

Integrálszámítás (5. hét)

Matematika informatikusoknak 2

Nagy Gábor Péter

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

2025/2026-os tanév II. féléve

Tagolás

- 1 Közelítés véges összegekkel
- 2 A véges összegek határértéke és a szumma jel
- 3 A határozott integrál
- 4 Newton–Leibniz-tétel (az analízis alaptétele)
- 5 A határozatlan integrál és a helyettesítési szabály

Tagolás

- 1 Közelítés véges összegekkel
- 2 A véges összegek határértéke és a szumma jel
- 3 A határozott integrál
- 4 Newton–Leibniz-tétel (az analízis alaptétele)
- 5 A határozatlan integrál és a helyettesítési szabály

Motiváció: görbe alatti terület

Kérdés: Hogyan mérjük meg egy $f(x) \geq 0$ függvény görbéje alatt, az $[a, b]$ intervallumon lévő területet?



Egyszerű esetek:

1. Tegyük fel, hogy $f(x) = 1$.

2. Tegyük fel, hogy $f(x) = x$.

3. Tegyük fel, hogy $f(x) = x^2$.

Általános esetben:

1. Tegyük fel, hogy $f(x)$ egy polinom.

Össz. Közelítsük a területet

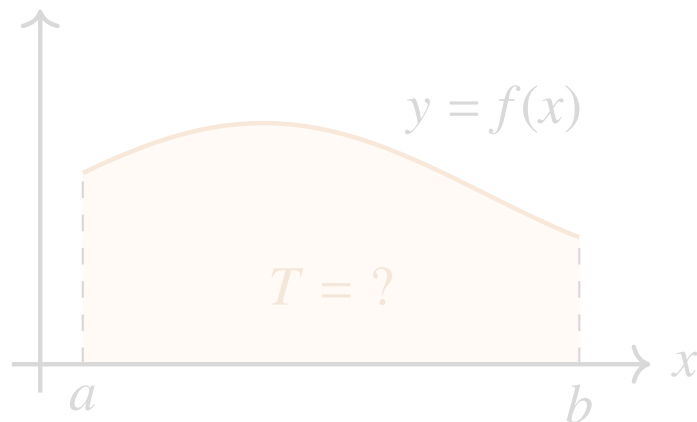
teglalapok összegével, majd

formáljuk a formulát.

Megjegyzés. Ez az ötlet az ókori görögöktől (Archimédész *exhaustiós módszere*) ered, de pontos matematikai alapja csak a 17. század végén született meg (Newton 1643-1727, Leibniz 1646-1716).

Motiváció: görbe alatti terület

Kérdés: Hogyan mérjük meg egy $f(x) \geq 0$ függvény görbéje alatt, az $[a, b]$ intervallumon lévő területet?



Egyszerű esetek:

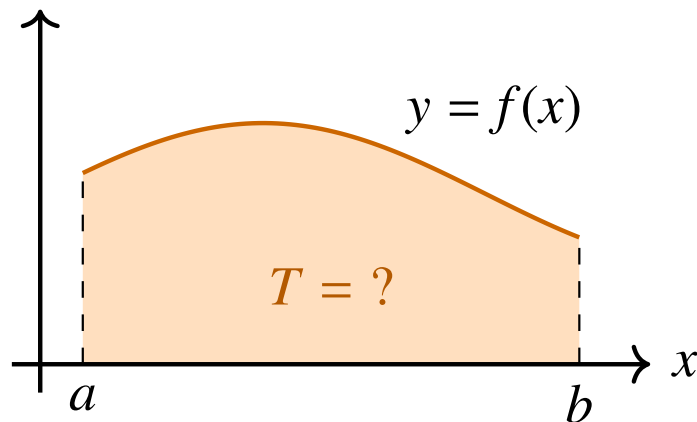
- Téglalap: $T = \text{alap} \times \text{magasság}$.
- Háromszög, trapéz: elemi képletek.
- Általános görbe: **nincs** közvetlen képlet.

Ötlet: Közelítsük a területet téglalapok összegével, majd finomítsuk a felosztást.

Megjegyzés. Ez az ötlet az ókori görögöktől (Archimédész *exhaustiós módszere*) ered, de pontos matematikai alapja csak a 17. század végén született meg (Newton 1643-1727, Leibniz 1646-1716).

Motiváció: görbe alatti terület

Kérdés: Hogyan mérjük meg egy $f(x) \geq 0$ függvény görbéje alatt, az $[a, b]$ intervallumon lévő területet?



Egyszerű esetek:

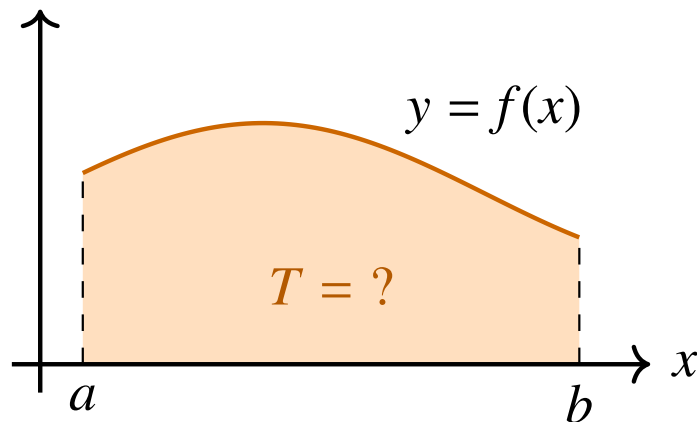
- Téglalap: $T = \text{alap} \times \text{magasság}$.
- Háromszög, trapéz: elemi képletek.
- Általános görbe: **nincs** közvetlen képlet.

Ötlet: Közelítsük a területet téglalapok összegével, majd finomítsuk a felosztást.

Megjegyzés. Ez az ötlet az ókori görögöktől (Archimédész *exhaustiós módszere*) ered, de pontos matematikai alapja csak a 17. század végén született meg (Newton 1643-1727, Leibniz 1646-1716).

Motiváció: görbe alatti terület

Kérdés: Hogyan mérjük meg egy $f(x) \geq 0$ függvény görbéje alatt, az $[a, b]$ intervallumon lévő területet?



Egyszerű esetek:

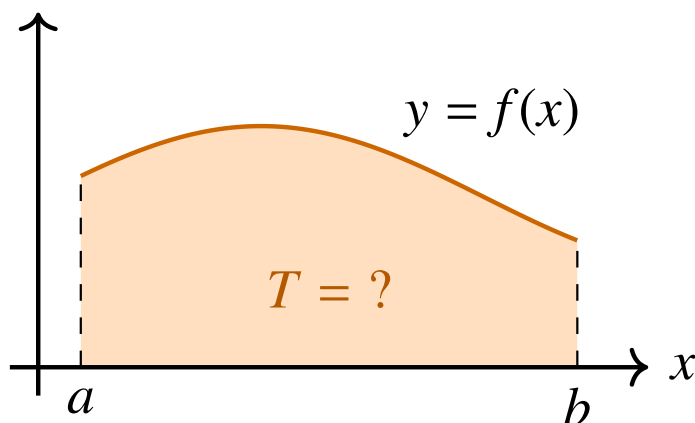
- Téglalap: $T = \text{alap} \times \text{magasság}$.
- Háromszög, trapéz: elemi képletek.
- Általános görbe: **nincs közvetlen képlet.**

Ötlet: Közelítsük a területet **téglalapok összegével**, majd finomítsuk a felosztást.

Megjegyzés. Ez az ötlet az ókori görögöktől (Archimédész *exhaustiós módszere*) ered, de pontos matematikai alapja csak a 17. század végén született meg (Newton 1643-1727, Leibniz 1646-1716).

Motiváció: görbe alatti terület

Kérdés: Hogyan mérjük meg egy $f(x) \geq 0$ függvény görbéje alatt, az $[a, b]$ intervallumon lévő területet?



Egyszerű esetek:

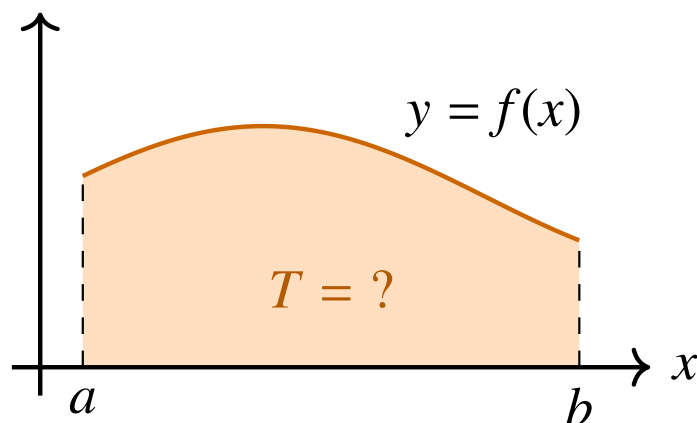
- Téglalap: $T = \text{alap} \times \text{magasság}$.
- Háromszög, trapéz: elemi képletek.
- Általános görbe: **nincs közvetlen képlet.**

Ötlet: Közelítsük a területet téglalapok összegével, majd finomítsuk a felosztást.

Megjegyzés. Ez az ötlet az ókori görögöktől (Archimédész *exhaustiós módszere*) ered, de pontos matematikai alapja csak a 17. század végén született meg (Newton 1643-1727, Leibniz 1646-1716).

Motiváció: görbe alatti terület

Kérdés: Hogyan mérjük meg egy $f(x) \geq 0$ függvény görbéje alatt, az $[a, b]$ intervallumon lévő területet?



Egyszerű esetek:

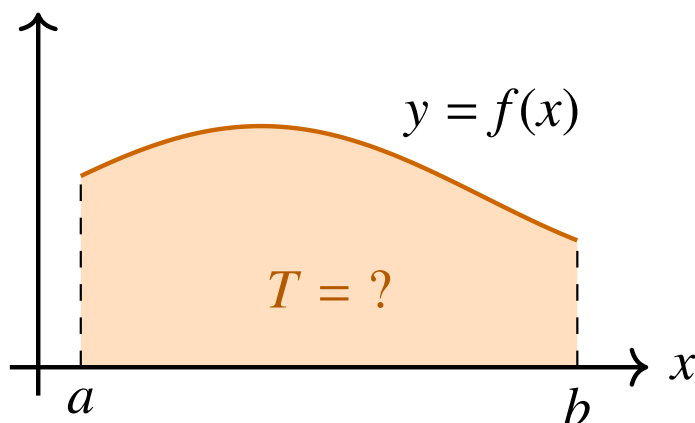
- Téglalap: $T = \text{alap} \times \text{magasság}$.
- Háromszög, trapéz: elemi képletek.
- Általános görbe: **nincs közvetlen képlet.**

Ötlet: Közelítsük a területet téglalapok összegével, majd finomítsuk a felosztást.

Megjegyzés. Ez az ötlet az ókori görögöktől (Archimédész *exhaustiós módszere*) ered, de pontos matematikai alapja csak a 17. század végén született meg (Newton 1643-1727, Leibniz 1646-1716).

Motiváció: görbe alatti terület

Kérdés: Hogyan mérjük meg egy $f(x) \geq 0$ függvény görbéje alatt, az $[a, b]$ intervallumon lévő területet?



Egyszerű esetek:

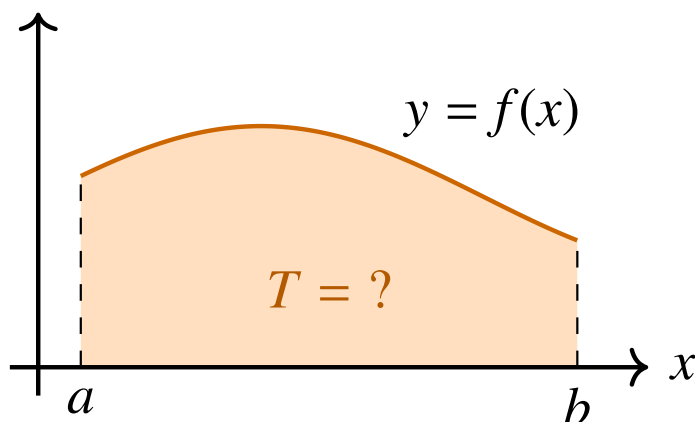
- Téglalap: $T = \text{alap} \times \text{magasság}$.
- Háromszög, trapéz: elemi képletek.
- Általános görbe: **nincs közvetlen képlet.**

Ötlet: Közelítsük a területet téglalapok összegével, majd finomítsuk a felosztást.

Megjegyzés. Ez az ötlet az ókori görögöktől (Archimédész *exhaustiós módszere*) ered, de pontos matematikai alapja csak a 17. század végén született meg (Newton 1643-1727, Leibniz 1646-1716).

Motiváció: görbe alatti terület

Kérdés: Hogyan mérjük meg egy $f(x) \geq 0$ függvény görbéje alatt, az $[a, b]$ intervallumon lévő területet?



Egyszerű esetek:

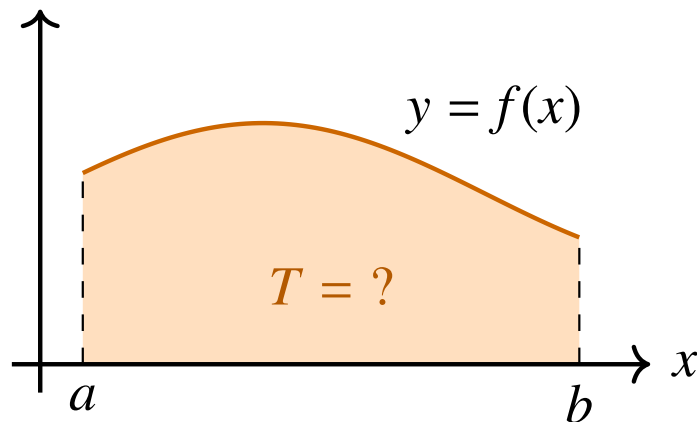
- Téglalap: $T = \text{alap} \times \text{magasság}$.
- Háromszög, trapéz: elemi képletek.
- Általános görbe: **nincs közvetlen képlet.**

Ötlet: Közelítsük a területet **téglalapok összegével**, majd finomítsuk a felosztást.

Megjegyzés. Ez az ötlet az ókori görögöktől (Archimédész *exhaustiós módszere*) ered, de pontos matematikai alapja csak a 17. század végén született meg (Newton 1643-1727, Leibniz 1646-1716).

Motiváció: görbe alatti terület

Kérdés: Hogyan mérjük meg egy $f(x) \geq 0$ függvény görbéje alatt, az $[a, b]$ intervallumon lévő területet?



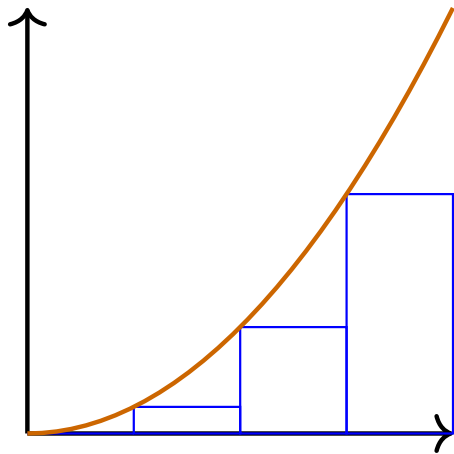
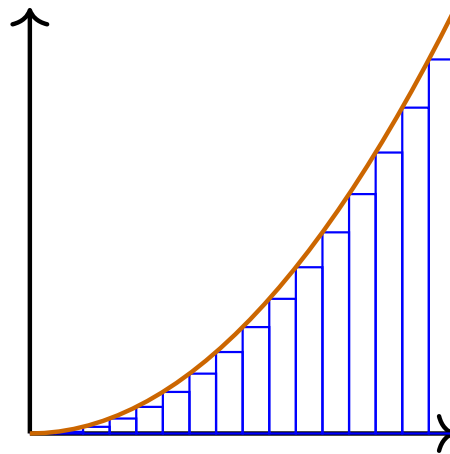
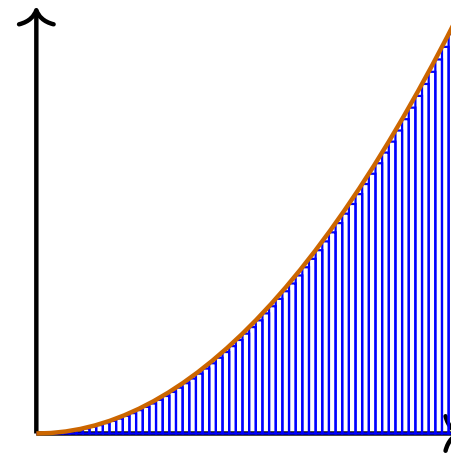
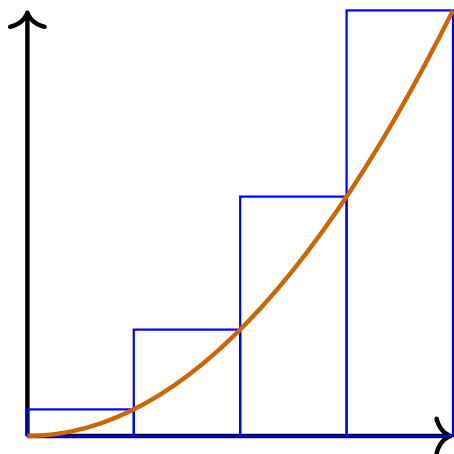
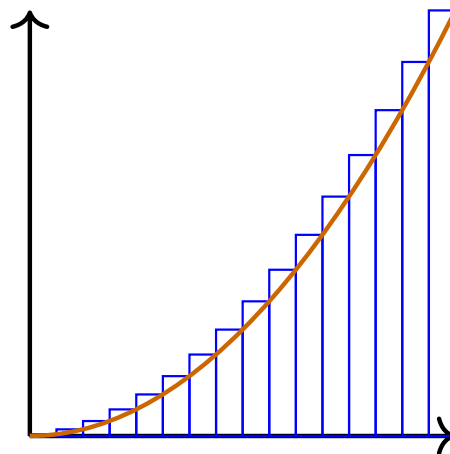
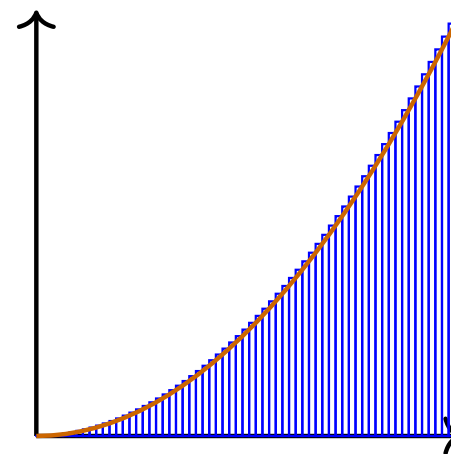
Egyszerű esetek:

- Téglalap: $T = \text{alap} \times \text{magasság}$.
- Háromszög, trapéz: elemi képletek.
- Általános görbe: **nincs közvetlen képlet.**

Ötlet: Közelítsük a területet **téglalapok összegével**, majd finomítsuk a felosztást.

Megjegyzés. Ez az ötlet az ókori görögöktől (Archimédész *exhaustiós módszere*) ered, de pontos matematikai alapja csak a 17. század végén született meg (Newton 1643-1727, Leibniz 1646-1716).

Görbe alatti terület alsó és felső közelítő összegekkel

 $n = 4$  $n = 16$  $n = 64$  $n = 4$  $n = 16$  $n = 64$

Felosztás és jelölések

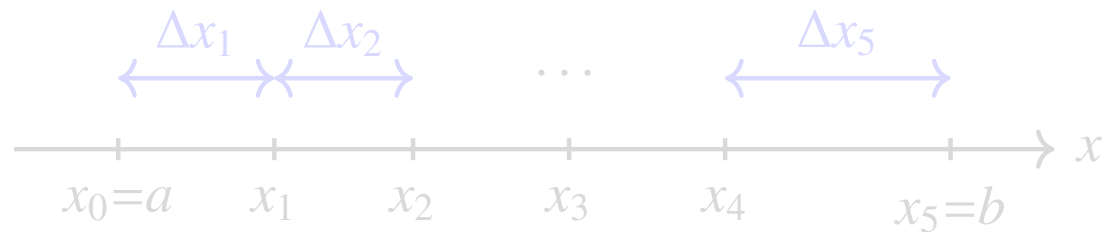
Definíció: Felosztás

Az $[a, b]$ intervallum egy **felosztása** az

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

pontok halmaza. A k -adik részintervallum: $[x_{k-1}, x_k]$, hossza $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

A felosztás **finomsága** a leghosszabb részintervallum hossza: $\max_k \Delta x_k$.



Egyenletes felosztás (n egyenlő részre):

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k \cdot \Delta x, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Megjegyzés. Egyenletes felosztás finomsága $\|\mathcal{P}\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Felosztás és jelölések

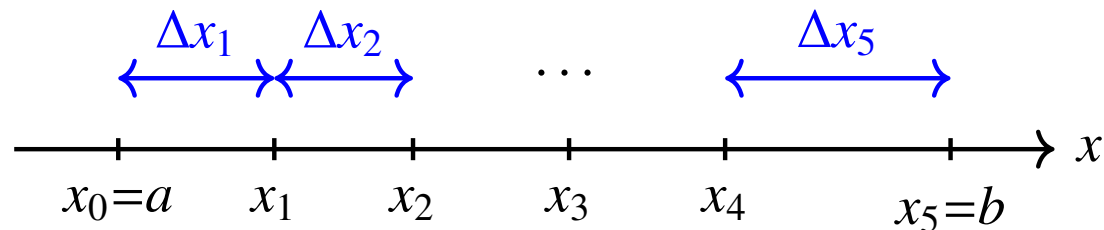
Definíció: Felosztás

Az $[a, b]$ intervallum egy **felosztása** az

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

pontok halmaza. A k -adik részintervallum: $[x_{k-1}, x_k]$, hossza $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

A felosztás **finomsága** a leghosszabb részintervallum hossza: $\max_k \Delta x_k$.



Egyenletes felosztás (n egyenlő részre):

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k \cdot \Delta x, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Megjegyzés. Egyenletes felosztás finomsága $\|\mathcal{P}\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Felosztás és jelölések

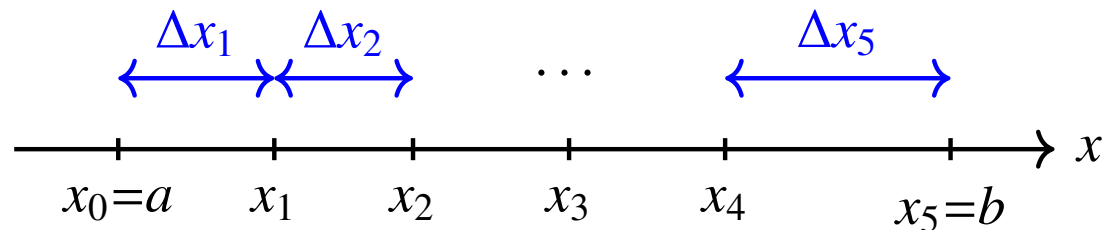
Definíció: Felosztás

Az $[a, b]$ intervallum egy **felosztása** az

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

pontok halmaza. A k -adik részintervallum: $[x_{k-1}, x_k]$, hossza $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

A felosztás **finomsága** a leghosszabb részintervallum hossza: $\max_k \Delta x_k$.



Egyenletes felosztás (n egyenlő részre):

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k \cdot \Delta x, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Megjegyzés. Egyenletes felosztás finomsága $\|\mathcal{P}\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Felosztás és jelölések

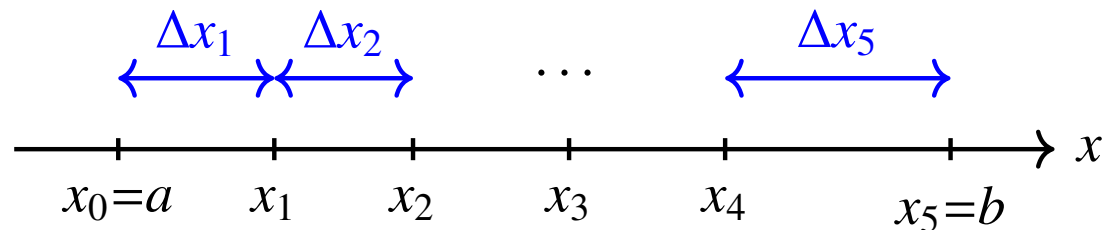
Definíció: Felosztás

Az $[a, b]$ intervallum egy **felosztása** az

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

pontok halmaza. A k -adik részintervallum: $[x_{k-1}, x_k]$, hossza $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

A felosztás **finomsága** a leghosszabb részintervallum hossza: $\max_k \Delta x_k$.



Egyenletes felosztás (n egyenlő részre):

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k \cdot \Delta x, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Megjegyzés. Egyenletes felosztás finomsága $\|\mathcal{P}\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Alsó és felső közelítő összegek definíciója

- Legyen f folytonos az $[a, b]$ -n.
- Legyen $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ egy felosztás.
- A k -adik részintervallumon legyen

$$m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Definíció: Alsó és felső összeg

$$s(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad (\text{alsó összeg}),$$

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad (\text{felső összeg}).$$

Minden felosztásra teljesül

$$s(\mathcal{P}, f) \leq T \leq S(\mathcal{P}, f).$$

Alsó és felső közelítő összegek definíciója

- Legyen f folytonos az $[a, b]$ -n.
- Legyen $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ egy felosztás.
- A k -adik részintervallumon legyen

$$m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Definíció: Alsó és felső összeg

$$s(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad (\text{alsó összeg}),$$

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad (\text{felső összeg}).$$

Minden felosztásra teljesül

$$s(\mathcal{P}, f) \leq T \leq S(\mathcal{P}, f).$$

Alsó és felső közelítő összegek definíciója

- Legyen f folytonos az $[a, b]$ -n.
- Legyen $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ egy felosztás.
- A k -adik részintervallumon legyen

$$m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Definíció: Alsó és felső összeg

$$s(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad (\text{alsó összeg}),$$

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad (\text{felső összeg}).$$

Minden felosztásra teljesül

$$s(\mathcal{P}, f) \leq T \leq S(\mathcal{P}, f).$$

Riemann-összeg

Az alsó és felső összeg között bármely **mintapont**-választás érvényes közelítést ad.

Definíció: Riemann-összeg

Legyen $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tetszőleges **mintapont** a k -adik részintervallumon. A

$$R(\mathcal{P}, f, \mathbf{c}) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

összeget **Riemann-összegnek** nevezzük.

Speciális mintapont-választások:

- **Bal végpont:** $c_k = x_{k-1} \Rightarrow$ bal oldali Riemann-összeg L_n .
- **Jobb végpont:** $c_k = x_k \Rightarrow$ jobb oldali Riemann-összeg R_n .
- **Felezőpont:** $c_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \Rightarrow$ középponti szabály M_n .

Minden felosztásra és mintapontválasztásra:

$$s(\mathcal{P}, f) \leq R(\mathcal{P}, f, \mathbf{c}) \leq S(\mathcal{P}, f).$$

Riemann-összeg

Az alsó és felső összeg között bármely **mintapont**-választás érvényes közelítést ad.

Definíció: Riemann-összeg

Legyen $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tetszőleges **mintapont** a k -adik részintervallumon. A

$$R(\mathcal{P}, f, \mathbf{c}) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

összeget **Riemann-összegnek** nevezzük.

Speciális mintapont-választások:

- **Bal végpont:** $c_k = x_{k-1} \Rightarrow$ bal oldali Riemann-összeg L_n .
- **Jobb végpont:** $c_k = x_k \Rightarrow$ jobb oldali Riemann-összeg R_n .
- **Felezőpont:** $c_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \Rightarrow$ középponti szabály M_n .

Minden felosztásra és mintapontválasztásra:

$$s(\mathcal{P}, f) \leq R(\mathcal{P}, f, \mathbf{c}) \leq S(\mathcal{P}, f).$$

Riemann-összeg

Az alsó és felső összeg között bármely **mintapont**-választás érvényes közelítést ad.

Definíció: Riemann-összeg

Legyen $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tetszőleges **mintapont** a k -adik részintervallumon. A

$$R(\mathcal{P}, f, \mathbf{c}) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

összeget **Riemann-összegnek** nevezzük.

Speciális mintapont-választások:

- **Bal végpont:** $c_k = x_{k-1} \Rightarrow$ bal oldali Riemann-összeg L_n .
- **Jobb végpont:** $c_k = x_k \Rightarrow$ jobb oldali Riemann-összeg R_n .
- **Felezőpont:** $c_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \Rightarrow$ középponti szabály M_n .

Minden felosztásra és mintapontválasztásra:

$$s(\mathcal{P}, f) \leq R(\mathcal{P}, f, \mathbf{c}) \leq S(\mathcal{P}, f).$$

Riemann-összeg

Az alsó és felső összeg között bármely **mintapont**-választás érvényes közelítést ad.

Definíció: Riemann-összeg

Legyen $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tetszőleges **mintapont** a k -adik részintervallumon. A

$$R(\mathcal{P}, f, \mathbf{c}) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

összeget **Riemann-összegnek** nevezzük.

Speciális mintapont-választások:

- **Bal végpont:** $c_k = x_{k-1} \Rightarrow$ bal oldali Riemann-összeg L_n .
- **Jobb végpont:** $c_k = x_k \Rightarrow$ jobb oldali Riemann-összeg R_n .
- **Felezőpont:** $c_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \Rightarrow$ középponti szabály M_n .

Minden felosztásra és mintapontválasztásra:

$$s(\mathcal{P}, f) \leq R(\mathcal{P}, f, \mathbf{c}) \leq S(\mathcal{P}, f).$$

Riemann-összeg

Az alsó és felső összeg között bármely **mintapont**-választás érvényes közelítést ad.

Definíció: Riemann-összeg

Legyen $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tetszőleges **mintapont** a k -adik részintervallumon. A

$$R(\mathcal{P}, f, \mathbf{c}) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

összeget **Riemann-összegnek** nevezzük.

Speciális mintapont-választások:

- **Bal végpont:** $c_k = x_{k-1} \Rightarrow$ bal oldali Riemann-összeg L_n .
- **Jobb végpont:** $c_k = x_k \Rightarrow$ jobb oldali Riemann-összeg R_n .
- **Felezőpont:** $c_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \Rightarrow$ középponti szabály M_n .

Minden felosztásra és mintapontválasztásra:

$$s(\mathcal{P}, f) \leq R(\mathcal{P}, f, \mathbf{c}) \leq S(\mathcal{P}, f).$$

Riemann-összeg

Az alsó és felső összeg között bármely **mintapont**-választás érvényes közelítést ad.

Definíció: Riemann-összeg

Legyen $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tetszőleges **mintapont** a k -adik részintervallumon. A

$$R(\mathcal{P}, f, \mathbf{c}) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

összeget **Riemann-összegnek** nevezzük.

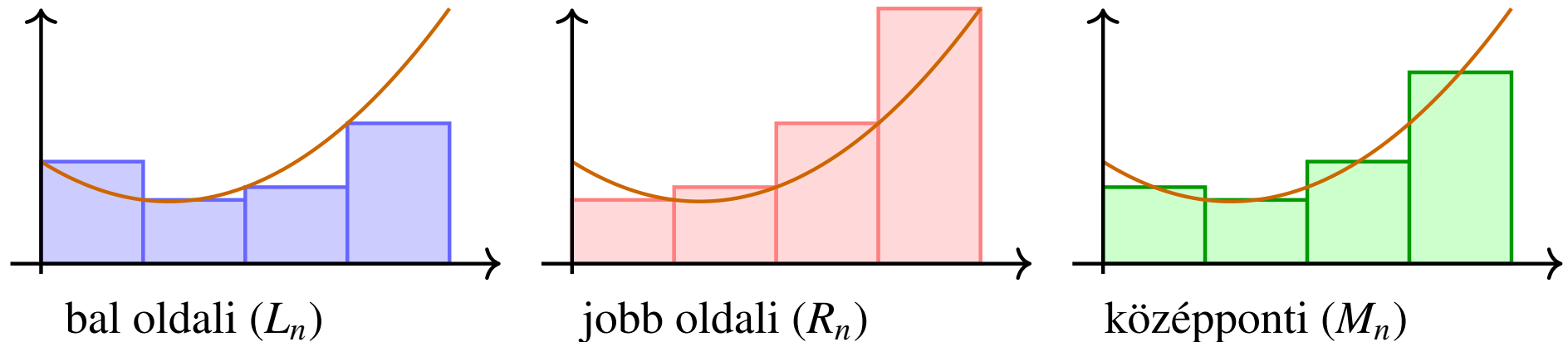
Speciális mintapont-választások:

- **Bal végpont:** $c_k = x_{k-1} \Rightarrow$ bal oldali Riemann-összeg L_n .
- **Jobb végpont:** $c_k = x_k \Rightarrow$ jobb oldali Riemann-összeg R_n .
- **Felezőpont:** $c_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \Rightarrow$ középponti szabály M_n .

Minden felosztásra és mintapontválasztásra:

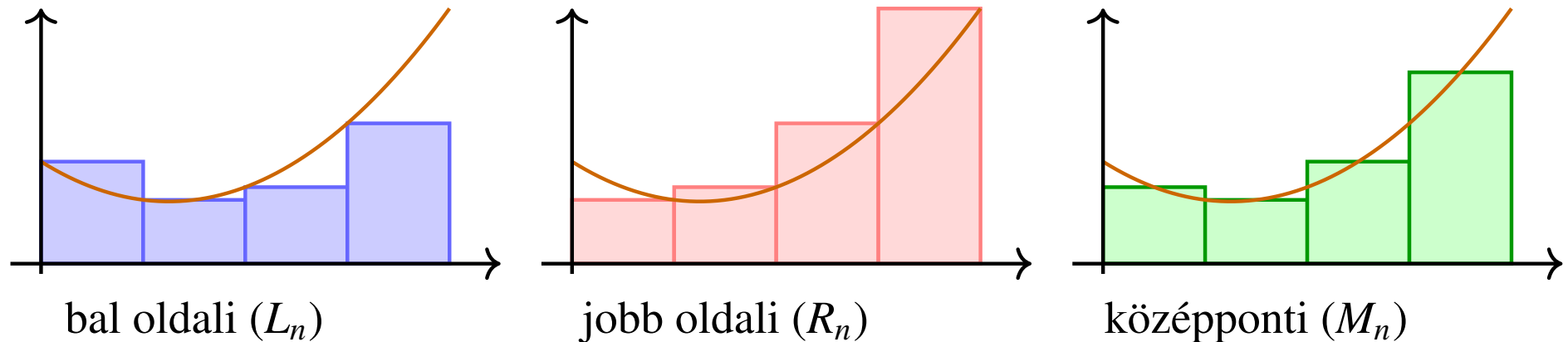
$$s(\mathcal{P}, f) \leq R(\mathcal{P}, f, \mathbf{c}) \leq S(\mathcal{P}, f).$$

Bal, jobb és középponti Riemann-összeg szemléltetése



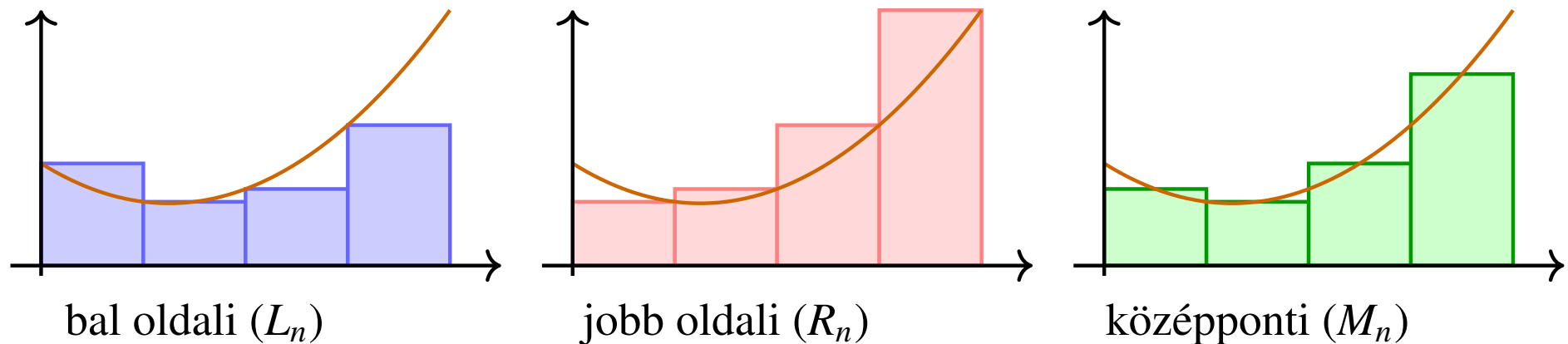
- A három módszer közül a **középponti szabály** általában a legpontosabb.
- A téglalap felső éle metszi a görbét, ezért a túl- és alulbecslések **részben kiejtik egymást**.
- **Monoton növő** függvény esetén a bal oldali Riemann-összeg az alsó összeg, a jobb oldali Riemann-összeg a felső összeg.

Bal, jobb és középponti Riemann-összeg szemléltetése



- A három módszer közül a **középponti szabály** általában a legpontosabb.
- A téglalap felső éle metszi a görbét, ezért a túl- és alulbecslések **részben kiejtik egymást**.
- Monoton növő függvény esetén a bal oldali Riemann-összeg az alsó összeg, a jobb oldali Riemann-összeg a felső összeg.

Bal, jobb és középponti Riemann-összeg szemléltetése



- A három módszer közül a **középponti szabály** általában a legpontosabb.
- A téglalap felső éle metszi a görbét, ezért a túl- és alulbecslések **részben kiejtik egymást**.
- **Monoton növő** függvény esetén a bal oldali Riemann-összeg az alsó összeg, a jobb oldali Riemann-összeg a felső összeg.

Kidolgozott példa: $f(x) = x^2$ a $[0, 1]$ -en

Feladat

Közelítsük az $f(x) = x^2$ görbe alatti területet a $[0, 1]$ intervallumon, egyenletes n -résztre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$, $c_k = x_k = \frac{k}{n}$.
- Függvényértékek: $f(c_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^2}$.
- Jobb oldali Riemann-összeg: $R_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \Delta x = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$.
- A négyzetszámok összege: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Eredmény: $R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.
- Határérték: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}$.

Kidolgozott példa: $f(x) = x^2$ a $[0, 1]$ -en

Feladat

Közelítsük az $f(x) = x^2$ görbe alatti területet a $[0, 1]$ intervallumon, egyenletes n -résztre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$, $c_k = x_k = \frac{k}{n}$.
- Függvényértékek: $f(c_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^2}$.
- Jobb oldali Riemann-összeg: $R_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \Delta x = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$.
- A négyzetszámok összege: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Eredmény: $R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.
- Határérték: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}$.

Kidolgozott példa: $f(x) = x^2$ a $[0, 1]$ -en

Feladat

Közelítsük az $f(x) = x^2$ görbe alatti területet a $[0, 1]$ intervallumon, egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$, $c_k = x_k = \frac{k}{n}$.
- Függvényértékek: $f(c_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^2}$.
- Jobb oldali Riemann-összeg: $R_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \Delta x = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$.
- A négyzetszámok összege: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Eredmény: $R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.
- Határérték: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}$.

Kidolgozott példa: $f(x) = x^2$ a $[0, 1]$ -en

Feladat

Közelítsük az $f(x) = x^2$ görbe alatti területet a $[0, 1]$ intervallumon, egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$, $c_k = x_k = \frac{k}{n}$.
- Függvényértékek: $f(c_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^2}$.
- Jobb oldali Riemann-összeg: $R_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \Delta x = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$.
- A négyzetszámok összege: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Eredmény: $R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.
- Határérték: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}$.

Kidolgozott példa: $f(x) = x^2$ a $[0, 1]$ -en

Feladat

Közelítsük az $f(x) = x^2$ görbe alatti területet a $[0, 1]$ intervallumon, egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$, $c_k = x_k = \frac{k}{n}$.
- Függvényértékek: $f(c_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^2}$.
- Jobb oldali Riemann-összeg: $R_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \Delta x = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$.
- A négyzetszámok összege: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Eredmény: $R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.
- Határérték: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}$.

Kidolgozott példa: $f(x) = x^2$ a $[0, 1]$ -en

Feladat

Közelítsük az $f(x) = x^2$ görbe alatti területet a $[0, 1]$ intervallumon, egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$, $c_k = x_k = \frac{k}{n}$.
- Függvényértékek: $f(c_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^2}$.
- Jobb oldali Riemann-összeg: $R_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \Delta x = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$.
- A négyzetszámok összege: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Eredmény: $R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.
- Határérték: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}$.

Kidolgozott példa: $f(x) = x^2$ a $[0, 1]$ -en

Feladat

Közelítsük az $f(x) = x^2$ görbe alatti területet a $[0, 1]$ intervallumon, egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$, $c_k = x_k = \frac{k}{n}$.
- Függvényértékek: $f(c_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^2}$.
- Jobb oldali Riemann-összeg: $R_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \Delta x = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$.
- A négyzetszámok összege: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Eredmény: $R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.
- Határérték: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}$.

A finomítás hatása

Minél több részre osztjuk az intervallumot, annál jobb a közelítés. Az $f(x) = x^2$, $[0, 1]$ példán:

n	L_n (bal)	R_n (jobb)	M_n (közép)
2	0,1250	0,6250	0,3125
4	0,2188	0,4688	0,3281
10	0,2850	0,3850	0,3325
100	0,3284	0,3384	0,3333
∞	$1/3 \approx 0,3333 \dots$		

- L_n alulról, R_n felülről közelíti a valódi értéket.
- Ennek az az oka, hogy f monoton növvő.
- M_n részben kiejtí a túl- és alulbecsléseket, ezért gyorsabban konvergál.

A finomítás hatása

Minél több részre osztjuk az intervallumot, annál jobb a közelítés. Az $f(x) = x^2$, $[0, 1]$ példán:

n	L_n (bal)	R_n (jobb)	M_n (közép)
2	0,1250	0,6250	0,3125
4	0,2188	0,4688	0,3281
10	0,2850	0,3850	0,3325
100	0,3284	0,3384	0,3333
∞	$1/3 \approx 0,3333 \dots$		

- L_n alulról, R_n felülről közelíti a valódi értéket.
- Ennek az az oka, hogy f monoton növvő.
- M_n részben kiejti a túl- és alulbecsléseket, ezért gyorsabban konvergál.

A finomítás hatása

Minél több részre osztjuk az intervallumot, annál jobb a közelítés. Az $f(x) = x^2$, $[0, 1]$ példán:

n	L_n (bal)	R_n (jobb)	M_n (közép)
2	0,1250	0,6250	0,3125
4	0,2188	0,4688	0,3281
10	0,2850	0,3850	0,3325
100	0,3284	0,3384	0,3333
∞	$1/3 \approx 0,3333 \dots$		

- L_n alulról, R_n felülről közelíti a valódi értéket.
- Ennek az az oka, hogy f monoton növvő.
- M_n részben kiejti a túl- és alulbecsléseket, ezért gyorsabban konvergál.

Összefoglalás és előrettekintés

Amit megtanultunk

- Görbe alatti terület közelíthető téglalapok összegével.
- Felosztás, mintapont, Riemann-összeg fogalma.
- Alsó összeg $\leq$ Riemann-összeg $\leq$ felső összeg.
- A felosztás finomításával ($n \rightarrow \infty$) a közelítés javul.

Nyitott kérdések

Következő lépések:

- 1 A véges összegek határértéke – a Σ -jelölés és a szummaképletek.
- 2 A határozott integrál – a Riemann-összeg határértékeként definiálva.
- 3 Newton–Leibniz-tétel – a deriválás és integrálás kapcsolata: a hatékony számítás kulcsa.

Összefoglalás és előrettekintés

Amit megtanultunk

- Görbe alatti terület közelíthető **téglalapok összegével**.
- Felosztás, mintapont, Riemann-összeg fogalma.
- Alsó összeg $\leq$ Riemann-összeg $\leq$ felső összeg.
- A felosztás finomításával ($n \rightarrow \infty$) a közelítés javul.

Nyitott kérdések

Következő lépések:

- 1 A véges összegek határértéke – a Σ -jelölés és a szummaképletek.
- 2 A határozott integrál – a Riemann-összeg határértékeként definiálva.
- 3 Newton–Leibniz-tétel – a deriválás és integrálás kapcsolata: a hatékony számítás kulcsa.

Összefoglalás és előrettekintés

Amit megtanultunk

- Görbe alatti terület közelíthető **téglalapok összegével**.
- **Felosztás, mintapont, Riemann-összeg** fogalma.
- Alsó összeg $\leq$ Riemann-összeg $\leq$ felső összeg.
- A felosztás finomításával ($n \rightarrow \infty$) a közelítés javul.

Nyitott kérdések

Következő lépések:

- 1 A véges összegek határértéke – a Σ -jelölés és a szummaképletek.
- 2 A határozott integrál – a Riemann-összeg határértékeként definiálva.
- 3 Newton–Leibniz-tétel – a deriválás és integrálás kapcsolata: a hatékony számítás kulcsa.

Összefoglalás és előretékinés

Amit megtanultunk

- Görbe alatti terület közelíthető **téglalapok összegével**.
- **Felosztás, mintapont, Riemann-összeg** fogalma.
- Alsó összeg $\leq$ Riemann-összeg $\leq$ felső összeg.
- A felosztás finomításával ($n \rightarrow \infty$) a közelítés javul.

Nyitott kérdések

Következő lépések:

- 1 A véges összegek határértéke – a Σ -jelölés és a szummaképletek.
- 2 A határozott integrál – a Riemann-összeg határértékeként definiálva.
- 3 Newton–Leibniz-tétel – a deriválás és integrálás kapcsolata: a hatékony számítás kulcsa.

Összefoglalás és előrettekintés

Amit megtanultunk

- Görbe alatti terület közelíthető **téglalapok összegével**.
- **Felosztás, mintapont, Riemann-összeg** fogalma.
- Alsó összeg $\leq$ Riemann-összeg $\leq$ felső összeg.
- A felosztás finomításával ($n \rightarrow \infty$) a közelítés javul.

Nyitott kérdések

Következő lépések:

- 1 A véges összegek határértéke – a Σ -jelölés és a szummaképletek.
- 2 A határozott integrál – a Riemann-összeg határértékeként definiálva.
- 3 Newton–Leibniz-tétel – a deriválás és integrálás kapcsolata: a hatékony számítás kulcsa.

Összefoglalás és előretékinés

Amit megtanultunk

- Görbe alatti terület közelíthető **téglalapok összegével**.
- **Felosztás, mintapont, Riemann-összeg** fogalma.
- Alsó összeg $\leq$ Riemann-összeg $\leq$ felső összeg.
- A felosztás finomításával ($n \rightarrow \infty$) a közelítés javul.

Nyitott kérdések

- Mikor konvergál a Riemann-összeg, és mi a határértéke?
- Hogyan számítható ki a határérték **téglalapok nélkül**, hatékonyan?

Következő lépések:

- 1 A véges összegek határértéke – a Σ -jelölés és a szummaképletek.
- 2 A határozott integrál – a Riemann-összeg határértékeként definiálva.
- 3 Newton–Leibniz-tétel – a deriválás és integrálás kapcsolata: a hatékony számítás kulcsa.

Összefoglalás és előrettekintés

Amit megtanultunk

- Görbe alatti terület közelíthető **téglalapok összegével**.
- **Felosztás, mintapont, Riemann-összeg** fogalma.
- Alsó összeg $\leq$ Riemann-összeg $\leq$ felső összeg.
- A felosztás finomításával ($n \rightarrow \infty$) a közelítés javul.

Nyitott kérdések

- Mikor konvergál a Riemann-összeg, és mi a határértéke?
- Hogyan számítható ki a határérték **téglalapok nélkül**, hatékonyan?

Következő lépések:

- 1 A véges összegek határértéke – a Σ -jelölés és a szummaképletek.
- 2 A határozott integrál – a Riemann-összeg határértékeként definiálva.
- 3 Newton–Leibniz-tétel – a deriválás és integrálás kapcsolata: a hatékony számítás kulcsa.

Összefoglalás és előretékinés

Amit megtanultunk

- Görbe alatti terület közelíthető **téglalapok összegével**.
- **Felosztás, mintapont, Riemann-összeg** fogalma.
- Alsó összeg $\leq$ Riemann-összeg $\leq$ felső összeg.
- A felosztás finomításával ($n \rightarrow \infty$) a közelítés javul.

Nyitott kérdések

- Mikor konvergál a Riemann-összeg, és mi a határértéke?
- Hogyan számítható ki a határérték **téglalapok nélkül**, hatékonyan?

Következő lépések:

- 1 A véges összegek határértéke – a Σ -jelölés és a szummaképletek.
- 2 A határozott integrál – a Riemann-összeg határértékeként definiálva.
- 3 Newton–Leibniz-tétel – a deriválás és integrálás kapcsolata: a hatékony számítás kulcsa.

Összefoglalás és előretékinés

Amit megtanultunk

- Görbe alatti terület közelíthető **téglalapok összegével**.
- **Felosztás, mintapont, Riemann-összeg** fogalma.
- Alsó összeg $\leq$ Riemann-összeg $\leq$ felső összeg.
- A felosztás finomításával ($n \rightarrow \infty$) a közelítés javul.

Nyitott kérdések

- Mikor konvergál a Riemann-összeg, és mi a határértéke?
- Hogyan számítható ki a határérték **téglalapok nélkül**, hatékonyan?

Következő lépések:

- 1 A véges összegek határértéke – a Σ -jelölés és a szummaképletek.
- 2 A határozott integrál – a Riemann-összeg határértékeként definiálva.
- 3 Newton–Leibniz-tétel – a deriválás és integrálás kapcsolata: a hatékony számítás kulcsa.

Összefoglalás és előretekintés

Amit megtanultunk

- Görbe alatti terület közelíthető **téglalapok összegével**.
- **Felosztás, mintapont, Riemann-összeg** fogalma.
- Alsó összeg $\leq$ Riemann-összeg $\leq$ felső összeg.
- A felosztás finomításával ($n \rightarrow \infty$) a közelítés javul.

Nyitott kérdések

- Mikor konvergál a Riemann-összeg, és mi a határértéke?
- Hogyan számítható ki a határérték **téglalapok nélkül**, hatékonyan?

Következő lépések:

- 1 A véges összegek határértéke – a Σ -jelölés és a szummaképletek.
- 2 A határozott integrál – a Riemann-összeg határértékeként definiálva.
- 3 Newton–Leibniz-tétel – a deriválás és integrálás kapcsolata:
a hatékony számítás kulcsa.

Összefoglalás és előretékinés

Amit megtanultunk

- Görbe alatti terület közelíthető **téglalapok összegével**.
- **Felosztás, mintapont, Riemann-összeg** fogalma.
- Alsó összeg $\leq$ Riemann-összeg $\leq$ felső összeg.
- A felosztás finomításával ($n \rightarrow \infty$) a közelítés javul.

Nyitott kérdések

- Mikor konvergál a Riemann-összeg, és mi a határértéke?
- Hogyan számítható ki a határérték **téglalapok nélkül**, hatékonyan?

Következő lépések:

- 1 **A véges összegek határértéke** – a Σ -jelölés és a szummaképletek.
- 2 **A határozott integrál** – a Riemann-összeg határértékeként definiálva.
- 3 **Newton–Leibniz-tétel** – a deriválás és integrálás kapcsolata:
a hatékony számítás kulcsa.

Összefoglalás és előretékinés

Amit megtanultunk

- Görbe alatti terület közelíthető **téglalapok összegével**.
- **Felosztás, mintapont, Riemann-összeg** fogalma.
- Alsó összeg $\leq$ Riemann-összeg $\leq$ felső összeg.
- A felosztás finomításával ($n \rightarrow \infty$) a közelítés javul.

Nyitott kérdések

- Mikor konvergál a Riemann-összeg, és mi a határértéke?
- Hogyan számítható ki a határérték **téglalapok nélkül**, hatékonyan?

Következő lépések:

- 1 **A véges összegek határértéke** – a Σ -jelölés és a szummaképletek.
- 2 **A határozott integrál** – a Riemann-összeg határértékeként definiálva.
- 3 **Newton–Leibniz-tétel** – a deriválás és integrálás kapcsolata:
a hatékony számítás kulcsa.

Összefoglalás és előretékinés

Amit megtanultunk

- Görbe alatti terület közelíthető **téglalapok összegével**.
- **Felosztás, mintapont, Riemann-összeg** fogalma.
- Alsó összeg $\leq$ Riemann-összeg $\leq$ felső összeg.
- A felosztás finomításával ($n \rightarrow \infty$) a közelítés javul.

Nyitott kérdések

- Mikor konvergál a Riemann-összeg, és mi a határértéke?
- Hogyan számítható ki a határérték **téglalapok nélkül**, hatékonyan?

Következő lépések:

- 1 **A véges összegek határértéke** – a Σ -jelölés és a szummaképletek.
- 2 **A határozott integrál** – a Riemann-összeg határértékeként definiálva.
- 3 **Newton–Leibniz-tétel** – a deriválás és integrálás kapcsolata:
a hatékony számítás kulcsa.

Tagolás

- 1 Közelítés véges összegekkel
- 2 A véges összegek határértéke és a szumma jel**
- 3 A határozott integrál
- 4 Newton–Leibniz-tétel (az analízis alaptétele)
- 5 A határozatlan integrál és a helyettesítési szabály

A szumma jel

Definíció: Szumma jel

Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok. Összegüket **szumma jellel** írjuk:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

k a **szummációs index**, 1 az alsó, n a felső határ.

Python-szerű jelölés: $\sum_{k=1}^n a_k = \text{sum}(a[k] \text{ for } k \text{ in range}(1, n+1))$.

Példák (az index neve közömbös)

$$\sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^4 i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

$$\sum_{j=0}^3 2^j = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

$$\sum_{k=1}^N c = \underbrace{c + c + \dots + c}_N = Nc$$

A szumma jel

Definíció: Szumma jel

Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok. Összegüket **szumma jellel** írjuk:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

k a **szummációs index**, 1 az alsó, n a felső határ.

Python-szerű jelölés: $\sum_{k=1}^n a_k = \text{sum}(a[k] \text{ for } k \text{ in range}(1, n+1))$.

Példák (az index neve közömbös)

$$\sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=1}^4 i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

$$\sum_{j=0}^3 2^j = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

$$\sum_{k=1}^N c = \underbrace{c + c + \dots + c}_N = Nc$$

A szumma jel

Definíció: Szumma jel

Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok. Összegüket **szumma jellel** írjuk:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

k a **szummációs index**, 1 az alsó, n a felső határ.

Python-szerű jelölés: $\sum_{k=1}^n a_k = \text{sum}(a[k] \text{ for } k \text{ in range}(1, n+1))$.

Példák (az index neve közömbös)

$$\sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{j=0}^3 2^j = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

$$\sum_{i=1}^4 i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

$$\sum_{k=1}^N c = \underbrace{c + c + \dots + c}_N = Nc$$

A szumma linearitása és a teleszkopikus összeg

Tétel: Linearitás

Legyenek a_k, b_k valós számsorozatok, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k.$$

Biz. Mindkét állítás közvetlenül az összeadás kommutativitásából és asszociativitásából következik. □

Tétel: Teleszkopikus összeg

$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1.$$

Biz. Az összeg kiírva:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1,$$

mert minden közbülső tag kiesik. □

A szumma linearitása és a teleszkopikus összeg

Tétel: Linearitás

Legyenek a_k, b_k valós számsorozatok, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k.$$

Biz. Mindkét állítás közvetlenül az összeadás kommutativitásából és asszociativitásából következik. □

Tétel: Teleszkopikus összeg

$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1.$$

Biz. Az összeg kiírva:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1,$$

mert minden közbülső tag kiesik. □

A szumma linearitása és a teleszkopikus összeg

Tétel: Linearitás

Legyenek a_k, b_k valós számsorozatok, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k.$$

Biz. Mindkét állítás közvetlenül az összeadás kommutativitásából és asszociativitásából következik. □

Tétel: Teleszkopikus összeg

$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1.$$

Biz. Az összeg kiírva:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1,$$

mert minden közbülső tag kiesik. □

A szumma linearitása és a teleszkopikus összeg

Tétel: Linearitás

Legyenek a_k, b_k valós számsorozatok, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k.$$

Biz. Mindkét állítás közvetlenül az összeadás kommutativitásából és asszociativitásából következik. □

Tétel: Teleszkopikus összeg

$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1.$$

Biz. Az összeg kiírva:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1,$$

mert minden közbülső tag kiesik. □

A szumma linearitása és a teleszkopikus összeg

Tétel: Linearitás

Legyenek a_k, b_k valós számsorozatok, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, \quad \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k.$$

Biz. Mindkét állítás közvetlenül az összeadás kommutativitásából és asszociativitásából következik. □

Tétel: Teleszkopikus összeg

$$\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1.$$

Biz. Az összeg kiírva:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1,$$

mert minden közbülső tag kiesik. □

Alap szummaképletek

Tétel

Összeg	Zárt alak	Összeg	Zárt alak
$\sum_{k=1}^n 1$	n	$\sum_{k=1}^n k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^n k$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^n q^k \quad (q \neq 1)$	$\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

A $\sum k$ bizonyítása (teljes indukcióval): Kezdés: $n = 1$: $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. ✓

Indukciós lépés: Tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Ekkor:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \checkmark$$

A mértani sor bizonyítása (teleszkopikus trükk):

Legyen $S = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^{n-1} + q^n$. Ekkor $qS = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$, tehát $qS - S = q^{n+1} - 1$.

Ebből $S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$. □

Alap szummaképletek

Tétel

Összeg	Zárt alak	Összeg	Zárt alak
$\sum_{k=1}^n 1$	n	$\sum_{k=1}^n k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^n k$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^n q^k \quad (q \neq 1)$	$\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

A $\sum k$ bizonyítása (teljes indukcióval): Kezdés: $n = 1$: $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. ✓

Indukciós lépés: Tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Ekkor:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \checkmark$$

A mértani sor bizonyítása (teleszkopikus trükk):

Legyen $S = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^{n-1} + q^n$. Ekkor $qS = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$, tehát $qS - S = q^{n+1} - 1$.

Ebből $S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$. □

Alap szummaképletek

Tétel

Összeg	Zárt alak	Összeg	Zárt alak
$\sum_{k=1}^n 1$	n	$\sum_{k=1}^n k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^n k$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^n q^k \quad (q \neq 1)$	$\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

A $\sum k$ bizonyítása (teljes indukcióval): Kezdés: $n = 1$: $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. ✓

Indukciós lépés: Tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Ekkor:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \checkmark$$

A mértani sor bizonyítása (teleszkopikus trükk):

Legyen $S = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^{n-1} + q^n$. Ekkor $qS = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$, tehát $qS - S = q^{n+1} - 1$.

Ebből $S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$. □

A jobb oldali Riemann összeg kiszámítása

- Tekintsük a $[0, 1]$ intervallum egyenletes felosztását n részre; $\Delta x = \frac{1}{n}$.
- A jobb oldali mintapontok: $c_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$.
- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- Az $[a, b]$ intervallum egyenletes felosztása esetén

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad c_k = a + k \cdot \Delta x.$$

- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right).$$

A számolás menete

- Fejezzük ki $\sum f(k/n)$ -t a szummaképletekkel zárt alakban.
- Vegyük a kapott kifejezés $n \rightarrow \infty$ határértékét.

A jobb oldali Riemann összeg kiszámítása

- Tekintsük a $[0, 1]$ intervallum egyenletes felosztását n részre; $\Delta x = \frac{1}{n}$.
- A jobb oldali mintapontok: $c_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$.
- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- Az $[a, b]$ intervallum egyenletes felosztása esetén

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad c_k = a + k \cdot \Delta x.$$

- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right).$$

A számolás menete

- Fejezzük ki $\sum f(k/n)$ -t a szummaképletekkel zárt alakban.
- Vegyük a kapott kifejezés $n \rightarrow \infty$ határértékét.

A jobb oldali Riemann összeg kiszámítása

- Tekintsük a $[0, 1]$ intervallum egyenletes felosztását n részre; $\Delta x = \frac{1}{n}$.
- A jobb oldali mintapontok: $c_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$.
- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- Az $[a, b]$ intervallum egyenletes felosztása esetén

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad c_k = a + k \cdot \Delta x.$$

- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right).$$

A számolás menete

- Fejezzük ki $\sum f(k/n)$ -t a szummaképletekkel zárt alakban.
- Vegyük a kapott kifejezés $n \rightarrow \infty$ határértékét.

A jobb oldali Riemann összeg kiszámítása

- Tekintsük a $[0, 1]$ intervallum egyenletes felosztását n részre; $\Delta x = \frac{1}{n}$.
- A jobb oldali mintapontok: $c_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$.
- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- Az $[a, b]$ intervallum egyenletes felosztása esetén

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad c_k = a + k \cdot \Delta x.$$

- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right).$$

A számolás menete

- Fejezzük ki $\sum f(k/n)$ -t a szummaképletekkel zárt alakban.
- Vegyük a kapott kifejezés $n \rightarrow \infty$ határértékét.

A jobb oldali Riemann összeg kiszámítása

- Tekintsük a $[0, 1]$ intervallum egyenletes felosztását n részre; $\Delta x = \frac{1}{n}$.
- A jobb oldali mintapontok: $c_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$.
- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- Az $[a, b]$ intervallum egyenletes felosztása esetén

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad c_k = a + k \cdot \Delta x.$$

- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right).$$

A számolás menete

- Fejezzük ki $\sum f(k/n)$ -t a szummaképletekkel zárt alakban.
- Vegyük a kapott kifejezés $n \rightarrow \infty$ határértékét.

A jobb oldali Riemann összeg kiszámítása

- Tekintsük a $[0, 1]$ intervallum egyenletes felosztását n részre; $\Delta x = \frac{1}{n}$.
- A jobb oldali mintapontok: $c_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$.
- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- Az $[a, b]$ intervallum egyenletes felosztása esetén

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad c_k = a + k \cdot \Delta x.$$

- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right).$$

A számolás menete

- Fejezzük ki $\sum f(k/n)$ -t a **szummaképletekkel** zárt alakban.
- Vegyük a kapott kifejezés $n \rightarrow \infty$ **határértékét**.

A jobb oldali Riemann összeg kiszámítása

- Tekintsük a $[0, 1]$ intervallum egyenletes felosztását n részre; $\Delta x = \frac{1}{n}$.
- A jobb oldali mintapontok: $c_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$.
- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- Az $[a, b]$ intervallum egyenletes felosztása esetén

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad c_k = a + k \cdot \Delta x.$$

- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right).$$

A számolás menete

- Fejezzük ki $\sum f(k/n)$ -t a **szummaképletekkel** zárt alakban.
- Vegyük a kapott kifejezés $n \rightarrow \infty$ **határértékét**.

A jobb oldali Riemann összeg kiszámítása

- Tekintsük a $[0, 1]$ intervallum egyenletes felosztását n részre; $\Delta x = \frac{1}{n}$.
- A jobb oldali mintapontok: $c_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$.
- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- Az $[a, b]$ intervallum egyenletes felosztása esetén

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad c_k = a + k \cdot \Delta x.$$

- A jobb oldali Riemann-összeg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right).$$

A számolás menete

- Fejezzük ki $\sum f(k/n)$ -t a **szummaképletekkel** zárt alakban.
- Vegyük a kapott kifejezés $n \rightarrow \infty$ **határértékét**.

Kidolgozott példa: e^x Riemann-összege a $[0, 1]$ -en

Feladat

Számítsuk ki az $f(x) = e^x$ görbe alatti területet a $[0, 1]$ intervallumon, egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{1}{n}$, $c_k = \frac{k}{n}$, $f(c_k) = e^{k/n}$.

- Riemann-összeg ($q = e^{1/n}$ jelöléssel):

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k = \frac{q}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q}{n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{e^{1/n}}{n} \cdot \frac{e - 1}{e^{1/n} - 1}.$$

- Korábbról: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{1/n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} = 1$$

- Határérték ($n \rightarrow \infty$): $R_n \longrightarrow 1 \cdot \frac{e - 1}{1} = e - 1.$

Kidolgozott példa: e^x Riemann-összege a $[0, 1]$ -en

Feladat

Számítsuk ki az $f(x) = e^x$ görbe alatti területet a $[0, 1]$ intervallumon, egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{1}{n}$, $c_k = \frac{k}{n}$, $f(c_k) = e^{k/n}$.

- Riemann-összeg ($q = e^{1/n}$ jelöléssel):

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k = \frac{q}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q}{n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{e^{1/n}}{n} \cdot \frac{e - 1}{e^{1/n} - 1}.$$

- Korábbról: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{1/n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} = 1$$

- Határérték ($n \rightarrow \infty$): $R_n \longrightarrow 1 \cdot \frac{e - 1}{1} = e - 1.$

Kidolgozott példa: e^x Riemann-összege a $[0, 1]$ -en

Feladat

Számítsuk ki az $f(x) = e^x$ görbe alatti területet a $[0, 1]$ intervallumon, egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{1}{n}$, $c_k = \frac{k}{n}$, $f(c_k) = e^{k/n}$.

- Riemann-összeg ($q = e^{1/n}$ jelöléssel):

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k = \frac{q}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q}{n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{e^{1/n}}{n} \cdot \frac{e - 1}{e^{1/n} - 1}.$$

- Korábbról: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{1/n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} = 1$$

- Határérték ($n \rightarrow \infty$): $R_n \longrightarrow 1 \cdot \frac{e - 1}{1} = e - 1$.

Kidolgozott példa: e^x Riemann-összege a $[0, 1]$ -en

Feladat

Számítsuk ki az $f(x) = e^x$ görbe alatti területet a $[0, 1]$ intervallumon, egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{1}{n}$, $c_k = \frac{k}{n}$, $f(c_k) = e^{k/n}$.

- Riemann-összeg ($q = e^{1/n}$ jelöléssel):

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k = \frac{q}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q}{n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{e^{1/n}}{n} \cdot \frac{e - 1}{e^{1/n} - 1}.$$

- Korábbról: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{1/n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} = 1$$

.

- Határérték ($n \rightarrow \infty$): $R_n \longrightarrow 1 \cdot \frac{e - 1}{1} = e - 1$.

Kidolgozott példa: e^x Riemann-összege a $[0, 1]$ -en

Feladat

Számítsuk ki az $f(x) = e^x$ görbe alatti területet a $[0, 1]$ intervallumon, egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{1}{n}$, $c_k = \frac{k}{n}$, $f(c_k) = e^{k/n}$.

- Riemann-összeg ($q = e^{1/n}$ jelöléssel):

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k = \frac{q}{n} \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q}{n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{e^{1/n}}{n} \cdot \frac{e - 1}{e^{1/n} - 1}.$$

- Korábbról: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{1/n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} = 1$$

.

- Határérték ($n \rightarrow \infty$): $R_n \longrightarrow 1 \cdot \frac{e - 1}{1} = e - 1$.

Kidolgozott példa: $f(x) = x$ Riemann-összege $[0, b]$ -re

Feladat

Számítsuk ki az $f(x) = x$ görbe alatti területet a $[0, b]$ intervallumon ($b > 0$), egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{b}{n}$, $c_k = \frac{kb}{n}$.

- Riemann-összeg:

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{kb}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} &= \sum_{k=1}^n \frac{kb}{n} \cdot \frac{b}{n} &= \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &= \frac{b^2(n+1)}{2n}. \end{aligned}$$

- Határérték:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^2(n+1)}{2n} = \frac{b^2}{2}.$$

Kidolgozott példa: $f(x) = x$ Riemann-összege $[0, b]$ -re

Feladat

Számítsuk ki az $f(x) = x$ görbe alatti területet a $[0, b]$ intervallumon ($b > 0$), egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{b}{n}, \quad c_k = \frac{kb}{n}.$

- Riemann-összeg:

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{kb}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} &= \sum_{k=1}^n \frac{kb}{n} \cdot \frac{b}{n} &= \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &= \frac{b^2(n+1)}{2n}. \end{aligned}$$

- Határérték:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^2(n+1)}{2n} = \frac{b^2}{2}.$$

Kidolgozott példa: $f(x) = x$ Riemann-összege $[0, b]$ -re

Feladat

Számítsuk ki az $f(x) = x$ görbe alatti területet a $[0, b]$ intervallumon ($b > 0$), egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{b}{n}$, $c_k = \frac{kb}{n}$.

- Riemann-összeg:

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{kb}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} &= \sum_{k=1}^n \frac{kb}{n} \cdot \frac{b}{n} &= \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &= \frac{b^2(n+1)}{2n}. \end{aligned}$$

- Határérték:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^2(n+1)}{2n} = \frac{b^2}{2}.$$

Kidolgozott példa: $f(x) = x$ Riemann-összege $[0, b]$ -re

Feladat

Számítsuk ki az $f(x) = x$ görbe alatti területet a $[0, b]$ intervallumon ($b > 0$), egyenletes n -részre osztással, jobb oldali mintapontokkal!

- Felosztás: $\Delta x = \frac{b}{n}, \quad c_k = \frac{kb}{n}.$

- Riemann-összeg:

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{kb}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} &= \sum_{k=1}^n \frac{kb}{n} \cdot \frac{b}{n} &= \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &= \frac{b^2(n+1)}{2n}. \end{aligned}$$

- Határérték:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^2(n+1)}{2n} = \frac{b^2}{2}.$$

A közelítés hibája és a konvergencia sebessége

Kérdés: Mennyire pontos az n -része osztásos közelítés?

Hiba becslése (informálisan)

Legyen f folytonos és monoton $[a, b]$ -n. Ekkor:

- Bal/jobbs oldali Riemann-összegeknél:

$$|R_n - T| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \frac{|f(b) - f(a)|}{2}, \quad \text{azaz hiba} = O(1/n).$$

- Középponti szabálynál: hiba = $O(1/n^2)$.

Miért jobb a középponti szabály?

- Bal/jobbs oldali esetén minden téglalapon $\sim \Delta x \cdot f'(c_k) \cdot \Delta x/2$ hiba keletkezik, és ezek összeadódnak.
- Középponti szabálynál a téglalap felső éle metszi a görbét, így a hiba két fele **kiejti egymást** — az összesített hiba egy fokkal kisebb.
- Ha n -t megduplázom: bal/jobbs hiba **felére** csökken, középponti hiba **negyedére** csökken.
- Numerikus integrálásban ez döntő különbség

A közelítés hibája és a konvergencia sebessége

Kérdés: Mennyire pontos az n -része osztásos közelítés?

Hiba becslése (informálisan)

Legyen f folytonos és monoton $[a, b]$ -n. Ekkor:

- Bal/jobbs oldali Riemann-összegeknél:

$$|R_n - T| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \frac{|f(b) - f(a)|}{2}, \quad \text{azaz hiba} = O(1/n).$$

- Középponti szabálynál: hiba = $O(1/n^2)$.

Miért jobb a középponti szabály?

- Bal/jobbs oldali esetén minden téglalapon $\sim \Delta x \cdot f'(c_k) \cdot \Delta x/2$ hiba keletkezik, és ezek összeadódnak.
- Középponti szabálynál a téglalap felső éle metszi a görbét, így a hiba két fele **kiejti egymást** — az összesített hiba egy fokkal kisebb.
- Ha n -t megduplázom: bal/jobbs hiba **felére** csökken, középponti hiba **negyedére** csökken.
- Numerikus integrálásban ez döntő különbség

A közelítés hibája és a konvergencia sebessége

Kérdés: Mennyire pontos az n -része osztásos közelítés?

Hiba becslése (informálisan)

Legyen f folytonos és monoton $[a, b]$ -n. Ekkor:

- **Bal/jobbs oldali Riemann-összegeknél:**

$$|R_n - T| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \frac{|f(b) - f(a)|}{2}, \quad \text{azaz hiba} = O(1/n).$$

- **Középponti szabálynál:** hiba = $O(1/n^2)$.

Miért jobb a középponti szabály?

- Bal/jobbs oldali esetén minden téglalapon $\sim \Delta x \cdot f'(c_k) \cdot \Delta x/2$ hiba keletkezik, és ezek összeadódnak.
- Középponti szabálynál a téglalap felső éle metszi a görbét, így a hiba két fele **kiejti egymást** — az összesített hiba egy fokkal kisebb.
- Ha n -t megduplázom: bal/jobbs hiba **felére** csökken, középponti hiba **negyedére** csökken.
- Numerikus integrálásban ez döntő különbség

A közelítés hibája és a konvergencia sebessége

Kérdés: Mennyire pontos az n -része osztásos közelítés?

Hiba becslése (informálisan)

Legyen f folytonos és monoton $[a, b]$ -n. Ekkor:

- **Bal/jobbs oldali Riemann-összegeknél:**

$$|R_n - T| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \frac{|f(b) - f(a)|}{2}, \quad \text{azaz hiba} = O(1/n).$$

- **Középponti szabálynál:** hiba = $O(1/n^2)$.

Miért jobb a középponti szabály?

- Bal/jobbs oldali esetén minden téglalapon $\sim \Delta x \cdot f'(c_k) \cdot \Delta x/2$ hiba keletkezik, és ezek összeadódnak.
- Középponti szabálynál a téglalap felső éle metszi a görbét, így a hiba két fele **kiejti egymást** — az összesített hiba egy fokkal kisebb.
- Ha n -t megduplázom: bal/jobbs hiba **felére** csökken, középponti hiba **negyedére** csökken.
- Numerikus integrálásban ez döntő különbség

A közelítés hibája és a konvergencia sebessége

Kérdés: Mennyire pontos az n -része osztásos közelítés?

Hiba becslése (informálisan)

Legyen f folytonos és monoton $[a, b]$ -n. Ekkor:

- **Bal/jobbs oldali Riemann-összegeknél:**

$$|R_n - T| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \frac{|f(b) - f(a)|}{2}, \quad \text{azaz hiba} = O(1/n).$$

- **Középponti szabálynál:** hiba = $O(1/n^2)$.

Miért jobb a középponti szabály?

- Bal/jobbs oldali esetén minden téglalapon $\sim \Delta x \cdot f'(c_k) \cdot \Delta x/2$ hiba keletkezik, és ezek összeadódnak.
- Középponti szabálynál a téglalap felső éle metszi a görbét, így a hiba két fele **kiejti egymást** — az összesített hiba egy fokkal kisebb.
- Ha n -t megduplázom: bal/jobbs hiba **felére** csökken, középponti hiba **negyedére** csökken.
- Numerikus integrálásban ez döntő különbség

A közelítés hibája és a konvergencia sebessége

Kérdés: Mennyire pontos az n -része osztásos közelítés?

Hiba becslése (informálisan)

Legyen f folytonos és monoton $[a, b]$ -n. Ekkor:

- **Bal/jobb oldali Riemann-összegeknél:**

$$|R_n - T| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \frac{|f(b) - f(a)|}{2}, \quad \text{azaz hiba} = O(1/n).$$

- **Középponti szabálynál:** hiba = $O(1/n^2)$.

Miért jobb a középponti szabály?

- Bal/jobb oldali esetén minden téglalapon $\sim \Delta x \cdot f'(c_k) \cdot \Delta x/2$ hiba keletkezik, és ezek **összeadódnak**.
- Középponti szabálynál a téglalap felső éle metszi a görbét, így a hiba két fele **kiejti egymást** — az összesített hiba egy fokkal kisebb.
- Ha n -t megduplázom: bal/jobb hiba **felére** csökken, középponti hiba **negyedére** csökken.
- Numerikus integrálásban ez döntő különbség

A közelítés hibája és a konvergencia sebessége

Kérdés: Mennyire pontos az n -része osztásos közelítés?

Hiba becslése (informálisan)

Legyen f folytonos és monoton $[a, b]$ -n. Ekkor:

- **Bal/jobbs oldali Riemann-összegeknél:**

$$|R_n - T| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \frac{|f(b) - f(a)|}{2}, \quad \text{azaz hiba} = O(1/n).$$

- **Középponti szabálynál:** hiba = $O(1/n^2)$.

Miért jobb a középponti szabály?

- Bal/jobbs oldali esetén minden téglalapon $\sim \Delta x \cdot f'(c_k) \cdot \Delta x/2$ hiba keletkezik, és ezek **összeadódnak**.
- Középponti szabálynál a téglalap felső éle metszi a görbét, így a hiba két fele **kiejti egymást** — az összesített hiba egy fokkal kisebb.
- Ha n -t megduplázom: bal/jobbs hiba **felére** csökken, középponti hiba **negyedére** csökken.
- Numerikus integrálásban ez döntő különbség

A közelítés hibája és a konvergencia sebessége

Kérdés: Mennyire pontos az n -része osztásos közelítés?

Hiba becslése (informálisan)

Legyen f folytonos és monoton $[a, b]$ -n. Ekkor:

- **Bal/jobbs oldali Riemann-összegeknél:**

$$|R_n - T| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \frac{|f(b) - f(a)|}{2}, \quad \text{azaz hiba} = O(1/n).$$

- **Középponti szabálynál:** hiba = $O(1/n^2)$.

Miért jobb a középponti szabály?

- Bal/jobbs oldali esetén minden téglalapon $\sim \Delta x \cdot f'(c_k) \cdot \Delta x/2$ hiba keletkezik, és ezek **összeadódnak**.
- Középponti szabálynál a téglalap felső éle metszi a görbét, így a hiba két fele **kiejti egymást** — az összesített hiba egy fokkal kisebb.
- Ha n -t megduplázom: bal/jobbs hiba **felére** csökken, középponti hiba **negyedére** csökken.
- Numerikus integrálásban ez döntő különbség

A közelítés hibája és a konvergencia sebessége

Kérdés: Mennyire pontos az n -része osztásos közelítés?

Hiba becslése (informálisan)

Legyen f folytonos és monoton $[a, b]$ -n. Ekkor:

- **Bal/jobbs oldali Riemann-összegeknél:**

$$|R_n - T| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \frac{|f(b) - f(a)|}{2}, \quad \text{azaz hiba} = O(1/n).$$

- **Középponti szabálynál:** hiba = $O(1/n^2)$.

Miért jobb a középponti szabály?

- Bal/jobbs oldali esetén minden téglalapon $\sim \Delta x \cdot f'(c_k) \cdot \Delta x/2$ hiba keletkezik, és ezek **összeadódnak**.
- Középponti szabálynál a téglalap felső éle metszi a görbét, így a hiba két fele **kiejti egymást** — az összesített hiba egy fokkal kisebb.
- Ha n -t megduplázom: bal/jobbs hiba **felére** csökken, középponti hiba **negyedére** csökken.
- Numerikus integrálásban ez döntő különbség

Tagolás

- 1 Közelítés véges összegekkel
- 2 A véges összegek határértéke és a szumma jel
- 3 A határozott integrál**
- 4 Newton–Leibniz-tétel (az analízis alaptétele)
- 5 A határozatlan integrál és a helyettesítési szabály

A határozott integrál definíciója

Definíció: Határozott integrál (Riemann)

Legyen f korlátos az $[a, b]$ intervallumon. Ha **minden felosztásra és minden mintapontválasztásra**

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

létezik és ugyanazt az I értéket adja, akkor f **Riemann-integrálható** $[a, b]$ -n, és az I értéket **határozott integrálnak** nevezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

A jelölés részei:

- $\int$ — integrálójel (megnyújtott S, a „summa” szóból),
- a, b — az integrálás alsó és felső határa,
- $f(x)$ — az integrandus,
- dx — az integrálás változója (a $\Delta x \rightarrow 0$ határátmenet emlékeztetője).

A határozott integrál definíciója

Definíció: Határozott integrál (Riemann)

Legyen f korlátos az $[a, b]$ intervallumon. Ha **minden felosztásra és minden mintapontválasztásra**

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

létezik és ugyanazt az I értéket adja, akkor f **Riemann-integrálható** $[a, b]$ -n, és az I értéket **határozott integrálnak** nevezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

A jelölés részei:

- $\int$ — integrálójel (megnyújtott S, a „summa” szóból),
- a, b — az integrálás **alsó és felső határa**,
- $f(x)$ — az **integrandus**,
- dx — az integrálás **változója** (a $\Delta x \rightarrow 0$ határátmenet emlékeztetője).

A határozott integrál definíciója

Definíció: Határozott integrál (Riemann)

Legyen f korlátos az $[a, b]$ intervallumon. Ha **minden felosztásra és minden mintapontválasztásra**

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

létezik és ugyanazt az I értéket adja, akkor f **Riemann-integrálható** $[a, b]$ -n, és az I értéket **határozott integrálnak** nevezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

A jelölés részei:

- $\int$ — integrálójel (megnyújtott S, a „summa” szóból),
- a, b — az integrálás **alsó és felső határa**,
- $f(x)$ — az **integrandus**,
- dx — az integrálás **változója** (a $\Delta x \rightarrow 0$ határátmenet emlékeztetője).

A határozott integrál definíciója

Definíció: Határozott integrál (Riemann)

Legyen f korlátos az $[a, b]$ intervallumon. Ha **minden felosztásra és minden mintapontválasztásra**

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

létezik és ugyanazt az I értéket adja, akkor f **Riemann-integrálható** $[a, b]$ -n, és az I értéket **határozott integrálnak** nevezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

A jelölés részei:

- $\int$ — integrálójel (megnyújtott S, a „summa” szóból),
- a, b — az integrálás **alsó** és **felső határa**,
- $f(x)$ — az **integrandus**,
- dx — az integrálás **változója** (a $\Delta x \rightarrow 0$ határátmenet emlékeztetője).

A határozott integrál definíciója

Definíció: Határozott integrál (Riemann)

Legyen f korlátos az $[a, b]$ intervallumon. Ha **minden felosztásra és minden mintapontválasztásra**

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

létezik és ugyanazt az I értéket adja, akkor f **Riemann-integrálható** $[a, b]$ -n, és az I értéket **határozott integrálnak** nevezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

A jelölés részei:

- $\int$ — integrálójel (megnyújtott S, a „summa” szóból),
- a, b — az integrálás **alsó és felső határa**,
- $f(x)$ — az **integrandus**,
- dx — az integrálás **változója** (a $\Delta x \rightarrow 0$ határátmenet emlékeztetője).

A határozott integrál definíciója

Definíció: Határozott integrál (Riemann)

Legyen f korlátos az $[a, b]$ intervallumon. Ha **minden felosztásra és minden mintapontválasztásra**

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

létezik és ugyanazt az I értéket adja, akkor f **Riemann-integrálható** $[a, b]$ -n, és az I értéket **határozott integrálnak** nevezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

A jelölés részei:

- $\int$ — integrálójel (megnyújtott S, a „summa” szóból),
- a, b — az integrálás **alsó** és **felső határa**,
- $f(x)$ — az **integrandus**,
- dx — az integrálás **változója** (a $\Delta x \rightarrow 0$ határátmenet emlékeztetője).

Mikor integrálható egy függvény?

Tétel: Elegendő feltételek az integrálhatóságra

- 1 Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 2 Ha f monoton és korlátos $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 3 Ha f korlátos és csupán **véges sok szakadással** rendelkezik, akkor integrálható.

Példa: Integrálható, de nem folytonos függvény

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 1/2, \\ 1 & \text{ha } x \geq 1/2. \end{cases} \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Megjegyzés. A kurzuson minden előforduló függvény folytonos lesz (esetleg véges sok pontot kivéve), így az integrálhatóság kérdése nem okoz gondot.

Mikor integrálható egy függvény?

Tétel: Elegendő feltételek az integrálhatóságra

- 1 Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 2 Ha f **monoton és korlátos** $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 3 Ha f korlátos és csupán **véges sok szakadással** rendelkezik, akkor integrálható.

Példa: Integrálható, de nem folytonos függvény

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 1/2, \\ 1 & \text{ha } x \geq 1/2. \end{cases} \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Megjegyzés. A kurzuson minden előforduló függvény folytonos lesz (esetleg véges sok pontot kivéve), így az integrálhatóság kérdése nem okoz gondot.

Mikor integrálható egy függvény?

Tétel: Elegendő feltételek az integrálhatóságra

- 1 Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 2 Ha f **monoton és korlátos** $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 3 Ha f korlátos és csupán **véges sok szakadással** rendelkezik, akkor integrálható.

Példa: Integrálható, de nem folytonos függvény

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 1/2, \\ 1 & \text{ha } x \geq 1/2. \end{cases} \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Megjegyzés. A kurzuson minden előforduló függvény folytonos lesz (esetleg véges sok pontot kivéve), így az integrálhatóság kérdése nem okoz gondot.

Mikor integrálható egy függvény?

Tétel: Elegendő feltételek az integrálhatóságra

- 1 Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 2 Ha f **monoton és korlátos** $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 3 Ha f korlátos és csupán **véges sok szakadással** rendelkezik, akkor integrálható.

Példa: Integrálható, de nem folytonos függvény

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 1/2, \\ 1 & \text{ha } x \geq 1/2. \end{cases} \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Megjegyzés. A kurzuson minden előforduló függvény folytonos lesz (esetleg véges sok pontot kivéve), így az integrálhatóság kérdése nem okoz gondot.

Mikor integrálható egy függvény?

Tétel: Elegendő feltételek az integrálhatóságra

- 1 Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 2 Ha f **monoton és korlátos** $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 3 Ha f korlátos és csupán **véges sok szakadással** rendelkezik, akkor integrálható.

Példa: Integrálható, de nem folytonos függvény

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 1/2, \\ 1 & \text{ha } x \geq 1/2. \end{cases} \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Megjegyzés. A kurzuson minden előforduló függvény folytonos lesz (esetleg véges sok pontot kivéve), így az integrálhatóság kérdése nem okoz gondot.

Mikor integrálható egy függvény?

Tétel: Elegendő feltételek az integrálhatóságra

- 1 Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 2 Ha f **monoton és korlátos** $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 3 Ha f korlátos és csupán **véges sok szakadással** rendelkezik, akkor integrálható.

Példa: Integrálható, de nem folytonos függvény

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 1/2, \\ 1 & \text{ha } x \geq 1/2. \end{cases} \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Megjegyzés. A kurzuson minden előforduló függvény folytonos lesz (esetleg véges sok pontot kivéve), így az integrálhatóság kérdése nem okoz gondot.

Mikor integrálható egy függvény?

Tétel: Elegendő feltételek az integrálhatóságra

- 1 Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 2 Ha f **monoton és korlátos** $[a, b]$ -n, akkor integrálható.
- 3 Ha f korlátos és csupán **véges sok szakadással** rendelkezik, akkor integrálható.

Példa: Integrálható, de nem folytonos függvény

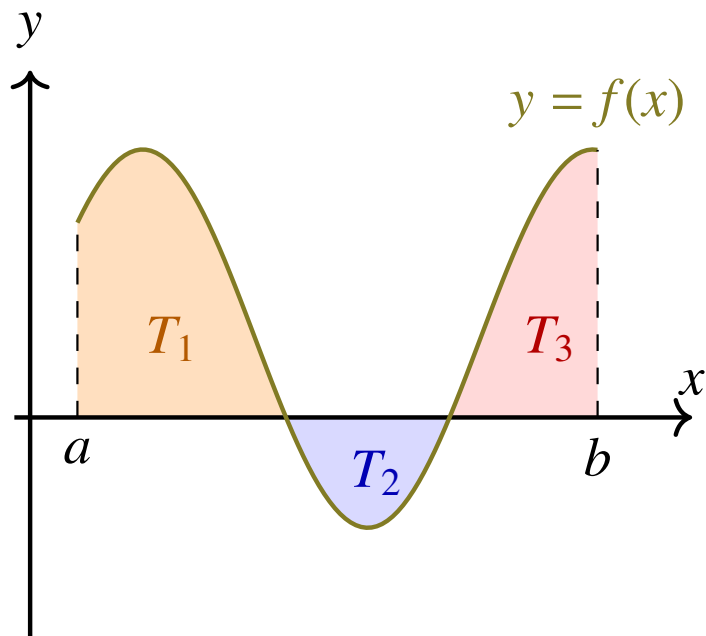
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 1/2, \\ 1 & \text{ha } x \geq 1/2. \end{cases} \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Megjegyzés. A kurzuson minden előforduló függvény folytonos lesz (esetleg véges sok pontot kivéve), így az integrálhatóság kérdése nem okoz gondot.

A határozott integrál geometriai jelentése

Figyelmeztetés

Az integrál a görbe alatti **előjeles terület!**



- Ha $f(x) \geq 0$: $\int_a^b f(x) dx$ az f görbe és az x -tengely közötti **terület**.
- Ha f előjelet vált: az x -tengely feletti területek **pozitívan**, az **alatti** területek **negatívan** számítanak.

$$\int_a^b f = T_1 - T_2 + T_3.$$

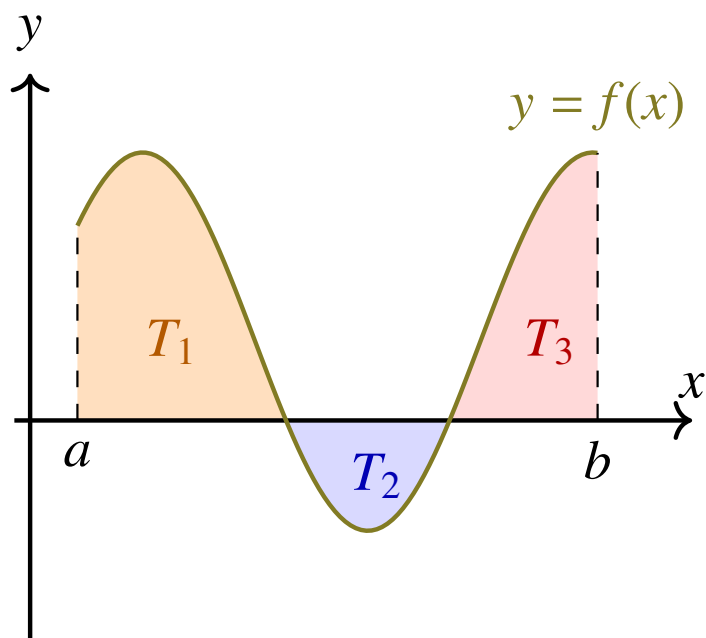
- A teljes (előjel nélküli) területhez az $f(x)$ abszolút értékét kell integrálni:

$$T = \int_a^b |f(x)| dx = T_1 + T_2 + T_3.$$

A határozott integrál geometriai jelentése

Figyelmeztetés

Az integrál a görbe alatti **előjeles terület!**



- Ha $f(x) \geq 0$: $\int_a^b f(x) dx$ az f görbe és az x -tengely közötti **terület**.
- Ha f előjelet vált: az x -tengely **feletti** területek **pozitívan**, az **alatti** területek **negatívan** számítanak.

$$\int_a^b f = T_1 - T_2 + T_3.$$

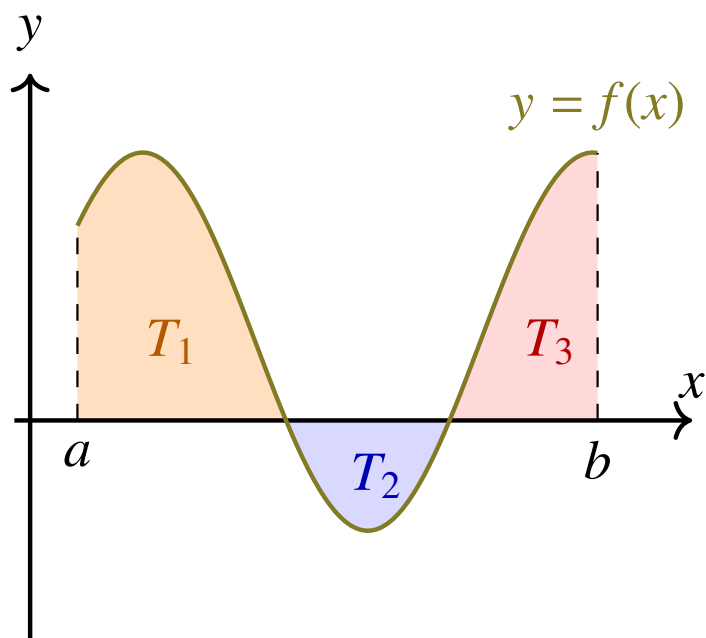
- A teljes (előjel nélküli) területhez az $f(x)$ abszolút értékét kell integrálni:

$$T = \int_a^b |f(x)| dx = T_1 + T_2 + T_3.$$

A határozott integrál geometriai jelentése

Figyelmeztetés

Az integrál a görbe alatti **előjeles terület!**



- Ha $f(x) \geq 0$: $\int_a^b f(x) dx$ az f görbe és az x -tengely közötti **terület**.
- Ha f előjelet vált: az x -tengely **feletti** területek **pozitívan**, az **alatti** területek **negatívan** számítanak.

$$\int_a^b f = T_1 - T_2 + T_3.$$

- A **teljes (előjel nélküli) területhez** az $f(x)$ abszolút értékét kell integrálni:

$$T = \int_a^b |f(x)| dx = T_1 + T_2 + T_3.$$

A határozott integrál tulajdonságai I.

Tétel: Linearitás

Ha f és g integrálható $[a, b]$ -n, $c \in \mathbb{R}$, akkor:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \text{ és } \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

Biz. A Riemann-összeg definíciója alapján a szummáció tulajdonságaiból határátmenettel következik. $\square$

Tétel: Irányváltás és triviális eset

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Biz. Az irányváltásnál Δx_k **előjelet vált** ($a > b$ esetén a felosztás „visszafelé” halad), a Riemann-összeg az ellentettjére változik. $\square$

Példa

$$\int_0^1 (3x^2 + 2e^x) dx = 3 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_0^1 e^x dx = 3 \cdot \frac{1}{3} + 2(e - 1) = 2e - 1.$$

A határozott integrál tulajdonságai I.

Tétel: Linearitás

Ha f és g integrálható $[a, b]$ -n, $c \in \mathbb{R}$, akkor:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \text{ és } \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

Biz. A Riemann-összeg definíciója alapján a szummáció tulajdonságaiból határátmenettel következik. $\square$

Tétel: Irányváltás és triviális eset

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Biz. Az irányváltásnál Δx_k **előjelet vált** ($a > b$ esetén a felosztás „visszafelé” halad), a Riemann-összeg az ellentettjére változik. $\square$

Példa

$$\int_0^1 (3x^2 + 2e^x) dx = 3 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_0^1 e^x dx = 3 \cdot \frac{1}{3} + 2(e - 1) = 2e - 1.$$

A határozott integrál tulajdonságai I.

Tétel: Linearitás

Ha f és g integrálható $[a, b]$ -n, $c \in \mathbb{R}$, akkor:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \text{ és } \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

Biz. A Riemann-összeg definíciója alapján a szummáció tulajdonságaiból határátmenettel következik. $\square$

Tétel: Irányváltás és triviális eset

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Biz. Az irányváltásnál Δx_k **előjelet vált** ($a > b$ esetén a felosztás „visszafelé” halad), a Riemann-összeg az ellentettjére változik. $\square$

Példa

$$\int_0^1 (3x^2 + 2e^x) dx = 3 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_0^1 e^x dx = 3 \cdot \frac{1}{3} + 2(e - 1) = 2e - 1.$$

A határozott integrál tulajdonságai I.

Tétel: Linearitás

Ha f és g integrálható $[a, b]$ -n, $c \in \mathbb{R}$, akkor:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \text{ és } \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

Biz. A Riemann-összeg definíciója alapján a szummáció tulajdonságaiból határátmenettel következik. $\square$

Tétel: Irányváltás és triviális eset

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Biz. Az irányváltásnál Δx_k **előjelet vált** ($a > b$ esetén a felosztás „visszafelé” halad), a Riemann-összeg az ellentettjére változik. $\square$

Példa

$$\int_0^1 (3x^2 + 2e^x) dx = 3 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_0^1 e^x dx = 3 \cdot \frac{1}{3} + 2(e - 1) = 2e - 1.$$

A határozott integrál tulajdonságai I.

Tétel: Linearitás

Ha f és g integrálható $[a, b]$ -n, $c \in \mathbb{R}$, akkor:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \text{ és } \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

Biz. A Riemann-összeg definíciója alapján a szummáció tulajdonságaiból határátmenettel következik. $\square$

Tétel: Irányváltás és triviális eset

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Biz. Az irányváltásnál Δx_k **előjelet vált** ($a > b$ esetén a felosztás „visszafelé” halad), a Riemann-összeg az ellentettjére változik. $\square$

Példa

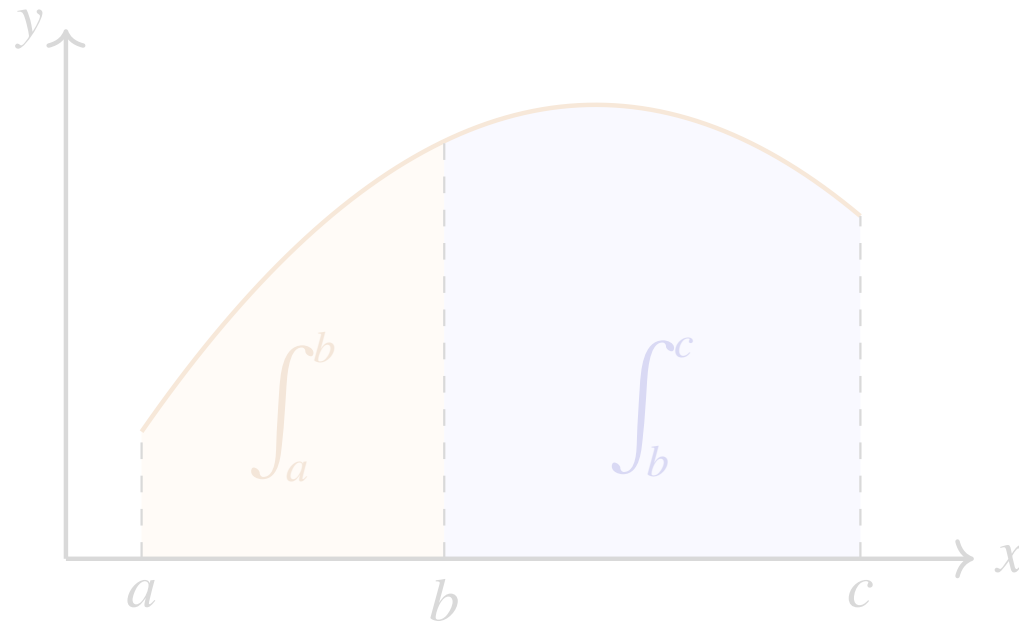
$$\int_0^1 (3x^2 + 2e^x) dx = 3 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_0^1 e^x dx = 3 \cdot \frac{1}{3} + 2(e - 1) = 2e - 1.$$

A határozott integrál tulajdonságai II.

Tétel: Intervallum-additivitás

Ha f integrálható $[a, c]$ -n és $a \leq b \leq c$, akkor:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

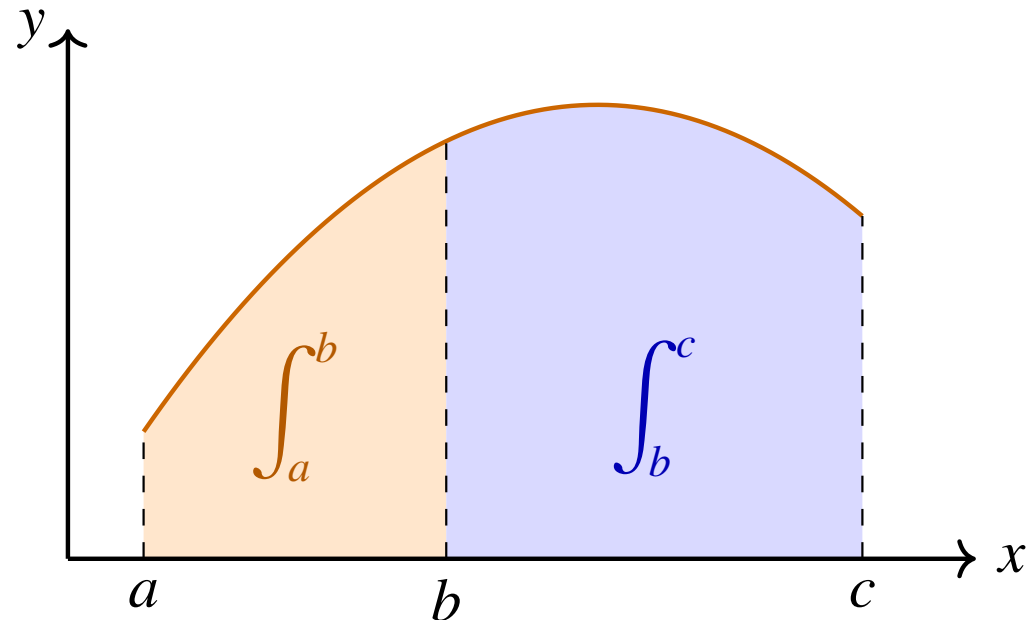


A határozott integrál tulajdonságai II.

Tétel: Intervallum-additivitás

Ha f integrálható $[a, c]$ -n és $a \leq b \leq c$, akkor:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$



A határozott integrál tulajdonságai III.

Tétel: Monotonitás

Ha $f \leq g$ minden $x \in [a, b]$ -re, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Következmény: Az integrál becslése

Ha $m \leq f(x) \leq M$ minden $x \in [a, b]$ -re, akkor

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Biz. A Riemann-összegre $\sum m \Delta x_k \leq \sum f(c_k) \Delta x_k \leq \sum M \Delta x_k$, és $\sum \Delta x_k = b - a$. Határátmenettel az állítás adódik. □

Példa

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx \leq \int_a^b 1 dx = b-a.$$

A határozott integrál tulajdonságai III.

Tétel: Monotonitás

Ha $f \leq g$ minden $x \in [a, b]$ -re, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Következmény: Az integrál becslése

Ha $m \leq f(x) \leq M$ minden $x \in [a, b]$ -re, akkor

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Biz. A Riemann-összegre $\sum m \Delta x_k \leq \sum f(c_k) \Delta x_k \leq \sum M \Delta x_k$, és $\sum \Delta x_k = b - a$. Határátmenettel az állítás adódik. □

Példa

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx \leq \int_a^b 1 dx = b-a.$$

A határozott integrál tulajdonságai III.

Tétel: Monotonitás

Ha $f \leq g$ minden $x \in [a, b]$ -re, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Következmény: Az integrál becslése

Ha $m \leq f(x) \leq M$ minden $x \in [a, b]$ -re, akkor

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Biz. A Riemann-összegre $\sum m \Delta x_k \leq \sum f(c_k) \Delta x_k \leq \sum M \Delta x_k$, és $\sum \Delta x_k = b - a$. Határátmenettel az állítás adódik. □

Példa

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx \leq \int_a^b 1 dx = b-a.$$

A határozott integrál tulajdonságai III.

Tétel: Monotonitás

Ha $f \leq g$ minden $x \in [a, b]$ -re, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Következmény: Az integrál becslése

Ha $m \leq f(x) \leq M$ minden $x \in [a, b]$ -re, akkor

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

Biz. A Riemann-összegre $\sum m \Delta x_k \leq \sum f(c_k) \Delta x_k \leq \sum M \Delta x_k$, és $\sum \Delta x_k = b - a$. Határátmenettel az állítás adódik. □

Példa

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx \leq \int_a^b 1 dx = b - a.$$

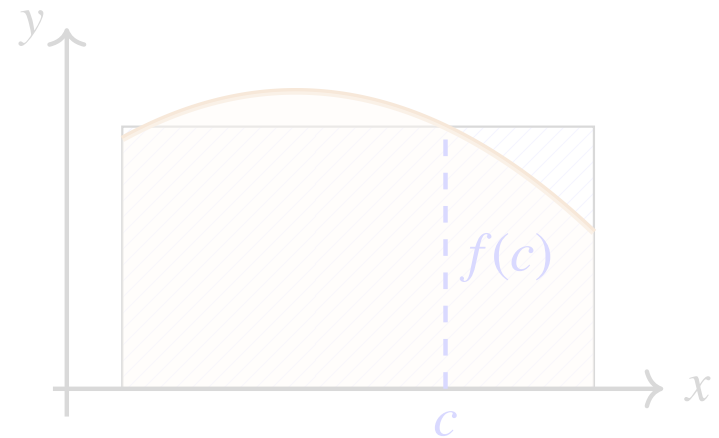
Az integrálközep-tétel

Tétel: Integrálközep-tétel

Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a),$$

azaz $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.



Bizonyítás.

Legyen $m = \min f$, $M = \max f$ (Weierstrass-tétel). Az előző dia becslése szerint

$$m \leq A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

A közbülső értéktétel szerint f felvesz minden m és M közötti értéket, tehát $\exists c \in (a, b): f(c) = A$. □

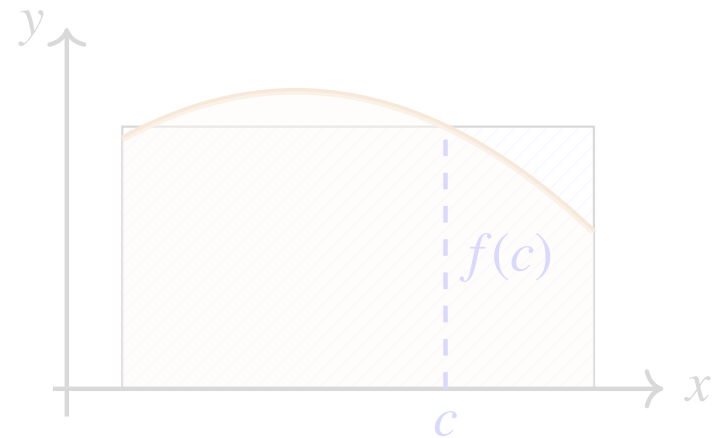
Az integrálközep-tétel

Tétel: Integrálközep-tétel

Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a),$$

azaz $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.



Bizonyítás.

Legyen $m = \min f$, $M = \max f$ (Weierstrass-tétel). Az előző dia becslése szerint

$$m \leq A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

A közbülső értéktétel szerint f felvesz minden m és M közötti értéket, tehát $\exists c \in (a, b): f(c) = A$. □

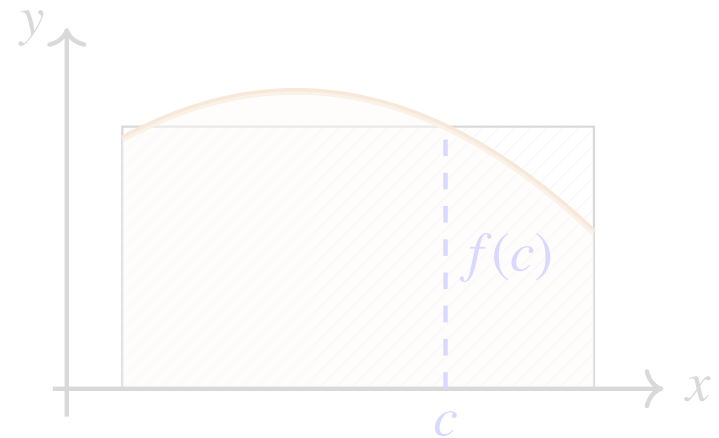
Az integrálközep-tétel

Tétel: Integrálközep-tétel

Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a),$$

azaz $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.



Bizonyítás.

Legyen $m = \min f$, $M = \max f$ (Weierstrass-tétel). Az előző dia becslése szerint

$$m \leq A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

A közbülső értéktétel szerint f felvesz minden m és M közötti értéket, tehát $\exists c \in (a, b): f(c) = A$. □

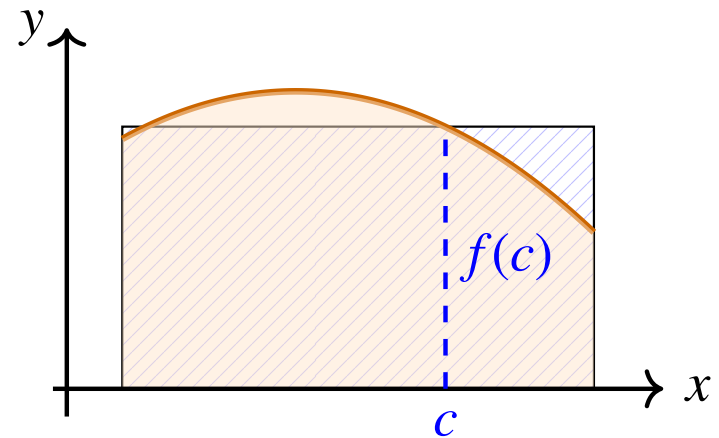
Az integrálközep-tétel

Tétel: Integrálközep-tétel

Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a),$$

azaz $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.



Bizonyítás.

Legyen $m = \min f$, $M = \max f$ (Weierstrass-tétel). Az előző dia becslése szerint

$$m \leq A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

A közbülső értéktétel szerint f felvesz minden m és M közötti értéket, tehát $\exists c \in (a, b): f(c) = A$. □

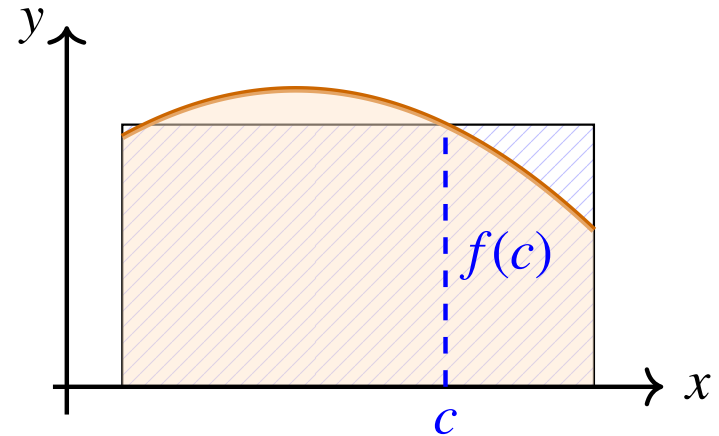
Az integrálközep-tétel

Tétel: Integrálközep-tétel

Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a),$$

azaz $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.



Bizonyítás.

Legyen $m = \min f$, $M = \max f$ (Weierstrass-tétel). Az előző dia becslése szerint

$$m \leq A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

A közbülső értéktétel szerint f felvesz minden m és M közötti értéket, tehát $\exists c \in (a, b): f(c) = A$. □

Változó felső határú integrál

Definíció: Változó felső határú integrál

Legyen f integrálható $[a, b]$ -n. Az

$$T(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

függvényt **területfüggvénynek** (változó felső határú integrálnak) nevezzük.

- $T(x)$ a f görbéje és az x -tengely közötti területet adja meg a -tól x -ig.



- A t változó neve az integrálban közömbös (kötött változó).
- x -et azért nem írunk, hogy ne keveredjen a változó felső határral.

Változó felső határú integrál

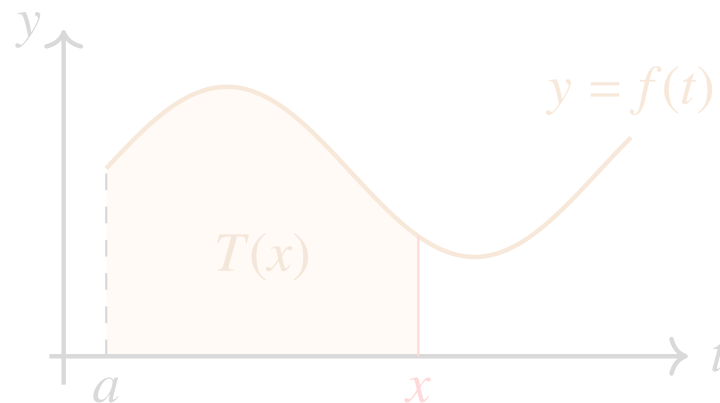
Definíció: Változó felső határú integrál

Legyen f integrálható $[a, b]$ -n. Az

$$T(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

függvényt **területfüggvénynek** (változó felső határú integrálnak) nevezzük.

- $T(x)$ a f görbéje és az x -tengely közötti területet adja meg a -tól x -ig.



- A t változó neve az integrálban közömbös (kötött változó).
- x -et azért nem írunk, hogy ne keveredjen a változó felső határral.

Változó felső határú integrál

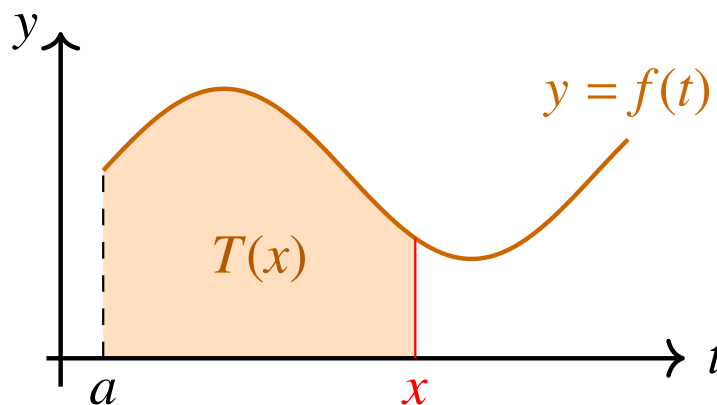
Definíció: Változó felső határú integrál

Legyen f integrálható $[a, b]$ -n. Az

$$T(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

függvényt **területfüggvénynek** (változó felső határú integrálnak) nevezzük.

- $T(x)$ a f görbéje és az x -tengely közötti területet adja meg a -tól x -ig.



- A t változó neve az integrálban közömbös (kötött változó).
- x -et azért nem írunk, hogy ne keveredjen a változó felső határral.

Változó felső határú integrál

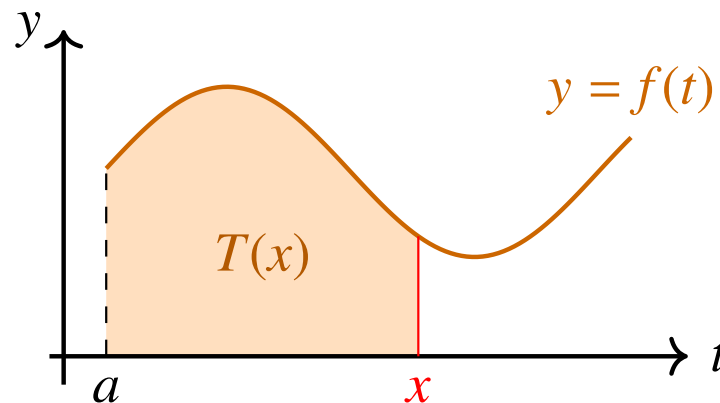
Definíció: Változó felső határú integrál

Legyen f integrálható $[a, b]$ -n. Az

$$T(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

függvényt **területfüggvénynek** (változó felső határú integrálnak) nevezzük.

- $T(x)$ a f görbéje és az x -tengely közötti területet adja meg a -tól x -ig.



- A t változó neve az integrálban közömbös (kötött változó).
- x -et azért nem írunk, hogy ne keveredjen a változó felső határral.

Változó felső határú integrál

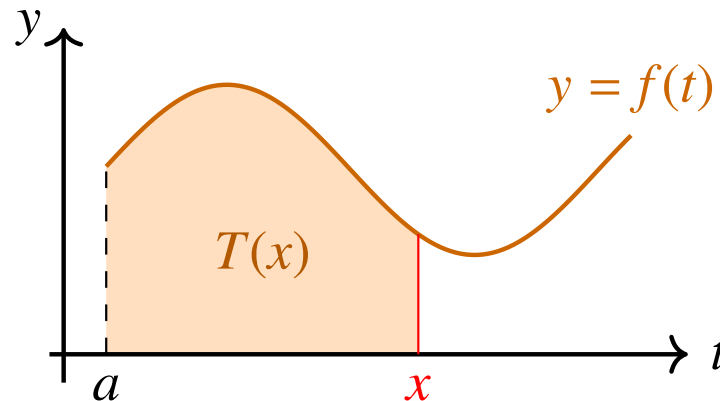
Definíció: Változó felső határú integrál

Legyen f integrálható $[a, b]$ -n. Az

$$T(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

függvényt **területfüggvénynek** (változó felső határú integrálnak) nevezzük.

- $T(x)$ a f görbéje és az x -tengely közötti területet adja meg a -tól x -ig.



- A t változó neve az integrálban közömbös (kötött változó).
- x -et azért nem írunk, hogy ne keveredjen a változó felső határral.

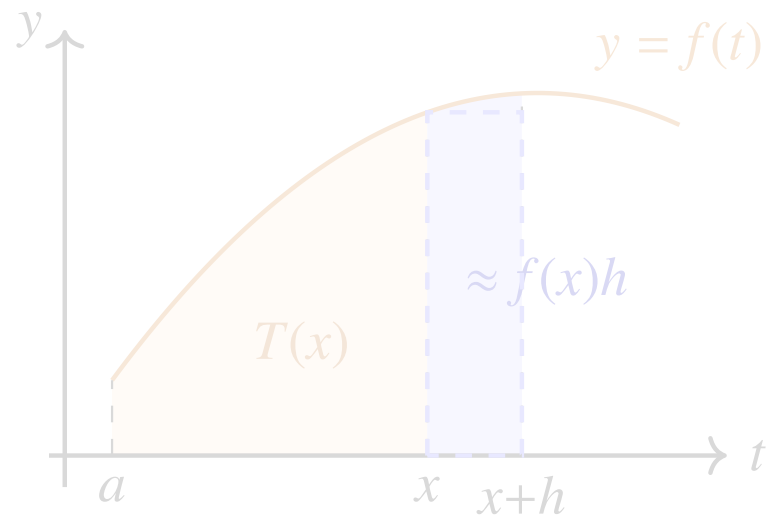
Tagolás

- 1 Közelítés véges összegekkel
- 2 A véges összegek határértéke és a szumma jel
- 3 A határozott integrál
- 4 Newton–Leibniz-tétel (az analízis alaptétele)**
- 5 A határozatlan integrál és a helyettesítési szabály

A területfüggvény deriváltja (1. alaptétel)

Tétel (Az analízis alaptétele, 1. rész)

Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n, akkor $T(x) = \int_a^x f(t) dt$ differenciálható $[a, b]$ -n, és

$$T'(x) = f(x).$$


Bizonyítás.

- 1 A különbségi hányados:

$$\frac{T(x+h) - T(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

- 2 Az integrálközép-tétel szerint $\exists c_h \in (x, x+h)$:

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c_h).$$

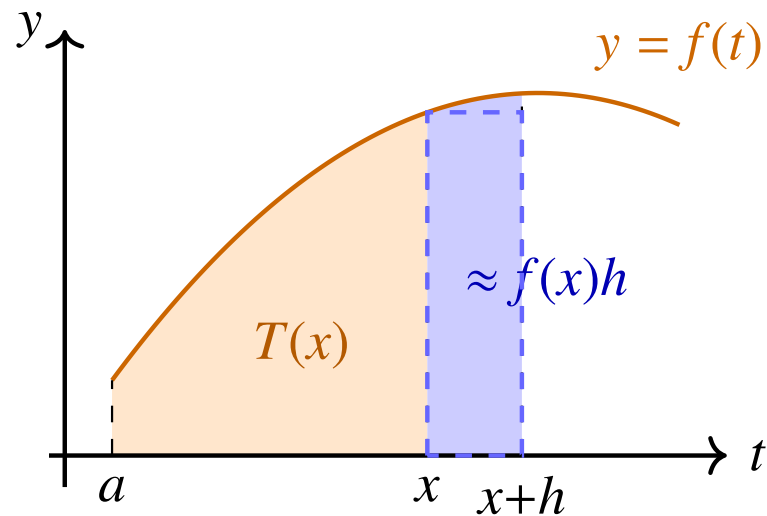
- 3 $h \rightarrow 0$ esetén $c_h \rightarrow x$, és f folytonossága miatt:

$$T'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) = f(x). \quad \square$$

A területfüggvény deriváltja (1. alaptétel)

Tétel (Az analízis alaptétele, 1. rész)

Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n, akkor $T(x) = \int_a^x f(t) dt$ differenciálható $[a, b]$ -n, és

$$T'(x) = f(x).$$


Bizonyítás.

- 1 A különbségi hányados:

$$\frac{T(x+h) - T(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

- 2 Az integrálközép-tétel szerint $\exists c_h \in (x, x+h)$:

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c_h).$$

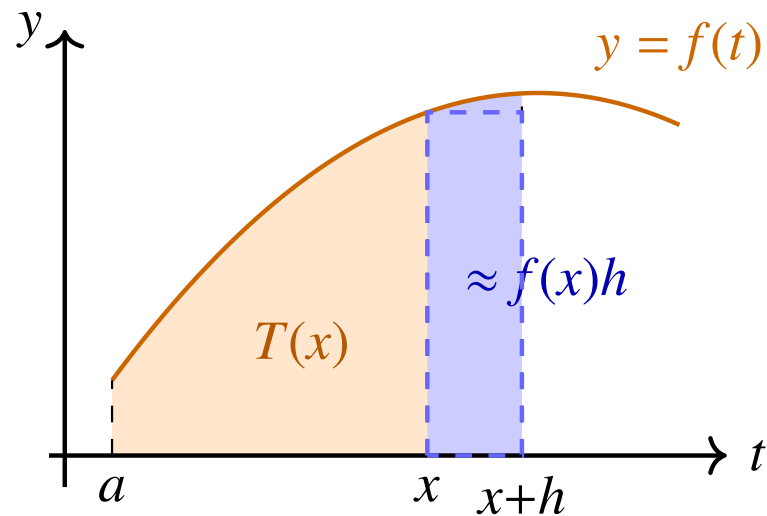
- 3 $h \rightarrow 0$ esetén $c_h \rightarrow x$, és f folytonossága miatt:

$$T'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) = f(x). \quad \square$$

A területfüggvény deriváltja (1. alaptétel)

Tétel (Az analízis alaptétele, 1. rész)

Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n, akkor $T(x) = \int_a^x f(t) dt$ differenciálható $[a, b]$ -n, és

$$T'(x) = f(x).$$


Bizonyítás.

- ① A különbségi hányados:

$$\frac{T(x+h) - T(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

- ② Az integrálközep-tétel szerint $\exists c_h \in (x, x+h)$:

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c_h).$$

- ③ $h \rightarrow 0$ esetén $c_h \rightarrow x$, és f folytonossága miatt:

$$T'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) = f(x). \quad \square$$

A Newton–Leibniz-tétel (2. alaptétel)

Tétel (Az analízis alaptétele, 2. rész)

Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n és F tetszőleges primitív függvénye f -nek, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Jelölés: $F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b.$

Bizonyítás.

- 1 Az 1. alaptétel szerint $T(x) = \int_a^x f(t) dt$ primitív függvénye f -nek.
- 2 F szintén primitív függvénye f -nek, tehát a primitív függvény egyértelműsége alapján:

$$T(x) = F(x) + C$$

valamely $C \in \mathbb{R}$ konstanssal.

- 3 $T(a) = 0$ behelyettesítésével: $0 = F(a) + C$, tehát $C = -F(a)$.
- 4 $x = b$ behelyettesítésével:

$$\int_a^b f(x) dx = T(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

□

A Newton–Leibniz-tétel (2. alaptétel)

Tétel (Az analízis alaptétele, 2. rész)

Ha f **folytonos** $[a, b]$ -n és F tetszőleges primitív függvénye f -nek, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Jelölés: $F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b.$

Bizonyítás.

- ① Az 1. alaptétel szerint $T(x) = \int_a^x f(t) dt$ primitív függvénye f -nek.
- ② F szintén primitív függvénye f -nek, tehát a primitív függvény egyértelműsége alapján:

$$T(x) = F(x) + C$$

valamely $C \in \mathbb{R}$ konstanssal.

- ③ $T(a) = 0$ behelyettesítésével: $0 = F(a) + C$, tehát $C = -F(a)$.
- ④ $x = b$ behelyettesítésével:

$$\int_a^b f(x) dx = T(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

□

Első példák a Newton–Leibniz-tétellel

1. példa: $\int_0^1 x^2 dx$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. példa: $\int_0^1 e^x dx$

$$\int_0^1 e^x dx = \left[e^x \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Megjegyzés. Ezeket az értékeket az előző alfejezetben Riemann-összegekkel, több diányi számítással vezettük le. A Newton–Leibniz-tétellel mindkettő **két sorban** kijön.

3. példa: $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{1/2} dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \left[\sqrt{x^3} \right]_1^4 = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}.$$

Első példák a Newton–Leibniz-tétellel

1. példa: $\int_0^1 x^2 dx$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. példa: $\int_0^1 e^x dx$

$$\int_0^1 e^x dx = \left[e^x \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Megjegyzés. Ezeket az értékeket az előző alfejezetben Riemann-összegekkel, több diányi számítással vezettük le. A Newton–Leibniz-tétellel mindkettő **két sorban** kijön.

3. példa: $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{1/2} dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \left[\sqrt{x^3} \right]_1^4 = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}.$$

Első példák a Newton–Leibniz-tétellel

1. példa: $\int_0^1 x^2 dx$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. példa: $\int_0^1 e^x dx$

$$\int_0^1 e^x dx = \left[e^x \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Megjegyzés. Ezeket az értékeket az előző alfejezetben Riemann-összegekkel, több diányi számítással vezettük le. A Newton–Leibniz-tétellel mindkettő **két sorban** kijön.

3. példa: $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{1/2} dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \left[\sqrt{x^3} \right]_1^4 = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}.$$

Első példák a Newton–Leibniz-tétellel

1. példa: $\int_0^1 x^2 dx$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. példa: $\int_0^1 e^x dx$

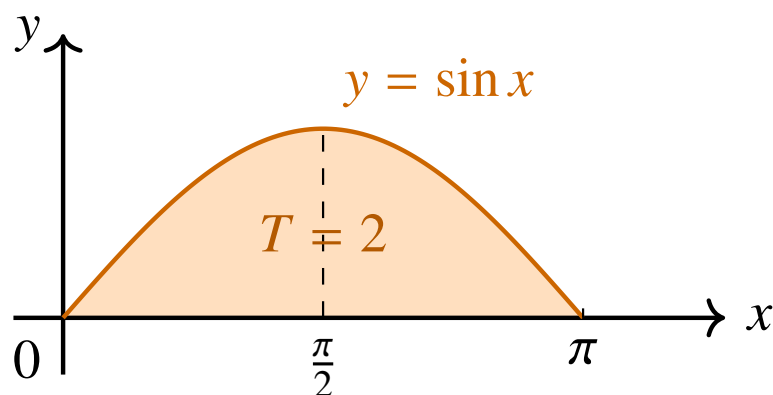
$$\int_0^1 e^x dx = \left[e^x \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Megjegyzés. Ezeket az értékeket az előző alfejezetben Riemann-összegekkel, több diányi számítással vezettük le. A Newton–Leibniz-tétellel mindkettő **két sorban** kijön.

3. példa: $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{1/2} dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \left[\sqrt{x^3} \right]_1^4 = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}.$$

Kidolgozott példa: $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$



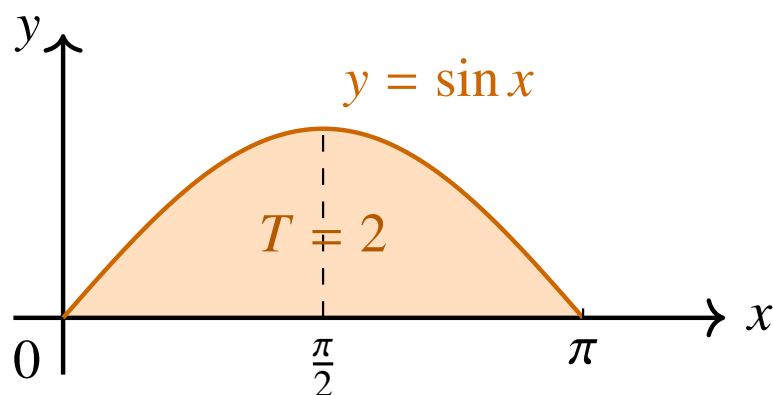
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \, dx &= \left[-\cos x \right]_0^{\pi} \\ &= (-\cos \pi) - (-\cos 0) \\ &= (1) - (-1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Variáció: teljes periódus

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0.$$

Megjegyzés. Az eredmény 0, mert a $[0, \pi]$ -n pozitív és a $[\pi, 2\pi]$ -n negatív területek **kiejtik egymást** (előjeles terület!).

Kidolgozott példa: $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$



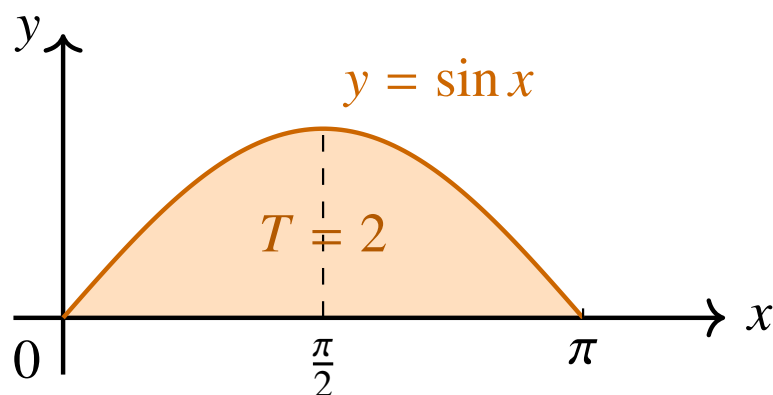
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \, dx &= \left[-\cos x \right]_0^{\pi} \\ &= (-\cos \pi) - (-\cos 0) \\ &= (1) - (-1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Variáció: teljes periódus

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0.$$

Megjegyzés. Az eredmény 0, mert a $[0, \pi]$ -n pozitív és a $[\pi, 2\pi]$ -n negatív területek **kiejtik egymást** (előjeles terület!).

Kidolgozott példa: $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$



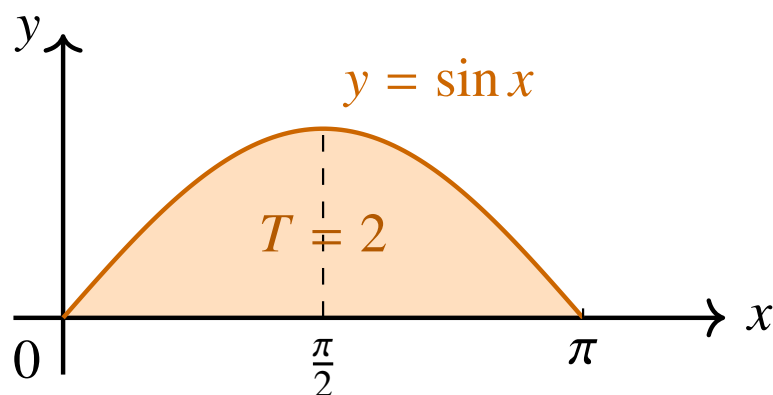
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \, dx &= \left[-\cos x \right]_0^{\pi} \\ &= (-\cos \pi) - (-\cos 0) \\ &= (1) - (-1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Variáció: teljes periódus

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0.$$

Megjegyzés. Az eredmény 0, mert a $[0, \pi]$ -n pozitív és a $[\pi, 2\pi]$ -n negatív területek **kiejtik egymást** (előjeles terület!).

Kidolgozott példa: $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$



$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \, dx &= \left[-\cos x \right]_0^{\pi} \\ &= (-\cos \pi) - (-\cos 0) \\ &= (1) - (-1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Variáció: teljes periódus

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0.$$

Megjegyzés. Az eredmény 0, mert a $[0, \pi]$ -n pozitív és a $[\pi, 2\pi]$ -n negatív területek **kiejtik egymást** (előjeles terület!).

Összetettebb példák

1. példa: $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln x \right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

2. példa: $\int_0^{\pi/2} (2 \cos x + 3x) dx$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (2 \cos x + 3x) dx &= \left[2 \sin x + \frac{3}{2} x^2 \right]_0^{\pi/2} \\ &= \left(2 \sin \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \right) - (2 \sin 0 + 0) = 2 + \frac{3\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Összetettebb példák

1. példa: $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln x \right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

2. példa: $\int_0^{\pi/2} (2 \cos x + 3x) dx$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (2 \cos x + 3x) dx &= \left[2 \sin x + \frac{3}{2} x^2 \right]_0^{\pi/2} \\ &= \left(2 \sin \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \right) - (2 \sin 0 + 0) = 2 + \frac{3\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Összefoglalás: deriválás és integrálás

Az analízis alaptétele – a két irány

$$\textbf{Differenciálás} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\textbf{Integrálás} \quad \longrightarrow \quad \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

A deriválás és az integrálás **egymás inverz műveletei** (a konstans eltolás erejéig).

A számítás menete a gyakorlatban

- 1 A Riemann-összeg elméleti alapot ad; a Newton–Leibniz-tétel hatékony számítási eszközt.
- 2 Keressük meg f egy F primitív függvényét.
- 3 Számítsuk ki $F(b) - F(a)$ értékét.

Összefoglalás: deriválás és integrálás

Az analízis alaptétele – a két irány

$$\textbf{Differenciálás} \longrightarrow \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\textbf{Integrálás} \longrightarrow \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

A deriválás és az integrálás **egymás inverz műveletei** (a konstans eltolás erejéig).

A számítás menete a gyakorlatban

- 1 A Riemann-összeg **elméleti alapot** ad; a Newton–Leibniz-tétel **hatékony számítási eszközt**.
- 2 Keressük meg f egy F primitív függvényét.
- 3 Számítsuk ki $F(b) - F(a)$ értékét.

Összefoglalás: deriválás és integrálás

Az analízis alaptétele – a két irány

$$\textbf{Differenciálás} \longrightarrow \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\textbf{Integrálás} \longrightarrow \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

A deriválás és az integrálás **egymás inverz műveletei** (a konstans eltolás erejéig).

A számítás menete a gyakorlatban

- 1 A Riemann-összeg **elméleti alapot** ad; a Newton–Leibniz-tétel **hatékony számítási eszközt**.
- 2 Keressük meg f egy F primitív függvényét.
- 3 Számítsuk ki $F(b) - F(a)$ értékét.

Összefoglalás: deriválás és integrálás

Az analízis alaptétele – a két irány

$$\text{Differenciálás} \longrightarrow \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\text{Integrálás} \longrightarrow \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

A deriválás és az integrálás **egymás inverz műveletei** (a konstans eltolás erejéig).

A számítás menete a gyakorlatban

- 1 A Riemann-összeg **elméleti alapot** ad; a Newton–Leibniz-tétel **hatékony számítási eszközt**.
- 2 Keressük meg f egy F primitív függvényét.
- 3 Számítsuk ki $F(b) - F(a)$ értékét.

Összefoglalás: deriválás és integrálás

Az analízis alaptétele – a két irány

$$\text{Differenciálás} \longrightarrow \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\text{Integrálás} \longrightarrow \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

A deriválás és az integrálás **egymás inverz műveletei** (a konstans eltolás erejéig).

A számítás menete a gyakorlatban

- 1 A Riemann-összeg **elméleti alapot** ad; a Newton–Leibniz-tétel **hatékony számítási eszközt**.
- 2 Keressük meg f egy F primitív függvényét.
- 3 Számítsuk ki $F(b) - F(a)$ értékét.

Tagolás

- 1 Közelítés véges összegekkel
- 2 A véges összegek határértéke és a szumma jel
- 3 A határozott integrál
- 4 Newton–Leibniz-tétel (az analízis alaptétele)
- 5 A határozatlan integrál és a helyettesítési szabály**

A helyettesítési szabály

Jelölés: Határozatlan integrál

Legyen f egy függvény. A **határozatlan integrál** jelölése:

$$\int f(x) dx.$$

Jelentése: A f függvény **primitív függvényeinek halmaza**.

Tétel: Helyettesítési szabály (határozatlan integrál)

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)).$$

Biz. A láncszabály szerint $H(x) = F(g(x))$ függvény deriváltja $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$. □

- Legyen $u = g(x)$. Ekkor $\frac{du}{dx} = g'(x)$, ami **szimbolikusan** $du = g'(x) dx$.

$$\int \underbrace{f(g(x))}_u \underbrace{g'(x) dx}_{du} = \int f(u) du = F(u) = F(g(x)).$$

A helyettesítési szabály

Jelölés: Határozatlan integrál

Legyen f egy függvény. A **határozatlan integrál** jelölése:

$$\int f(x) dx.$$

Jelentése: A f függvény **primitív függvényeinek halmaza**.

Tétel: Helyettesítési szabály (határozatlan integrál)

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)).$$

Biz. A láncszabály szerint $H(x) = F(g(x))$ függvény deriváltja $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$. □

- Legyen $u = g(x)$. Ekkor $\frac{du}{dx} = g'(x)$, ami **szimbolikusan** $du = g'(x) dx$.

$$\int \underbrace{f(g(x))}_u \underbrace{g'(x) dx}_{du} = \int f(u) du = F(u) = F(g(x)).$$

A helyettesítési szabály

Jelölés: Határozatlan integrál

Legyen f egy függvény. A **határozatlan integrál** jelölése:

$$\int f(x) dx.$$

Jelentése: A f függvény **primitív függvényeinek halmaza**.

Tétel: Helyettesítési szabály (határozatlan integrál)

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)).$$

Biz. A láncszabály szerint $H(x) = F(g(x))$ függvény deriváltja $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$. □

- Legyen $u = g(x)$. Ekkor $\frac{du}{dx} = g'(x)$, ami **szimbolikusan** $du = g'(x) dx$.

$$\int \underbrace{f(g(x))}_u \underbrace{g'(x) dx}_{du} = \int f(u) du = F(u) = F(g(x)).$$

A helyettesítési szabály

Jelölés: Határozatlan integrál

Legyen f egy függvény. A **határozatlan integrál** jelölése:

$$\int f(x) dx.$$

Jelentése: A f függvény **primitív függvényeinek halmaza**.

Tétel: Helyettesítési szabály (határozatlan integrál)

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)).$$

Biz. A láncszabály szerint $H(x) = F(g(x))$ függvény deriváltja $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$. □

- Legyen $u = g(x)$. Ekkor $\frac{du}{dx} = g'(x)$, ami **szimbolikusan** $du = g'(x) dx$.

$$\int \underbrace{f(g(x))}_u \underbrace{g'(x) dx}_{du} = \int f(u) du = F(u) = F(g(x)).$$

A helyettesítési szabály – alappéldák

1. példa: $\int 2x e^{x^2} dx$

Legyen $u = x^2$, ekkor $du = 2x dx$:

$$\int 2x e^{x^2} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

Ellenőrzés: $(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x. \checkmark$

2. példa: $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Legyen $u = \ln x$, ekkor $du = \frac{1}{x} dx$:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

Ellenőrzés: $\left(\frac{(\ln x)^2}{2}\right)' = \frac{2 \ln x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}. \checkmark$

A helyettesítési szabály – alappéldák

1. példa: $\int 2x e^{x^2} dx$

Legyen $u = x^2$, ekkor $du = 2x dx$:

$$\int 2x e^{x^2} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

Ellenőrzés: $(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x. \checkmark$

2. példa: $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Legyen $u = \ln x$, ekkor $du = \frac{1}{x} dx$:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

Ellenőrzés: $\left(\frac{(\ln x)^2}{2}\right)' = \frac{2 \ln x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}. \checkmark$

Határozott integrál helyettesítéssel

Tétel: Helyettesítési szabály (határozott integrál)

Ha g differenciálható $[a, b]$ -n és f folytonos g képkészletén, akkor

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

- 1 A határokat is át kell számítani!
- 2 $x = a \Rightarrow u = g(a)$
- 3 $x = b \Rightarrow u = g(b)$.

Példa: $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

Legyen $u = x^2$, $du = 2x dx$.

Határok: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 1$.

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_0^1 = \frac{1}{2} (e^1 - 1) = \frac{e - 1}{2}.$$

Határozott integrál helyettesítéssel

Tétel: Helyettesítési szabály (határozott integrál)

Ha g differenciálható $[a, b]$ -n és f folytonos g képkészletén, akkor

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

- 1 A határokat is át kell számítani!
- 2 $x = a \Rightarrow u = g(a)$
- 3 $x = b \Rightarrow u = g(b)$.

Példa: $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

Legyen $u = x^2$, $du = 2x dx$.

Határok: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 1$.

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_0^1 = \frac{1}{2} (e^1 - 1) = \frac{e - 1}{2}.$$

Határozott integrál helyettesítéssel

Tétel: Helyettesítési szabály (határozott integrál)

Ha g differenciálható $[a, b]$ -n és f folytonos g képkészletén, akkor

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

- ❶ A határokat is át kell számítani!
- ❷ $x = a \Rightarrow u = g(a)$
- ❸ $x = b \Rightarrow u = g(b)$.

Példa: $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

Legyen $u = x^2$, $du = 2x dx$.

Határok: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 1$.

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_0^1 = \frac{1}{2} (e^1 - 1) = \frac{e - 1}{2}.$$

Határozott integrál helyettesítéssel

Tétel: Helyettesítési szabály (határozott integrál)

Ha g differenciálható $[a, b]$ -n és f folytonos g képkészletén, akkor

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

- ❶ A határokat is át kell számítani!
- ❷ $x = a \Rightarrow u = g(a)$
- ❸ $x = b \Rightarrow u = g(b)$.

Példa: $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

Legyen $u = x^2$, $du = 2x dx$.

Határok: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 1$.

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_0^1 = \frac{1}{2} (e^1 - 1) = \frac{e - 1}{2}.$$

Határozott integrál helyettesítéssel

Tétel: Helyettesítési szabály (határozott integrál)

Ha g differenciálható $[a, b]$ -n és f folytonos g képkészletén, akkor

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

- ① A határokat is át kell számítani!
- ② $x = a \Rightarrow u = g(a)$
- ③ $x = b \Rightarrow u = g(b)$.

Példa: $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

Legyen $u = x^2$, $du = 2x dx$.

Határok: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = 1$.

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_0^1 = \frac{1}{2} (e^1 - 1) = \frac{e - 1}{2}.$$

Kör területe helyettesítéssel

Feladat

Számítsuk ki a r sugarú kör területét helyettesítési szabály segítségével!

- A kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$.
- A kör felső félkörének egyenlete: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- A terület kétszerese a felső félkör alatti területnek:

$$T = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

- Helyettesítés: $x = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$.
- Határok: $x = -r \Rightarrow t = -\pi/2$, $x = r \Rightarrow t = \pi/2$.

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) dt &= r^2 \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= r^2 (\pi/2 - (-\pi/2)) &= r^2 \pi. \end{aligned}$$

Kör területe helyettesítéssel

Feladat

Számítsuk ki a r sugarú kör területét helyettesítési szabály segítségével!

- A kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$.
- A kör felső félkörének egyenlete: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- A terület kétszerese a felső félkör alatti területnek:

$$T = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

- Helyettesítés: $x = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$.
- Határok: $x = -r \Rightarrow t = -\pi/2$, $x = r \Rightarrow t = \pi/2$.

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) dt &= r^2 \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= r^2(\pi/2 - (-\pi/2)) &= r^2\pi. \end{aligned}$$

Kör területe helyettesítéssel

Feladat

Számítsuk ki a r sugarú kör területét helyettesítési szabály segítségével!

- A kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$.
- A kör felső félkörének egyenlete: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- A terület kétszerese a felső félkör alatti területnek:

$$T = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

- Helyettesítés: $x = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$.
- Határok: $x = -r \Rightarrow t = -\pi/2$, $x = r \Rightarrow t = \pi/2$.

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) dt &= r^2 \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= r^2 (\pi/2 - (-\pi/2)) &= r^2 \pi. \end{aligned}$$

Kör területe helyettesítéssel

Feladat

Számítsuk ki a r sugarú kör területét helyettesítési szabály segítségével!

- A kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$.
- A kör felső félkörének egyenlete: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- A terület kétszerese a felső félkör alatti területnek:

$$T = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

- Helyettesítés: $x = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$.
- Határok: $x = -r \Rightarrow t = -\pi/2$, $x = r \Rightarrow t = \pi/2$.

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) dt &= r^2 \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= r^2 (\pi/2 - (-\pi/2)) &= r^2 \pi. \end{aligned}$$

Kör területe helyettesítéssel

Feladat

Számítsuk ki a r sugarú kör területét helyettesítési szabály segítségével!

- A kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$.
- A kör felső félkörének egyenlete: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- A terület kétszerese a felső félkör alatti területnek:

$$T = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

- Helyettesítés: $x = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$.
- Határok: $x = -r \Rightarrow t = -\pi/2$, $x = r \Rightarrow t = \pi/2$.

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) dt &= r^2 \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= r^2 (\pi/2 - (-\pi/2)) &= r^2 \pi. \end{aligned}$$

Kör területe helyettesítéssel

Feladat

Számítsuk ki a r sugarú kör területét helyettesítési szabály segítségével!

- A kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$.
- A kör felső félkörének egyenlete: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- A terület kétszerese a felső félkör alatti területnek:

$$T = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

- Helyettesítés: $x = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$.
- Határok: $x = -r \Rightarrow t = -\pi/2$, $x = r \Rightarrow t = \pi/2$.

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cdot r \cos t dt &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) dt &= r^2 \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= r^2(\pi/2 - (-\pi/2)) &= r^2 \pi. \end{aligned}$$

Összefoglalás a helyettesítési szabályról

Tipikus hiba: határok elfelejtett átírása

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx \neq \frac{1}{2} \int_0^2 e^u du \Big|_{u=x^2} \quad (\text{ha a határokat nem írjuk át } u\text{-ban}).$$

Ha u -ban számolunk, a határok is u -ban értendők: $u \in [0^2, 2^2] = [0, 4]$.

Mikor próbáljunk helyettesítést?

- Az integrandusban felismerhető egy $g(x)$ összetett belső függvény.
- $g'(x)$ (konstans szorzóerejéig) szintén szerepel az integrandusban.
- Tipikus alakok:

$$\int f(ax + b) dx,$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx,$$

$$\int g(x)^n g'(x) dx,$$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx.$$

Összefoglalás a helyettesítési szabályról

Tipikus hiba: határok elfelejtett átírása

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx \neq \frac{1}{2} \int_0^2 e^u du \Big|_{u=x^2} \quad (\text{ha a határokat nem írjuk át } u\text{-ban}).$$

Ha u -ban számolunk, a határok is u -ban értendők: $u \in [0^2, 2^2] = [0, 4]$.

Mikor próbáljunk helyettesítést?

- Az integrandusban felismerhető egy $g(x)$ összetett belső függvény.
- $g'(x)$ (konstans szorzóerejéig) szintén szerepel az integrandusban.
- Tipikus alakok:

$$\int f(ax + b) dx,$$

$$\int g(x)^n g'(x) dx,$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx,$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx.$$

Összefoglalás a helyettesítési szabályról

Tipikus hiba: határok elfelejtett átírása

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx \neq \frac{1}{2} \int_0^2 e^u du \Big|_{u=x^2} \quad (\text{ha a határokat nem írjuk át } u\text{-ban}).$$

Ha u -ban számolunk, a határok is u -ban értendők: $u \in [0^2, 2^2] = [0, 4]$.

Mikor próbáljunk helyettesítést?

- Az integrandusban felismerhető egy $g(x)$ **összetett belső függvény**.
- $g'(x)$ (konstans szorzóerejéig) **szintén szerepel** az integrandusban.
- Tipikus alakok:

$$\int f(ax + b) dx,$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx,$$

$$\int g(x)^n g'(x) dx,$$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx.$$

Összefoglalás a helyettesítési szabályról

Tipikus hiba: határok elfelejtett átírása

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx \neq \frac{1}{2} \int_0^2 e^u du \Big|_{u=x^2} \quad (\text{ha a határokat nem írjuk át } u\text{-ban}).$$

Ha u -ban számolunk, a határok is u -ban értendők: $u \in [0^2, 2^2] = [0, 4]$.

Mikor próbáljunk helyettesítést?

- Az integrandusban felismerhető egy $g(x)$ **összetett belső függvény**.
- $g'(x)$ (konstans szorzóerejéig) **szintén szerepel** az integrandusban.
- Tipikus alakok:

$$\int f(ax + b) dx,$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx,$$

$$\int g(x)^n g'(x) dx,$$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx.$$

Összefoglalás a helyettesítési szabályról

Tipikus hiba: határok elfelejtett átírása

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx \neq \frac{1}{2} \int_0^2 e^u du \Big|_{u=x^2} \quad (\text{ha a határokat nem írjuk át } u\text{-ban}).$$

Ha u -ban számolunk, a határok is u -ban értendők: $u \in [0^2, 2^2] = [0, 4]$.

Mikor próbáljunk helyettesítést?

- Az integrandusban felismerhető egy $g(x)$ **összetett belső függvény**.
- $g'(x)$ (konstans szorzóerejéig) **szintén szerepel** az integrandusban.
- Tipikus alakok:

$$\int f(ax + b) dx,$$

$$\int g(x)^n g'(x) dx,$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx,$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx.$$

Köszönöm a figyelmet!