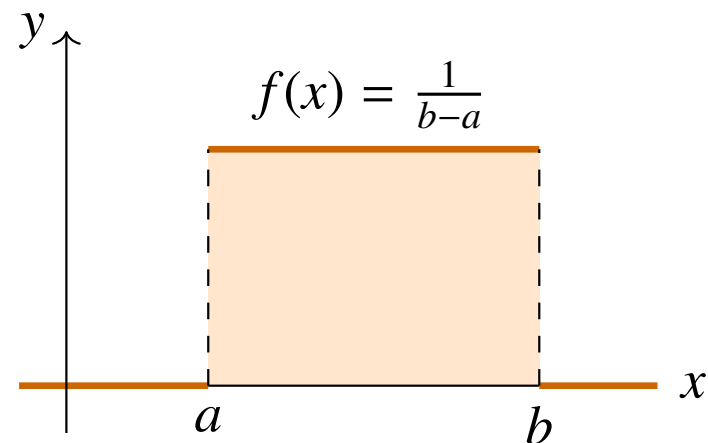
- $E[X]$: az f sűrűséggel elosztott tömeg **súlypontja**.
- $\text{Var}(X)$: a súlyponttól való **tehetetlenségi nyomaték**.

Az egyenletes eloszlás $\mathcal{U}(a, b)$

Definíció

Az **egyenletes eloszlás** sűrűségfüggvénye az $[a, b]$ -n:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } x \in [a, b], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Várható érték és szórásnégyzet:

$$E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - \mu^2 = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Alkalmazások informatikában:

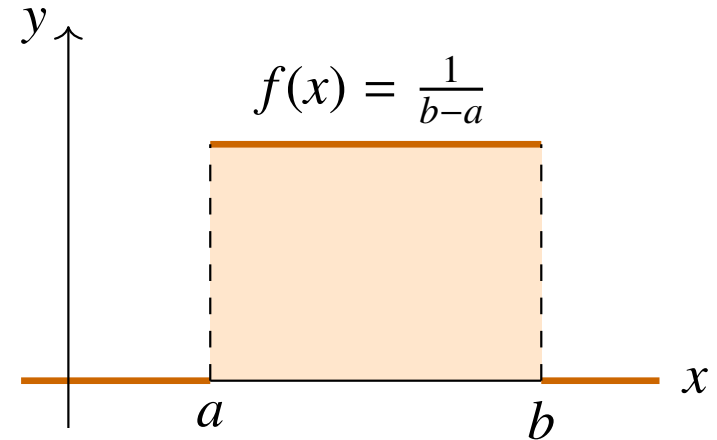
- Véletlenszám-generátorok alapeloszlása, hash függvények.

Az egyenletes eloszlás $\mathcal{U}(a, b)$

Definíció

Az **egyenletes eloszlás** sűrűségfüggvénye az $[a, b]$ -n:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } x \in [a, b], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Várható érték és szórásnégyzet:

$$E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - \mu^2 = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Alkalmazások informatikában:

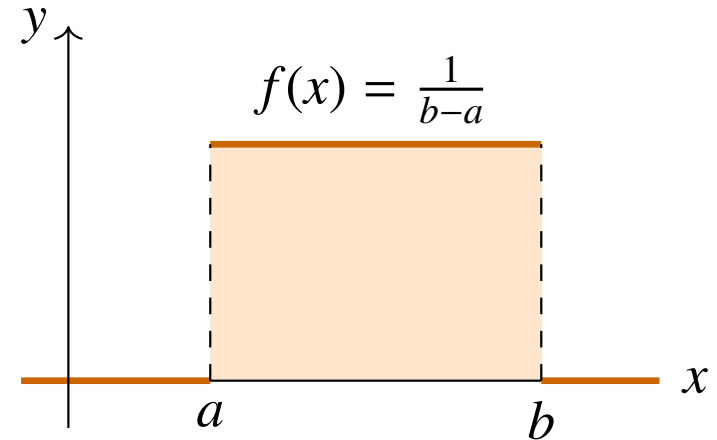
- Véletlenszám-generátorok alapeloszlása, hash függvények.

Az egyenletes eloszlás $\mathcal{U}(a, b)$

Definíció

Az **egyenletes eloszlás** sűrűségfüggvénye az $[a, b]$ -n:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } x \in [a, b], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$



Várható érték és szórásnégyzet:

$$E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - \mu^2 = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Alkalmazások informatikában:

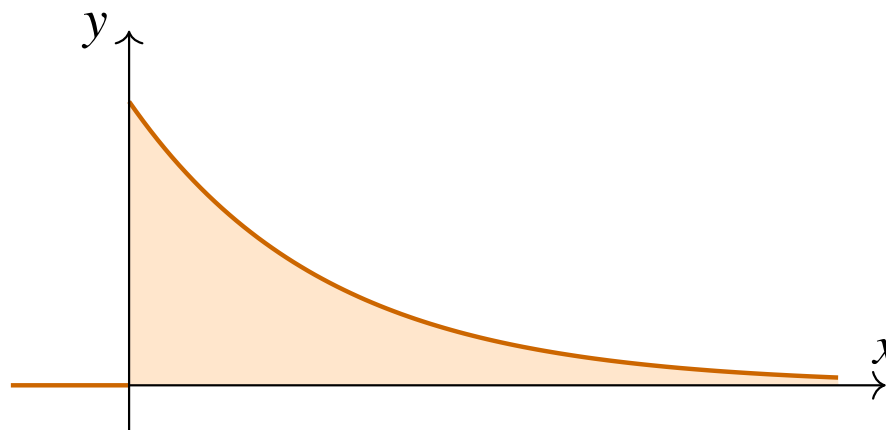
- Véletlenszám-generátorok alapeloszlása, hash függvények.

Az exponenciális eloszlás $\text{Exp}(\lambda)$

Definíció

Az **exponenciális eloszlás** sűrűségfüggvénye ($\lambda > 0$):

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



Normalitás ellenőrzése:

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1. \checkmark$$

Várható érték és szórásnégyzet (részleges integrálással):

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Alkalmazások informatikában:

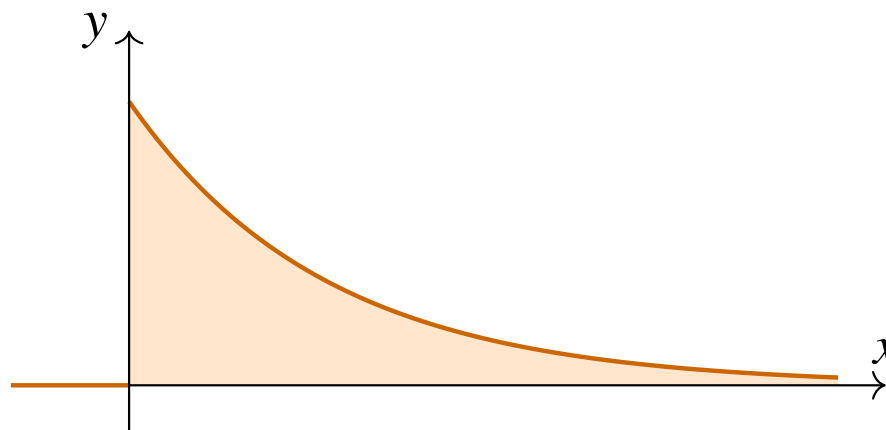
- Szerver válaszideje, hálózati csomagok érkezése közötti idő.
- Memória nélküliség (Markov-tulajdonság).

Az exponenciális eloszlás $\text{Exp}(\lambda)$

Definíció

Az **exponenciális eloszlás** sűrűségfüggvénye ($\lambda > 0$):

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



Normalitás ellenőrzése:

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1. \checkmark$$

Várható érték és szórásnégyzet (részleges integrálással):

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Alkalmazások informatikában:

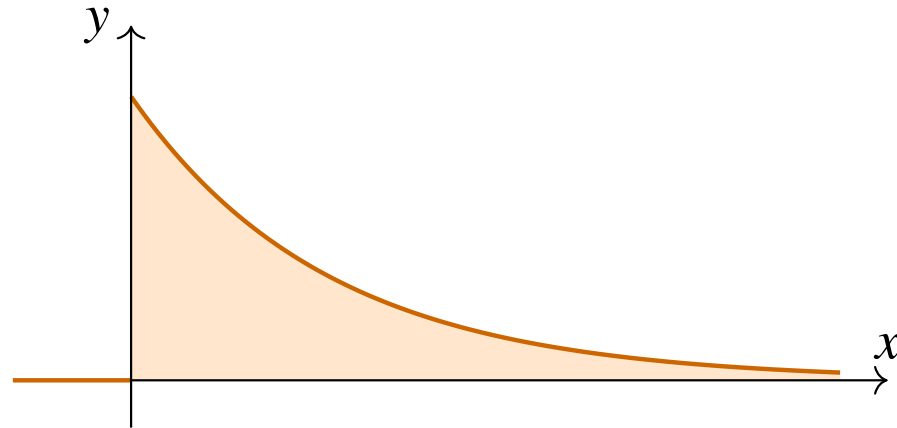
- Szerver válaszideje, hálózati csomagok érkezése közötti idő.
- Memória nélküliség (Markov-tulajdonság).

Az exponenciális eloszlás $\text{Exp}(\lambda)$

Definíció

Az **exponenciális eloszlás** sűrűségfüggvénye ($\lambda > 0$):

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



Normalitás ellenőrzése:

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1. \checkmark$$

Várható érték és szórásnégyzet (részleges integrálással):

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Alkalmazások informatikában:

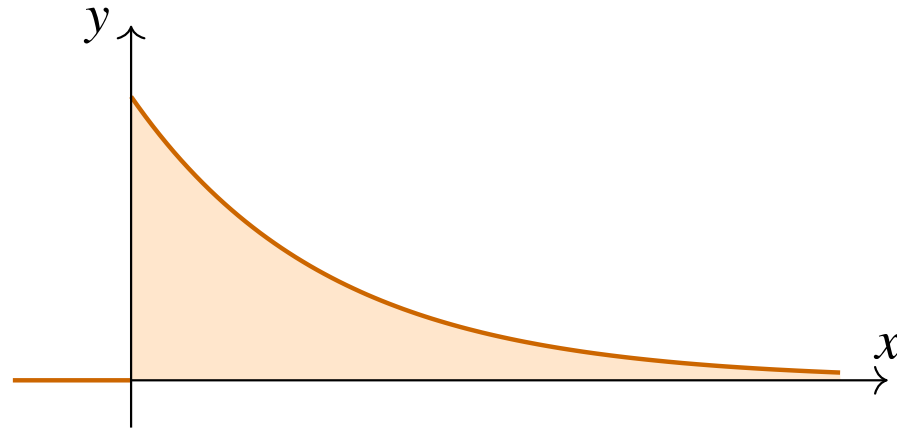
- Szerver válaszideje, hálózati csomagok érkezése közötti idő.
- Memória nélküliség (Markov-tulajdonság).

Az exponenciális eloszlás $\text{Exp}(\lambda)$

Definíció

Az **exponenciális eloszlás** sűrűségfüggvénye ($\lambda > 0$):

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



Normalitás ellenőrzése:

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1. \checkmark$$

Várható érték és szórásnégyzet (részleges integrálással):

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Alkalmazások informatikában:

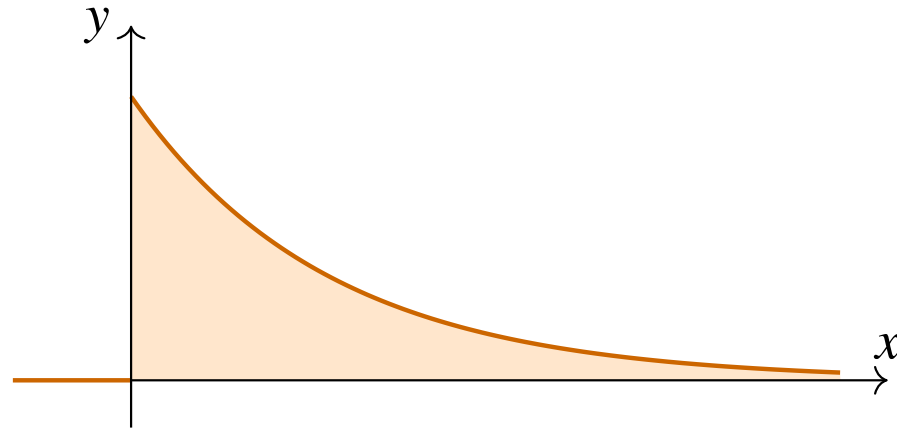
- Szerver válaszideje, hálózati csomagok érkezése közötti idő.
- Memória nélküliség (Markov-tulajdonság).

Az exponenciális eloszlás $\text{Exp}(\lambda)$

Definíció

Az **exponenciális eloszlás** sűrűségfüggvénye ($\lambda > 0$):

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$



Normalitás ellenőrzése:

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1. \checkmark$$

Várható érték és szórásnégyzet (részleges integrálással):

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Alkalmazások informatikában:

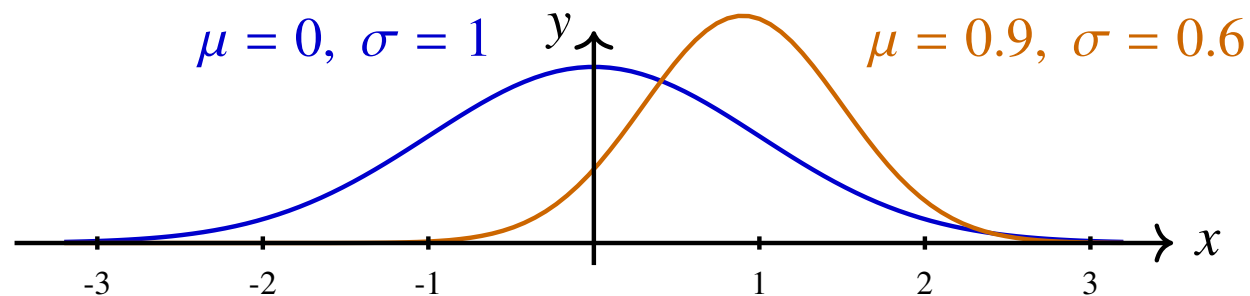
- Szerver válaszideje, hálózati csomagok érkezése közötti idő.
- **Memória nélküliség** (Markov-tulajdonság).

A normális eloszlás $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Definíció

A **normálisan eloszlás** sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$



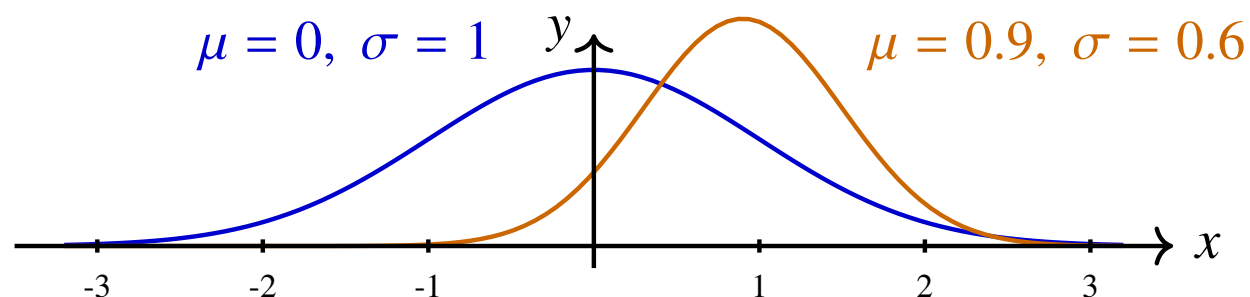
- A valószínűesszámítás és a statisztika egyik legfontosabb eloszlása.
- A μ paraméter a **várható érték**, a σ^2 pedig a **szórásnégyzet**.
- A normalizálási konstans ($1/(\sigma \sqrt{2\pi})$) biztosítja, hogy f sűrűségfüggvény legyen.
- $e^{-x^2/2}$ -nek nincs elemi primitív függvénye.

A normális eloszlás $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Definíció

A **normálisan eloszlás** sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$



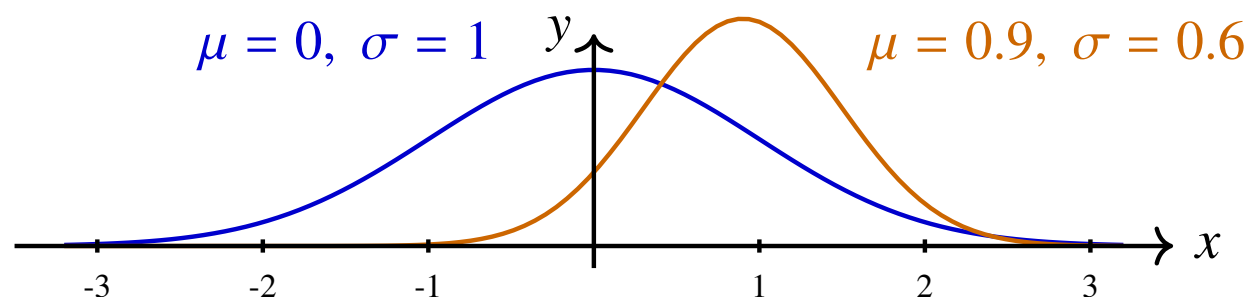
- A valószínűségszámítás és a statisztika egyik legfontosabb eloszlása.
- A μ paraméter a **várható érték**, a σ^2 pedig a **szórásnégyzet**.
- A normalizálási konstans ($1/(\sigma \sqrt{2\pi})$) biztosítja, hogy f sűrűségfüggvény legyen.
- $e^{-x^2/2}$ -nek nincs elemi primitív függvénye.

A normális eloszlás $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Definíció

A **normálisan eloszlás** sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$



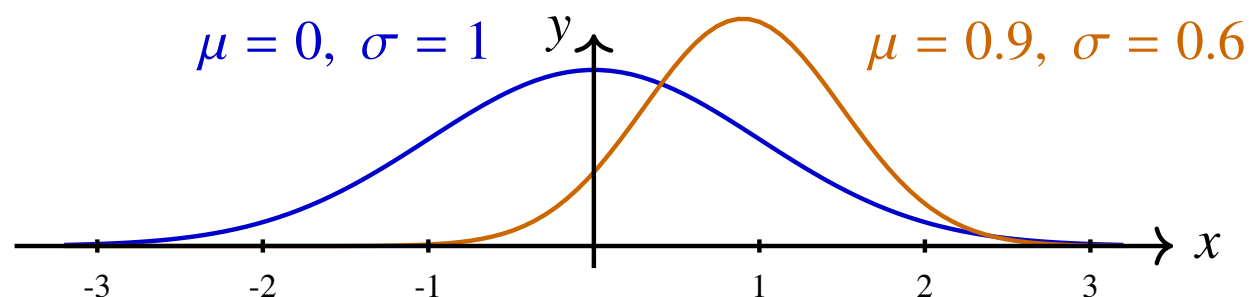
- A valószínűesszámítás és a statisztika egyik legfontosabb eloszlása.
- A μ paraméter a **várható érték**, a σ^2 pedig a **szórásnégyzet**.
- A normalizálási konstans ($1/(\sigma \sqrt{2\pi})$) biztosítja, hogy f sűrűségfüggvény legyen.
- $e^{-x^2/2}$ -nek nincs elemi primitív függvénye.

A normális eloszlás $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Definíció

A **normálisan eloszlás** sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$



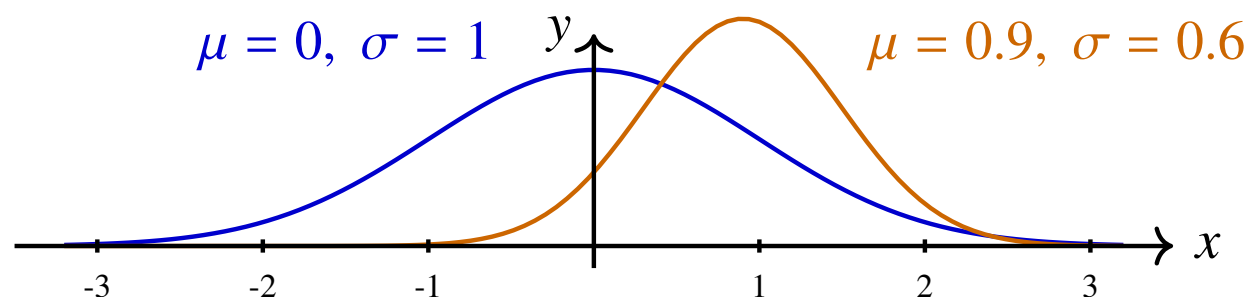
- A valószínűségszámítás és a statisztika egyik legfontosabb eloszlása.
- A μ paraméter a **várható érték**, a σ^2 pedig a **szórásnégyzet**.
- A normalizálási konstans ($1/(\sigma \sqrt{2\pi})$) biztosítja, hogy f sűrűségfüggvény legyen.
- $e^{-x^2/2}$ -nek nincs elemi primitív függvénye.

A normális eloszlás $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Definíció

A **normálisan eloszlás** sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$



- A valószínűségszámítás és a statisztika egyik legfontosabb eloszlása.
- A μ paraméter a **várható érték**, a σ^2 pedig a **szórásnégyzet**.
- A normalizálási konstans ($1/(\sigma \sqrt{2\pi})$) biztosítja, hogy f sűrűségfüggvény legyen.
- $e^{-x^2/2}$ -nek nincs elemi primitív függvénye.

Köszönöm a figyelmet!