

A deriválás alkalmazásai (4. hét)

Matematika informatikusoknak 2

Nagy Gábor Péter

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

2025/2026-os tanév II. féléve

Tagolás

- 1 Függvény szélsőértékei
- 2 A Lagrange-féle középértéktétel
- 3 Monoton függvények és az első derivált teszt
- 4 Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása
- 5 Alkalmazott optimalizációs problémák
- 6 Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály
- 7 A Newton-módszer
- 8 Primitív függvények

Tagolás

- 1 Függvény szélsőértékei
- 2 A Lagrange-féle középértéktétel
- 3 Monoton függvények és az első derivált teszt
- 4 Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása
- 5 Alkalmazott optimalizációs problémák
- 6 Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály
- 7 A Newton-módszer
- 8 Primitív függvények

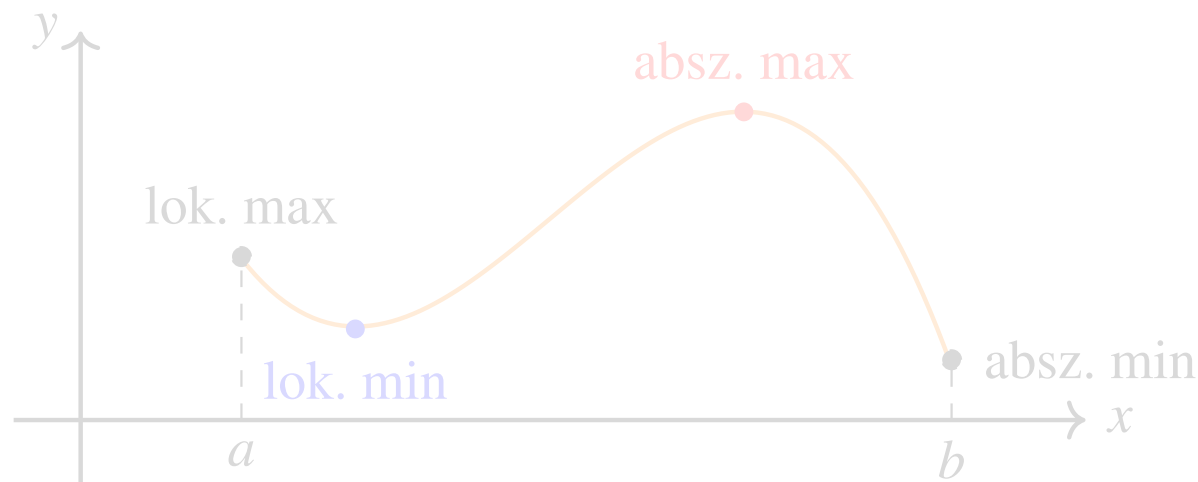
Abszolút és lokális szélsőértékek

Definíció: Abszolút (globális) szélsőértékek

Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f -nek **abszolút maximuma** van a $c \in D$ pontban, ha $f(c) \geq f(x)$ minden $x \in D$ -re. Hasonlóan, f -nek **abszolút minimuma** van c -ben, ha $f(c) \leq f(x)$ minden $x \in D$ -re.

Definíció: Lokális (helyi) szélsőértékek

Azt mondjuk, hogy f -nek **lokális maximuma** van a c pontban, ha van olyan $\delta > 0$, melyre $f(c) \geq f(x)$ minden $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap D$ -re. Hasonlóan értelmezzük a **lokális minimumot**.



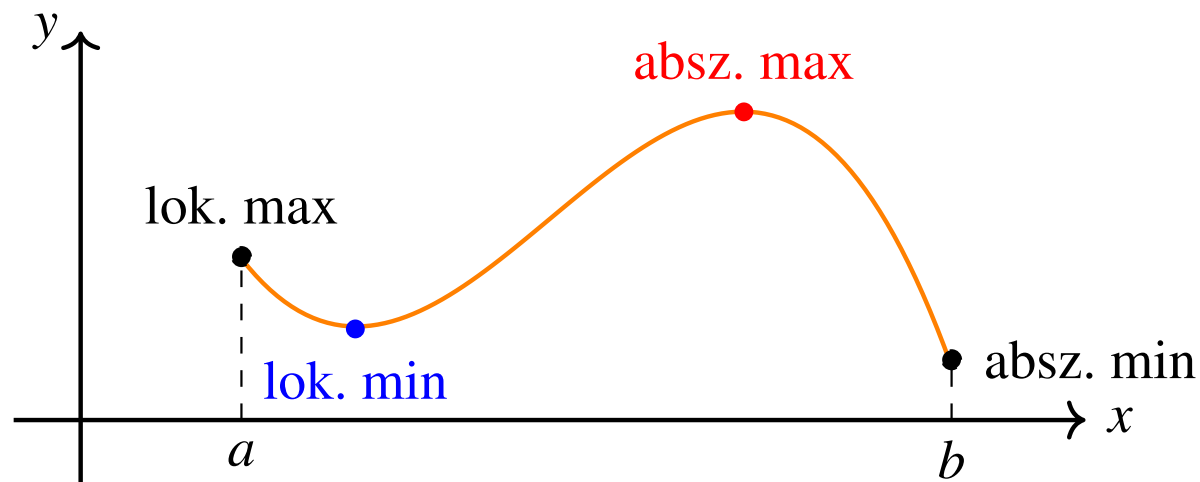
Abszolút és lokális szélsőértékek

Definíció: Abszolút (globális) szélsőértékek

Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f -nek **abszolút maximuma** van a $c \in D$ pontban, ha $f(c) \geq f(x)$ minden $x \in D$ -re. Hasonlóan, f -nek **abszolút minimuma** van c -ben, ha $f(c) \leq f(x)$ minden $x \in D$ -re.

Definíció: Lokális (helyi) szélsőértékek

Azt mondjuk, hogy f -nek **lokális maximuma** van a c pontban, ha van olyan $\delta > 0$, melyre $f(c) \geq f(x)$ minden $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap D$ -re. Hasonlóan értelmezzük a **lokális minimumot**.

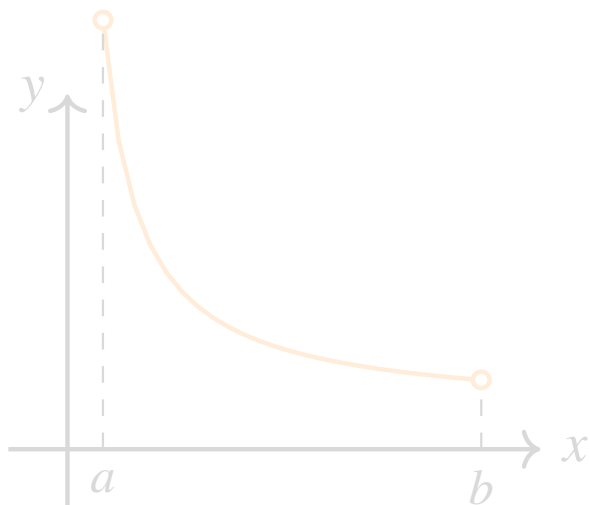


A Weierstrass-tétel (szélsőérték-tétel)

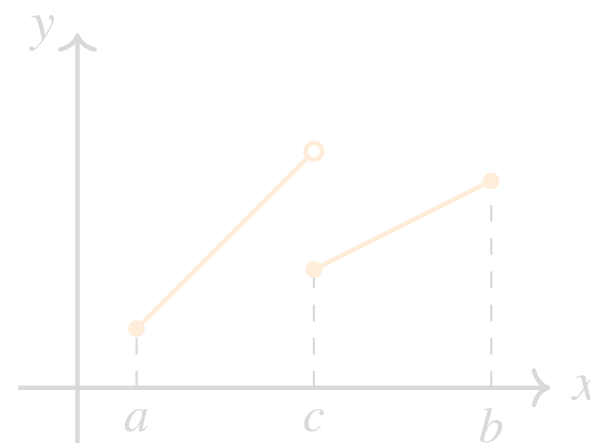
Tétel (Weierstrass)

Ha f **folytonos** a **zárt** $[a, b]$ intervallumon, akkor f felveszi az abszolút maximumát és az abszolút minimumát $[a, b]$ -n.

A tétel feltételei **nem** hagyhatók el:



Nyílt intervallum:
nincs abszolút max.



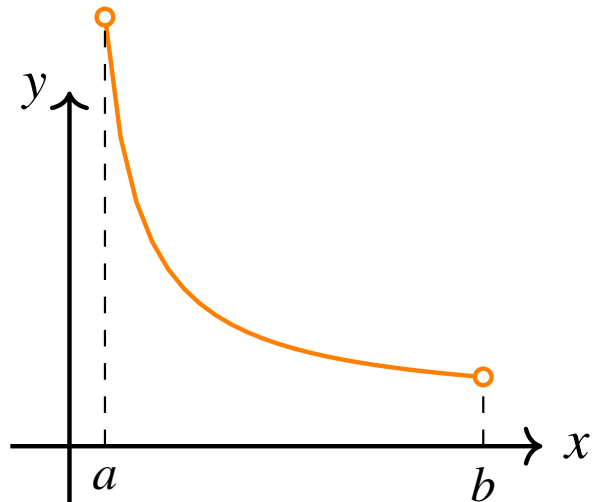
Szakadáson eset:
nincs abszolút max.

A Weierstrass-tétel (szélsőérték-tétel)

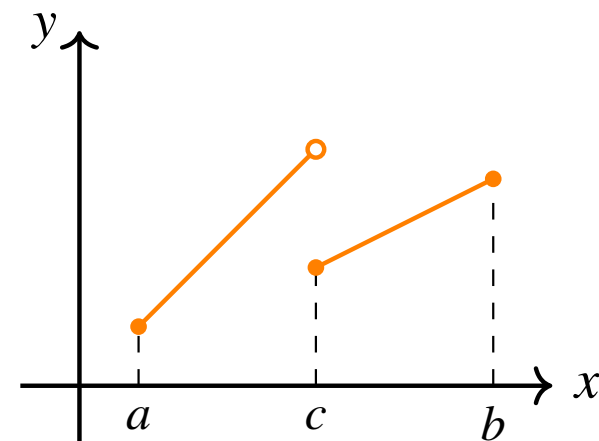
Tétel (Weierstrass)

Ha f **folytonos** a **zárt** $[a, b]$ intervallumon, akkor f felveszi az abszolút maximumát és az abszolút minimumát $[a, b]$ -n.

A tétel feltételei **nem hagyhatók el**:



Nyílt intervallum:
nincs abszolút max.

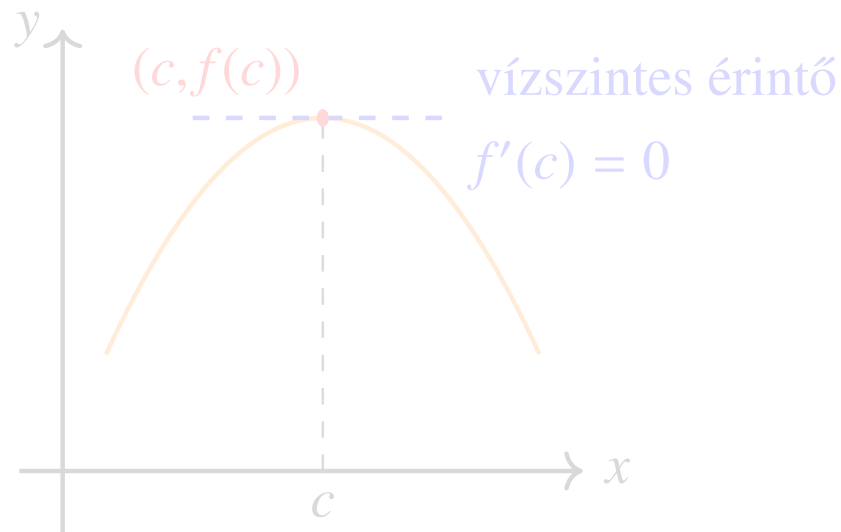


Szakadós eset:
nincs abszolút max.

A Fermat-tétel: lokális szélsőérték és a derivált

Tétel (Fermat)

Ha f -nek **lokális szélsőértéke** van a c belső pontban, és $f'(c)$ létezik, akkor $f'(c) = 0$.



Bizonyítás.

Tfh. f -nek lokális maximuma van c -ben. Ekkor elég kis h -ra:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \begin{cases} \leq 0, & \text{ha } h > 0, \\ \geq 0, & \text{ha } h < 0. \end{cases}$$

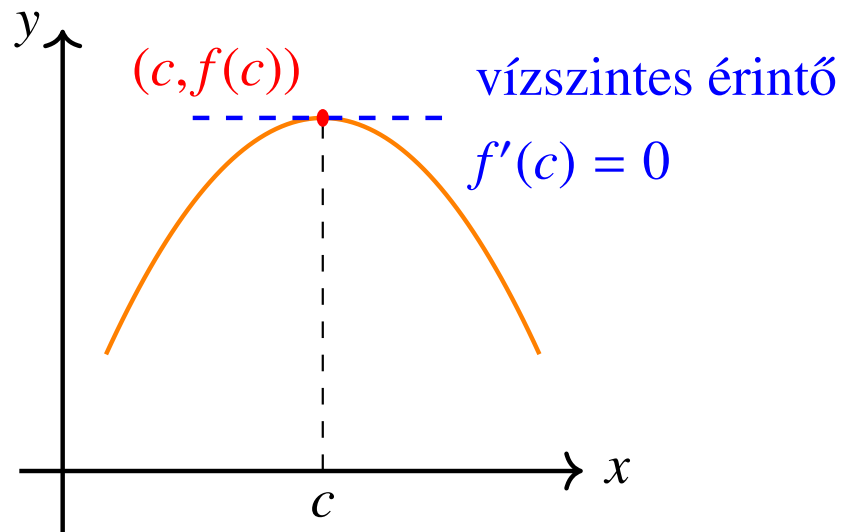
A jobb oldali határérték ≤ 0 , a bal oldali ≥ 0 .

Mivel $f'(c)$ létezik, mindkettő egyenlő, tehát $f'(c) = 0$. □

A Fermat-tétel: lokális szélsőérték és a derivált

Tétel (Fermat)

Ha f -nek **lokális szélsőértéke** van a c belső pontban, és $f'(c)$ létezik, akkor $f'(c) = 0$.



Bizonyítás.

Tfh. f -nek lokális maximuma van c -ben.
Ekkor elég kis h -ra:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \begin{cases} \leq 0, & \text{ha } h > 0, \\ \geq 0, & \text{ha } h < 0. \end{cases}$$

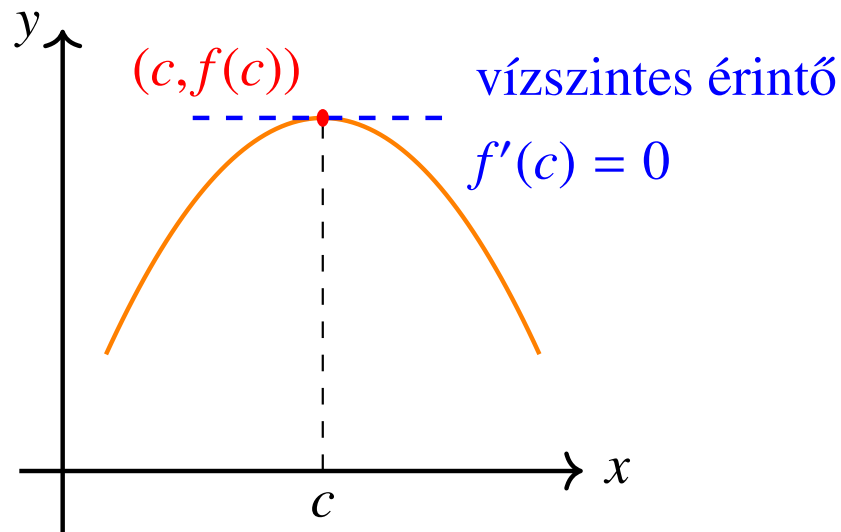
A jobb oldali határérték ≤ 0 , a bal oldali ≥ 0 .

Mivel $f'(c)$ létezik, mindkettő egyenlő, tehát $f'(c) = 0$. □

A Fermat-tétel: lokális szélsőérték és a derivált

Tétel (Fermat)

Ha f -nek **lokális szélsőértéke** van a c belső pontban, és $f'(c)$ létezik, akkor $f'(c) = 0$.



Bizonyítás.

Tfh. f -nek lokális maximuma van c -ben.
Ekkor elég kis h -ra:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \begin{cases} \leq 0, & \text{ha } h > 0, \\ \geq 0, & \text{ha } h < 0. \end{cases}$$

A jobb oldali határérték ≤ 0 , a bal oldali ≥ 0 .

Mivel $f'(c)$ létezik, mindkettő egyenlő, tehát $f'(c) = 0$. □

Kritikus pontok

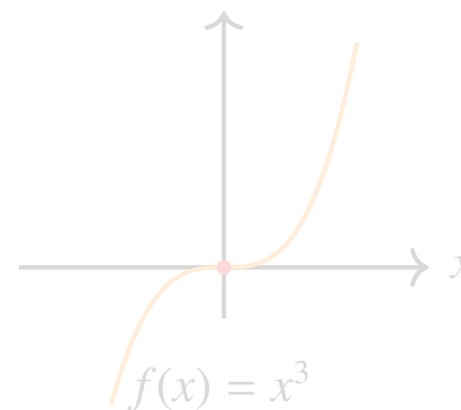
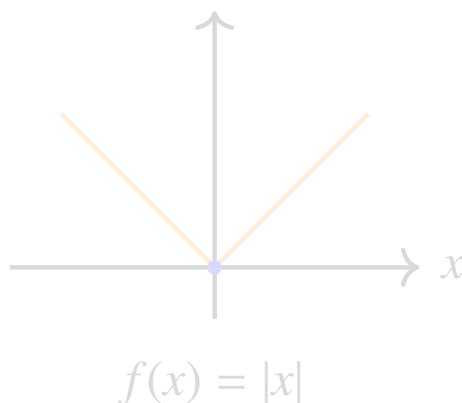
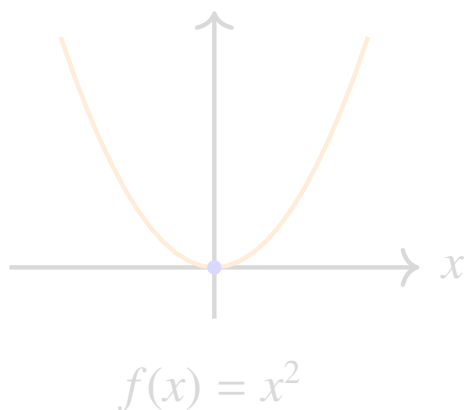
Definíció: Kritikus pont

Az f értelmezési tartományának belső pontját, c -t **kritikus pontnak** (stacionárius pontnak) nevezzük, ha $f'(c) = 0$ vagy $f'(c)$ nem létezik.

A Fermat-tétel köv.: lokális szélsőérték **csak kritikus pontban** lehet.

Példák kritikus pontokra

- $f(x) = x^2$: $f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow c = 0$ (lokális minimum).
- $f(x) = |x|$: $f'(0)$ nem létezik (lokális minimum).
- $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow c = 0$ (nem szélsőérték!).



Kritikus pontok

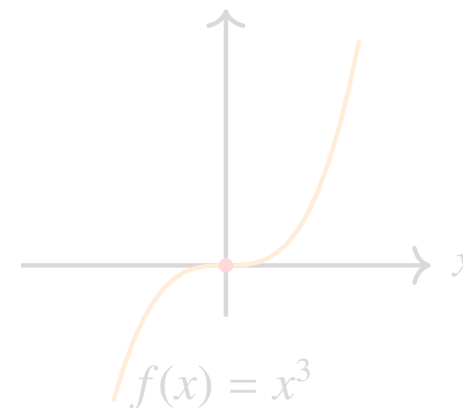
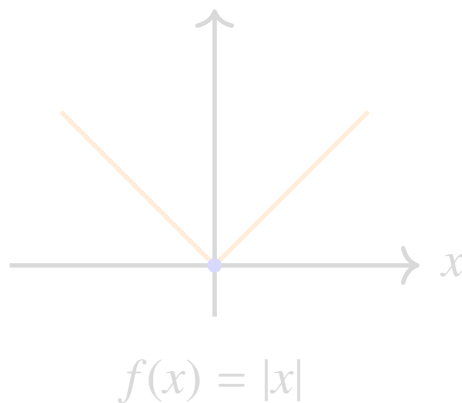
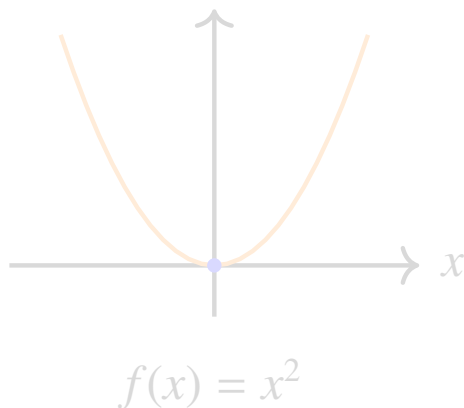
Definíció: Kritikus pont

Az f értelmezési tartományának belső pontját, c -t **kritikus pontnak** (stacionárius pontnak) nevezzük, ha $f'(c) = 0$ vagy $f'(c)$ nem létezik.

A Fermat-tétel köv.: lokális szélsőérték **csak kritikus pontban** lehet.

Példák kritikus pontokra

- $f(x) = x^2$: $f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow c = 0$ (lokális minimum).
- $f(x) = |x|$: $f'(0)$ nem létezik (lokális minimum).
- $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow c = 0$ (nem szélsőérték!).



Kritikus pontok

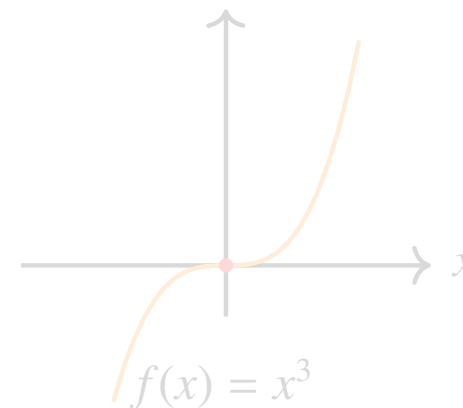
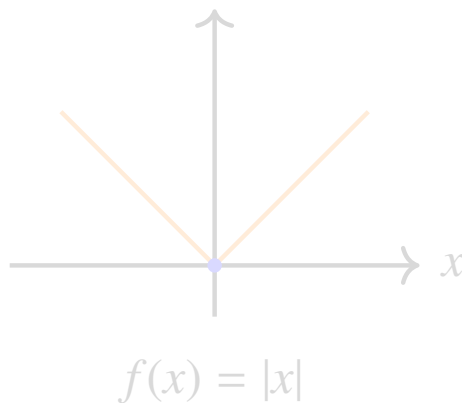
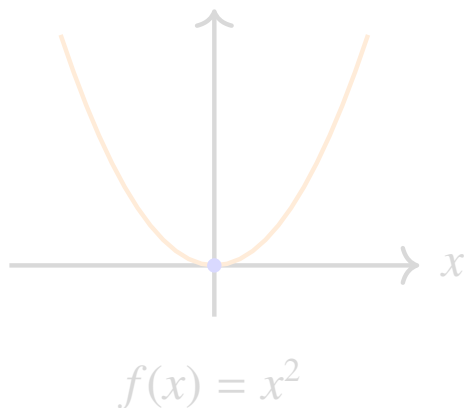
Definíció: Kritikus pont

Az f értelmezési tartományának belső pontját, c -t **kritikus pontnak** (stacionárius pontnak) nevezzük, ha $f'(c) = 0$ vagy $f'(c)$ nem létezik.

A Fermat-tétel köv.: lokális szélsőérték **csak kritikus pontban** lehet.

Példák kritikus pontokra

- $f(x) = x^2$: $f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow c = 0$ (lokális minimum).
- $f(x) = |x|$: $f'(0)$ nem létezik (lokális minimum).
- $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow c = 0$ (**nem szélsőérték!**).



Kritikus pontok

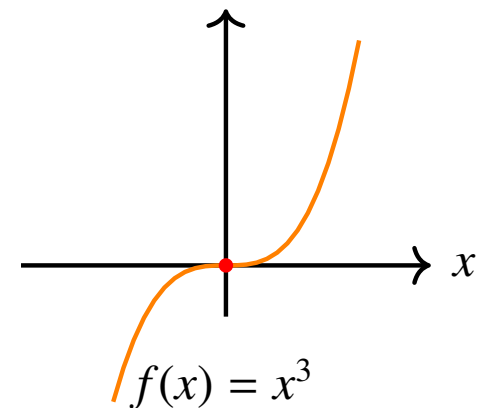
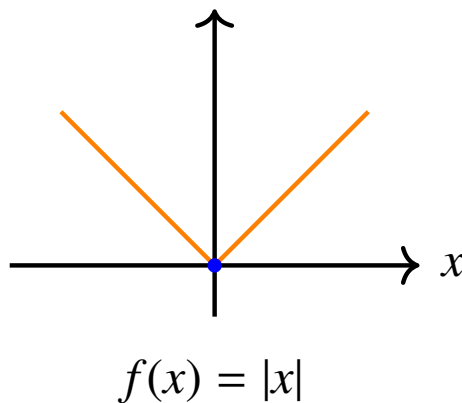
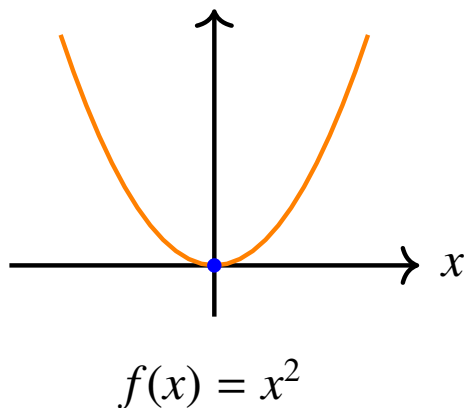
Definíció: Kritikus pont

Az f értelmezési tartományának belső pontját, c -t **kritikus pontnak** (stacionárius pontnak) nevezzük, ha $f'(c) = 0$ vagy $f'(c)$ nem létezik.

A Fermat-tétel köv.: lokális szélsőérték **csak kritikus pontban** lehet.

Példák kritikus pontokra

- $f(x) = x^2$: $f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow c = 0$ (lokális minimum).
- $f(x) = |x|$: $f'(0)$ nem létezik (lokális minimum).
- $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow c = 0$ (**nem szélsőérték!**).



Abszolút szélsőértékek keresése zárt intervallumon

Algoritmus: Zárt intervallum módszer

Legyen f differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon. Az abszolút szélsőértékek megtalálásának lépései:

- 1 Határozzuk meg f kritikus pontjait (a, b) -ben.
- 2 Számítsuk ki f értékét a kritikus pontokban és a végpontokban: $f(a)$, $f(b)$.
- 3 A legnagyobb érték az abszolút maximum, a legkisebb az abszolút minimum.

Megjegyzés.

- A módszer a Weierstrass-tételre és Fermat-tételre épül:
- A Weierstrass-tétel garantálja, hogy **létezik** maximum és minimum.
- A Fermat-tétel garantálja, hogy az abszolút szélsőérték **vagy kritikus pontban, vagy végpontban** van.

Abszolút szélsőértékek keresése zárt intervallumon

Algoritmus: Zárt intervallum módszer

Legyen f differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon. Az abszolút szélsőértékek megtalálásának lépései:

- 1 Határozzuk meg f **kritikus pontjait** (a, b) -ben.
- 2 Számítsuk ki f értékét a **kritikus pontokban** és a **végpontokban**: $f(a)$, $f(b)$.
- 3 A **legnagyobb** érték az abszolút maximum, a **legkisebb** az abszolút minimum.

Megjegyzés.

- A módszer a Weierstrass-tételre és Fermat-tételre épül:
- A Weierstrass-tétel garantálja, hogy **létezik** maximum és minimum.
- A Fermat-tétel garantálja, hogy az abszolút szélsőérték **vagy kritikus pontban, vagy végpontban** van.

Abszolút szélsőértékek keresése zárt intervallumon

Algoritmus: Zárt intervallum módszer

Legyen f differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon. Az abszolút szélsőértékek megtalálásának lépései:

- 1 Határozzuk meg f **kritikus pontjait** (a, b) -ben.
- 2 Számítsuk ki f értékét a **kritikus pontokban** és a **végpontokban**: $f(a)$, $f(b)$.
- 3 A **legnagyobb** érték az abszolút maximum, a **legkisebb** az abszolút minimum.

Megjegyzés.

- A módszer a Weierstrass-tételre és Fermat-tételre épül:
- A Weierstrass-tétel garantálja, hogy **létezik** maximum és minimum.
- A Fermat-tétel garantálja, hogy az abszolút szélsőérték **vagy kritikus pontban, vagy végpontban** van.

Abszolút szélsőértékek keresése zárt intervallumon

Algoritmus: Zárt intervallum módszer

Legyen f differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon. Az abszolút szélsőértékek megtalálásának lépései:

- 1 Határozzuk meg f **kritikus pontjait** (a, b) -ben.
- 2 Számítsuk ki f értékét a **kritikus pontokban** és a **végpontokban**: $f(a)$, $f(b)$.
- 3 A **legnagyobb** érték az abszolút maximum, a **legkisebb** az abszolút minimum.

Megjegyzés.

- A módszer a Weierstrass-tételre és Fermat-tételre épül:
- A Weierstrass-tétel garantálja, hogy **létezik** maximum és minimum.
- A Fermat-tétel garantálja, hogy az abszolút szélsőérték **vagy kritikus pontban, vagy végpontban** van.

Abszolút szélsőértékek keresése zárt intervallumon

Algoritmus: Zárt intervallum módszer

Legyen f differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon. Az abszolút szélsőértékek megtalálásának lépései:

- 1 Határozzuk meg f **kritikus pontjait** (a, b) -ben.
- 2 Számítsuk ki f értékét a **kritikus pontokban** és a **végpontokban**: $f(a)$, $f(b)$.
- 3 A **legnagyobb** érték az abszolút maximum, a **legkisebb** az abszolút minimum.

Megjegyzés.

- A módszer a Weierstrass-tételre és Fermat-tételre épül:
- A Weierstrass-tétel garantálja, hogy **létezik** maximum és minimum.
- A Fermat-tétel garantálja, hogy az abszolút szélsőérték **vagy kritikus pontban, vagy végpontban** van.

Abszolút szélsőértékek keresése zárt intervallumon

Algoritmus: Zárt intervallum módszer

Legyen f differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon. Az abszolút szélsőértékek megtalálásának lépései:

- 1 Határozzuk meg f **kritikus pontjait** (a, b) -ben.
- 2 Számítsuk ki f értékét a **kritikus pontokban** és a **végpontokban**: $f(a)$, $f(b)$.
- 3 A **legnagyobb** érték az abszolút maximum, a **legkisebb** az abszolút minimum.

Megjegyzés.

- A módszer a Weierstrass-tételre és Fermat-tételre épül:
- A Weierstrass-tétel garantálja, hogy **létezik** maximum és minimum.
- A Fermat-tétel garantálja, hogy az abszolút szélsőérték **vagy kritikus pontban, vagy végpontban** van.

Abszolút szélsőértékek keresése zárt intervallumon

Algoritmus: Zárt intervallum módszer

Legyen f differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon. Az abszolút szélsőértékek megtalálásának lépései:

- 1 Határozzuk meg f **kritikus pontjait** (a, b) -ben.
- 2 Számítsuk ki f értékét a **kritikus pontokban** és a **végpontokban**: $f(a)$, $f(b)$.
- 3 A **legnagyobb** érték az abszolút maximum, a **legkisebb** az abszolút minimum.

Megjegyzés.

- A módszer a Weierstrass-tételre és Fermat-tételre épül:
- A Weierstrass-tétel garantálja, hogy **létezik** maximum és minimum.
- A Fermat-tétel garantálja, hogy az abszolút szélsőérték **vagy kritikus pontban, vagy végpontban** van.

Kidolgozott példa

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - 3x + 1$ függvény abszolút szélsőértékeit a $[-2, 2]$ intervallumon!

1. Kritikus pontok:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

2. Függvényértékek:

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-1	3	-1	3
		lok. max	lok. min	

3. Eredmény:

- Abszolút maximum: $f(-1) = f(2) = 3$.
- Abszolút minimum: $f(-2) = f(1) = -1$.

Kidolgozott példa

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - 3x + 1$ függvény abszolút szélsőértékeit a $[-2, 2]$ intervallumon!

1. Kritikus pontok:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

2. Függvényértékek:

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-1	3	-1	3
		lok. max	lok. min	

3. Eredmény:

- Abszolút maximum: $f(-1) = f(2) = 3$.
- Abszolút minimum: $f(-2) = f(1) = -1$.

Kidolgozott példa

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - 3x + 1$ függvény abszolút szélsőértékeit a $[-2, 2]$ intervallumon!

1. Kritikus pontok:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

2. Függvényértékek:

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-1	3	-1	3
		lok. max	lok. min	

3. Eredmény:

- Abszolút maximum: $f(-1) = f(2) = 3$.
- Abszolút minimum: $f(-2) = f(1) = -1$.

Kidolgozott példa

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - 3x + 1$ függvény abszolút szélsőértékeit a $[-2, 2]$ intervallumon!

1. Kritikus pontok:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

2. Függvényértékek:

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-1	3	-1	3
		lok. max	lok. min	

3. Eredmény:

- Abszolút maximum: $f(-1) = f(2) = 3$.
- Abszolút minimum: $f(-2) = f(1) = -1$.

Tagolás

- 1 Függvény szélsőértékei
- 2 A Lagrange-féle középértéktétel**
- 3 Monoton függvények és az első derivált teszt
- 4 Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása
- 5 Alkalmazott optimalizációs problémák
- 6 Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály
- 7 A Newton-módszer
- 8 Primitív függvények

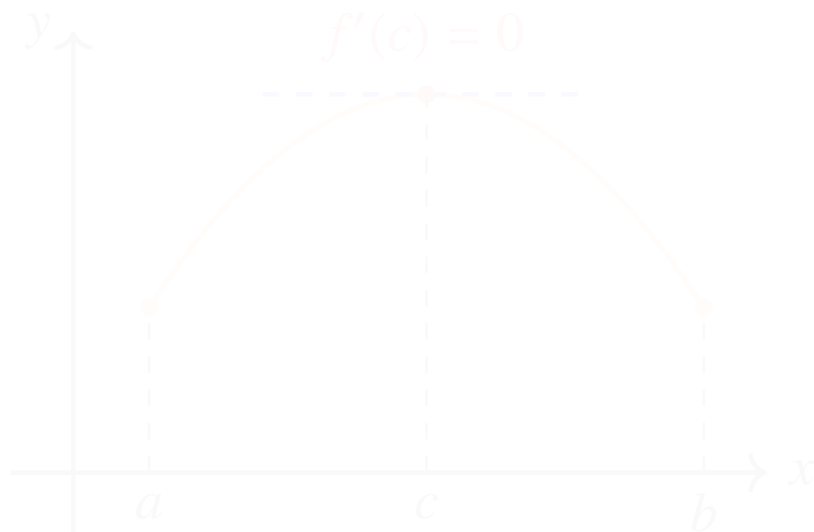
Rolle-tétel

Tétel (Rolle)

Ha f **folytonos** az $[a, b]$ zárt intervallumon, **differentiálható** az (a, b) nyílt intervallumon, és $f(a) = f(b)$, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$f'(c) = 0.$$

Bizonyítás.



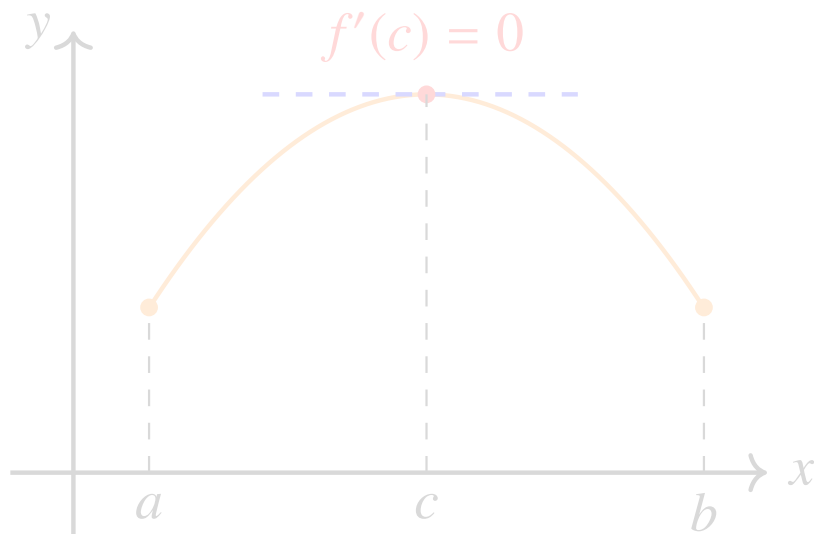
Rolle-tétel

Tétel (Rolle)

Ha f **folytonos** az $[a, b]$ zárt intervallumon, **differentiálható** az (a, b) nyílt intervallumon, és $f(a) = f(b)$, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$f'(c) = 0.$$

Bizonyítás.



- Weierstrass-tétel $\Rightarrow f$ felveszi a maximumát és minimumát $[a, b]$ -n.
- Ha mindkettő a végpontokban van $\Rightarrow f$ konstans (mert $f(a) = f(b)$) $\Rightarrow f'(c) = 0$ bármely c -re.
- Ha a max. vagy min. belső c pontban van $\Rightarrow$ Fermat-tétel $\Rightarrow f'(c) = 0$.

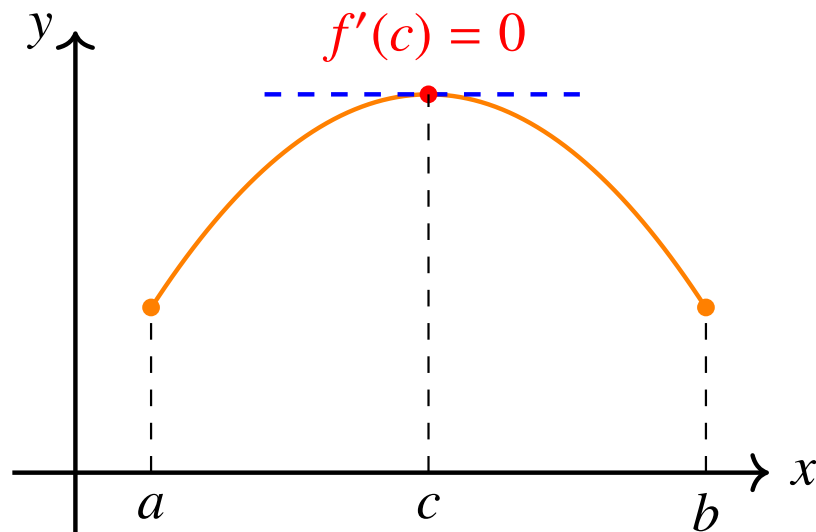
Rolle-tétel

Tétel (Rolle)

Ha f **folytonos** az $[a, b]$ zárt intervallumon, **differentiálható** az (a, b) nyílt intervallumon, és $f(a) = f(b)$, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$f'(c) = 0.$$

Bizonyítás.



- Weierstrass-tétel $\Rightarrow f$ felveszi a maximumát és minimumát $[a, b]$ -n.
- Ha mindkettő a végpontokban van $\Rightarrow f$ konstans (mert $f(a) = f(b)$) $\Rightarrow f'(c) = 0$ bármely c -re.
- Ha a max. vagy min. belső c pontban van $\Rightarrow$ Fermat-tétel $\Rightarrow f'(c) = 0$.

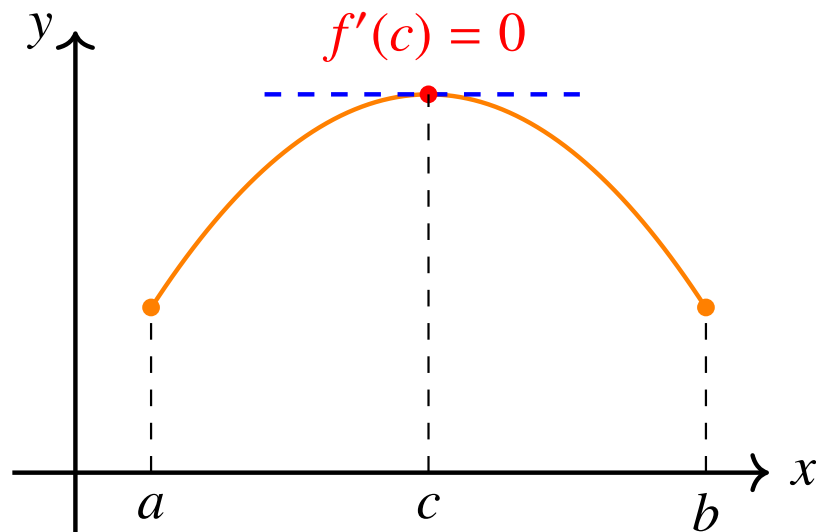
Rolle-tétel

Tétel (Rolle)

Ha f **folytonos** az $[a, b]$ zárt intervallumon, **differentiálható** az (a, b) nyílt intervallumon, és $f(a) = f(b)$, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$f'(c) = 0.$$

Bizonyítás.



- Weierstrass-tétel $\Rightarrow f$ felveszi a maximumát és minimumát $[a, b]$ -n.
- Ha mindkettő a végpontokban van $\Rightarrow f$ konstans (mert $f(a) = f(b)$) $\Rightarrow f'(c) = 0$ bármely c -re.
- Ha a max. vagy min. belső c pontban van $\Rightarrow$ Fermat-tétel $\Rightarrow f'(c) = 0$.

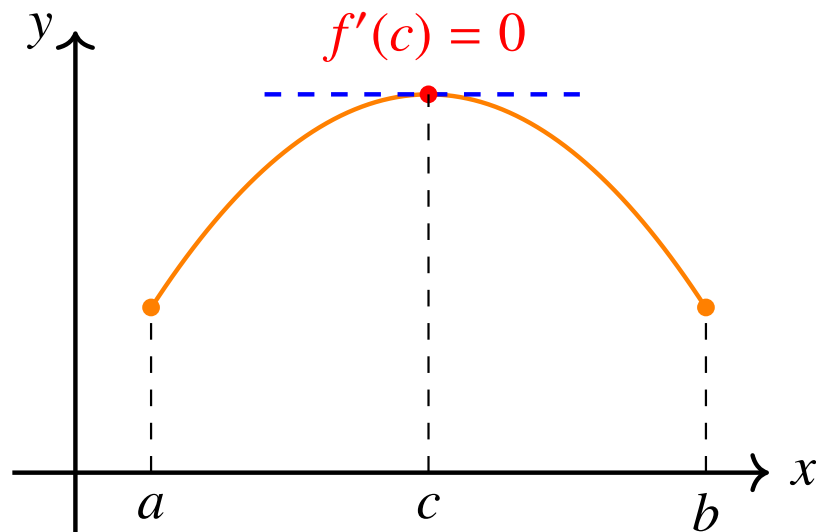
Rolle-tétel

Tétel (Rolle)

Ha f **folytonos** az $[a, b]$ zárt intervallumon, **differentiálható** az (a, b) nyílt intervallumon, és $f(a) = f(b)$, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$f'(c) = 0.$$

Bizonyítás.



- Weierstrass-tétel $\Rightarrow f$ felveszi a maximumát és minimumát $[a, b]$ -n.
- Ha mindkettő a végpontokban van $\Rightarrow f$ konstans (mert $f(a) = f(b)$) $\Rightarrow f'(c) = 0$ bármely c -re.
- Ha a max. vagy min. belső c pontban van $\Rightarrow$ Fermat-tétel $\Rightarrow f'(c) = 0$.

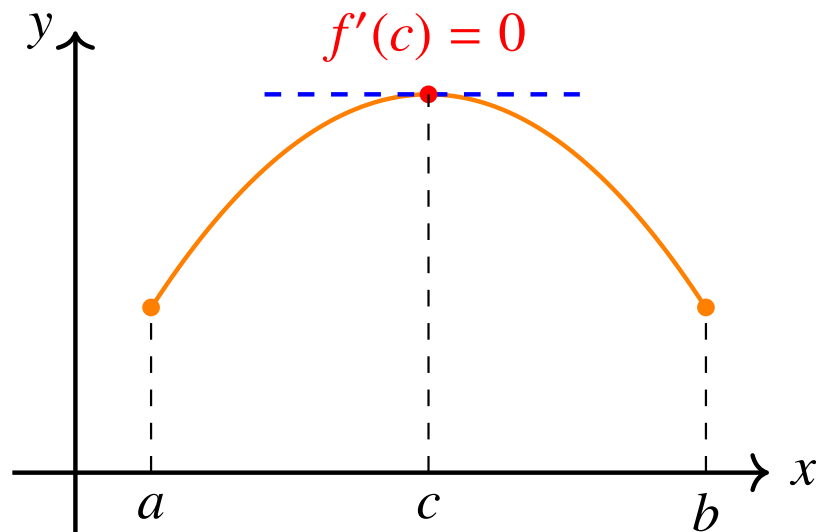
Rolle-tétel

Tétel (Rolle)

Ha f **folytonos** az $[a, b]$ zárt intervallumon, **differentiálható** az (a, b) nyílt intervallumon, és $f(a) = f(b)$, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$f'(c) = 0.$$

Bizonyítás.



- Weierstrass-tétel $\Rightarrow f$ felveszi a maximumát és minimumát $[a, b]$ -n.
- Ha mindkettő a végpontokban van $\Rightarrow f$ konstans (mert $f(a) = f(b)$) $\Rightarrow f'(c) = 0$ bármely c -re.
- Ha a max. vagy min. belső c pontban van $\Rightarrow$ Fermat-tétel $\Rightarrow f'(c) = 0$.

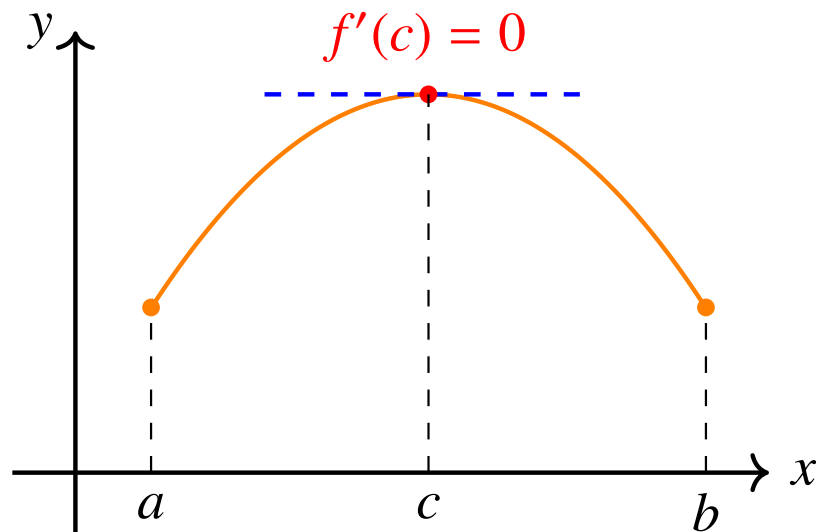
Rolle-tétel

Tétel (Rolle)

Ha f **folytonos** az $[a, b]$ zárt intervallumon, **differentiálható** az (a, b) nyílt intervallumon, és $f(a) = f(b)$, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$f'(c) = 0.$$

Bizonyítás.



- Weierstrass-tétel $\Rightarrow f$ felveszi a maximumát és minimumát $[a, b]$ -n.
- Ha mindkettő a végpontokban van $\Rightarrow f$ konstans (mert $f(a) = f(b)$) $\Rightarrow f'(c) = 0$ bármely c -re.
- Ha a max. vagy min. belső c pontban van $\Rightarrow$ Fermat-tétel $\Rightarrow f'(c) = 0$.

A Lagrange-féle középértéktétel

Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)

Ha f **folytonos** az $[a, b]$ intervallumon és **differentiálható** az (a, b) -n, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometriai értelmezés:

- A jobb oldal az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő **szelő meredeksége**.
- A tétel szerint létezik egy c pont, ahol az **érintő párhuzamos a szelővel**.

Sebességanalógia: Ha egy autó 2 óra alatt 160 km-t tesz meg (átlagsebesség 80 km/h), akkor valamely pillanatban a pillanatnyi sebessége **pontosan** 80 km/h volt.

A Lagrange-féle középértéktétel

Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)

Ha f **folytonos** az $[a, b]$ intervallumon és **differenciálható** az (a, b) -n, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometriai értelmezés:

- A jobb oldal az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő **szelő meredeksége**.
- A tétel szerint létezik egy c pont, ahol az **érintő párhuzamos a szelővel**.

Sebességanalógia: Ha egy autó 2 óra alatt 160 km-t tesz meg (átlagsebesség 80 km/h), akkor valamely pillanatban a pillanatnyi sebessége **pontosan** 80 km/h volt.

A Lagrange-féle középértéktétel

Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)

Ha f **folytonos** az $[a, b]$ intervallumon és **differenciálható** az (a, b) -n, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

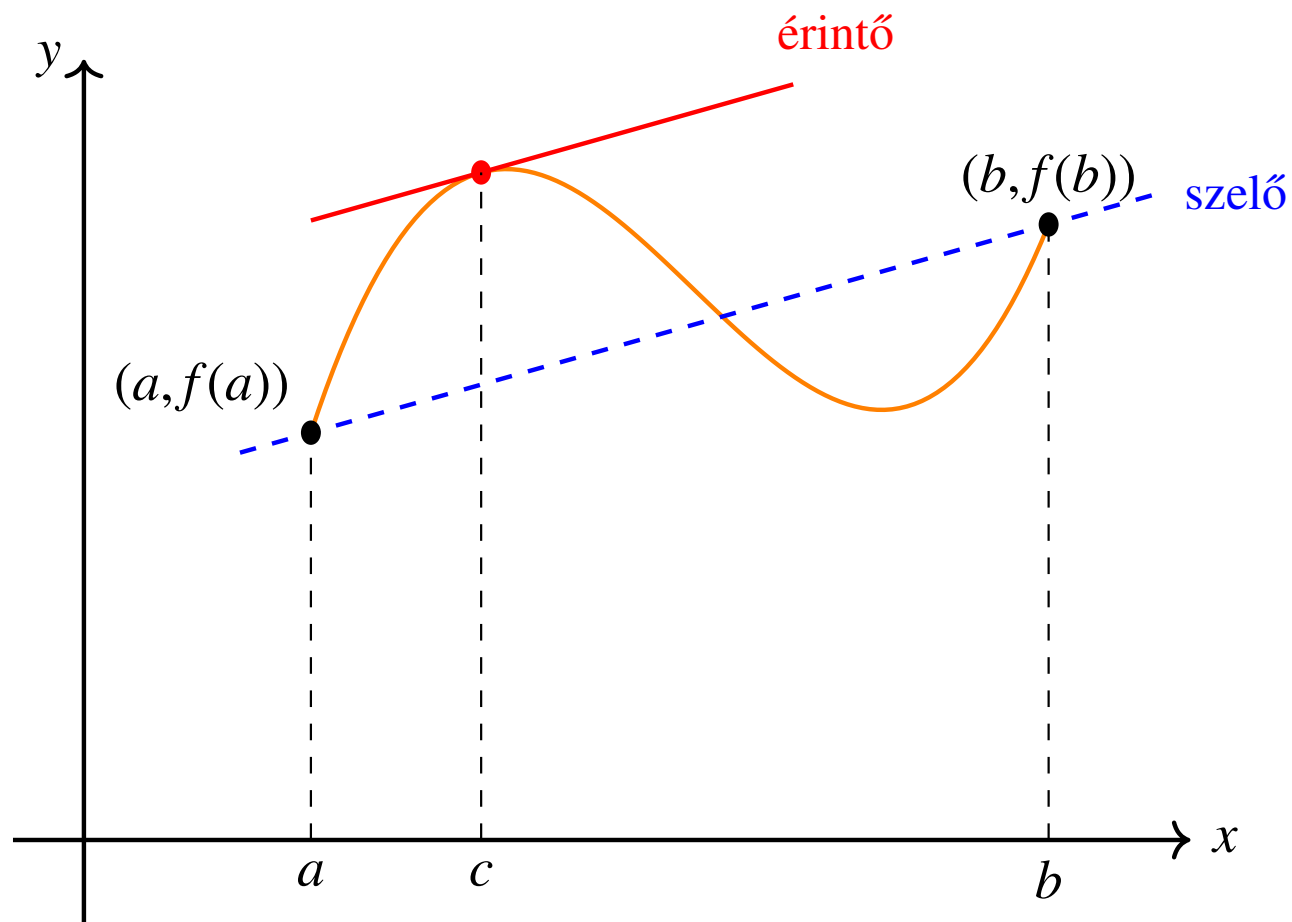
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometriai értelmezés:

- A jobb oldal az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő **szelő meredeksége**.
- A tétel szerint létezik egy c pont, ahol az **érintő párhuzamos a szelővel**.

Sebességanalógia: Ha egy autó 2 óra alatt 160 km-t tesz meg (átlagsebesség 80 km/h), akkor valamely pillanatban a pillanatnyi sebessége **pontosan** 80 km/h volt.

A Lagrange-tétel geometriai szemléltetése



$$\text{szelő meredeksége} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{érintő meredeksége} = f'(c)$$

A Lagrange-féle középértéktétel bizonyítása

- Alkalmazzuk a Rolle-tételt a következő segédfüggvényre:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

- g folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n ✓
- $g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$ ✓
- $g(b) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$ ✓
- A Rolle-tétel szerint $\exists c \in (a, b): g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Tehát $g'(c) = 0$ azt jelenti, hogy

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

A Lagrange-féle középértéktétel bizonyítása

- Alkalmazzuk a Rolle-tételt a következő segédfüggvényre:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

- g folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n ✓

- $g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$ ✓

- $g(b) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$ ✓

- A Rolle-tétel szerint $\exists c \in (a, b)$: $g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Tehát $g'(c) = 0$ azt jelenti, hogy

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

A Lagrange-féle középértéktétel bizonyítása

- Alkalmazzuk a Rolle-tételt a következő segédfüggvényre:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

- g folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n ✓

- $g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$ ✓

- $g(b) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$ ✓

- A Rolle-tétel szerint $\exists c \in (a, b): g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Tehát $g'(c) = 0$ azt jelenti, hogy

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

A Lagrange-féle középértéktétel bizonyítása

- Alkalmazzuk a Rolle-tételt a következő segédfüggvényre:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

- g folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n ✓

- $g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$ ✓

- $g(b) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$ ✓

- A Rolle-tétel szerint $\exists c \in (a, b): g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Tehát $g'(c) = 0$ azt jelenti, hogy

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

A Lagrange-féle középértéktétel bizonyítása

- Alkalmazzuk a Rolle-tételt a következő segédfüggvényre:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

- g folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n ✓
- $g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$ ✓
- $g(b) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$ ✓
- A Rolle-tétel szerint $\exists c \in (a, b): g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Tehát $g'(c) = 0$ azt jelenti, hogy

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

A Lagrange-féle középértéktétel bizonyítása

- Alkalmazzuk a Rolle-tételt a következő segédfüggvényre:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

- g folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n ✓
- $g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$ ✓
- $g(b) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$ ✓
- A Rolle-tétel szerint $\exists c \in (a, b): g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Tehát $g'(c) = 0$ azt jelenti, hogy

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

Következmények

1. Következmény: Konstans függvények jellemzése

Ha f differenciálható (a, b) -n és $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor f **konstans** az (a, b) -n.

Biz. Tetszőleges $x_1 < x_2$ pontokra a Lagrange-tétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0.$$

Tehát $f(x_1) = f(x_2)$, azaz f konstans. □

2. Következmény: Azonos deriváltú függvények

Ha $f'(x) = g'(x)$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor $\exists C \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = g(x) + C \quad \text{minden } x \in (a, b)\text{-re.}$$

Biz. Legyen $h(x) = f(x) - g(x)$. Ekkor $h'(x) = 0$, tehát h konstans. □

Megjegyzés. Ezt a tételt fogjuk használni az **integrálszámításnál**. (Ha ismerjük egy függvény egy primitív függvényét, akkor az összes primitív függvényét ismerjük.)

Következmények

1. Következmény: Konstans függvények jellemzése

Ha f differenciálható (a, b) -n és $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor f **konstans** az (a, b) -n.

Biz. Tetszőleges $x_1 < x_2$ pontokra a Lagrange-tétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0.$$

Tehát $f(x_1) = f(x_2)$, azaz f konstans. □

2. Következmény: Azonos deriváltú függvények

Ha $f'(x) = g'(x)$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor $\exists C \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = g(x) + C \quad \text{minden } x \in (a, b)\text{-re.}$$

Biz. Legyen $h(x) = f(x) - g(x)$. Ekkor $h'(x) = 0$, tehát h konstans. □

Megjegyzés. Ezt a tételt fogjuk használni az **integrálszámításnál**. (Ha ismerjük egy függvény egy primitív függvényét, akkor az összes primitív függvényét ismerjük.)

Következmények

1. Következmény: Konstans függvények jellemzése

Ha f differenciálható (a, b) -n és $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor f **konstans** az (a, b) -n.

Biz. Tetszőleges $x_1 < x_2$ pontokra a Lagrange-tétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0.$$

Tehát $f(x_1) = f(x_2)$, azaz f konstans. □

2. Következmény: Azonos deriváltú függvények

Ha $f'(x) = g'(x)$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor $\exists C \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = g(x) + C \quad \text{minden } x \in (a, b)\text{-re.}$$

Biz. Legyen $h(x) = f(x) - g(x)$. Ekkor $h'(x) = 0$, tehát h konstans. □

Megjegyzés. Ezt a tételt fogjuk használni az **integrálszámításnál**. (Ha ismerjük egy függvény egy primitív függvényét, akkor az összes primitív függvényét ismerjük.)

Következmények

1. Következmény: Konstans függvények jellemzése

Ha f differenciálható (a, b) -n és $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor f **konstans** az (a, b) -n.

Biz. Tetszőleges $x_1 < x_2$ pontokra a Lagrange-tétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0.$$

Tehát $f(x_1) = f(x_2)$, azaz f konstans. □

2. Következmény: Azonos deriváltú függvények

Ha $f'(x) = g'(x)$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor $\exists C \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = g(x) + C \quad \text{minden } x \in (a, b)\text{-re.}$$

Biz. Legyen $h(x) = f(x) - g(x)$. Ekkor $h'(x) = 0$, tehát h konstans. □

Megjegyzés. Ezt a tételt fogjuk használni az **integrálszámításnál**. (Ha ismerjük egy függvény egy primitív függvényét, akkor az összes primitív függvényét ismerjük.)

Következmények

1. Következmény: Konstans függvények jellemzése

Ha f differenciálható (a, b) -n és $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor f **konstans** az (a, b) -n.

Biz. Tetszőleges $x_1 < x_2$ pontokra a Lagrange-tétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0.$$

Tehát $f(x_1) = f(x_2)$, azaz f konstans. □

2. Következmény: Azonos deriváltú függvények

Ha $f'(x) = g'(x)$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor $\exists C \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = g(x) + C \quad \text{minden } x \in (a, b)\text{-re.}$$

Biz. Legyen $h(x) = f(x) - g(x)$. Ekkor $h'(x) = 0$, tehát h konstans. □

Megjegyzés. Ezt a tételt fogjuk használni az **integrálszámításnál**. (Ha ismerjük egy függvény egy primitív függvényét, akkor az összes primitív függvényét ismerjük.)

A Cauchy-féle középértéktétel

Tétel (Cauchy-féle középértéktétel)

Ha f és g **folytonosak** $[a, b]$ -n, **differentiálhatók** (a, b) -n, és $g'(x) \neq 0$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Megjegyzés.

- A $g(x) = x$ választással visszkapjuk a Lagrange-tételt.
- A Cauchy-féle középértéktétel lesz a **L'Hospital-szabály** bizonyításának alapja.

Bizonyítási ötlet: Alkalmazzuk a Rolle-tételt a

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

segédfüggvényre. Ekkor $h(a) = h(b) = 0$, tehát $\exists c: h'(c) = 0$, amiből az állítás adódik.

A Cauchy-féle középértéktétel

Tétel (Cauchy-féle középértéktétel)

Ha f és g **folytonosak** $[a, b]$ -n, **differentiálhatók** (a, b) -n, és $g'(x) \neq 0$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Megjegyzés.

- A $g(x) = x$ választással visszkapjuk a Lagrange-tételt.
- A Cauchy-féle középértéktétel lesz a **L'Hospital-szabály** bizonyításának alapja.

Bizonyítási ötlet: Alkalmazzuk a Rolle-tételt a

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

segédfüggvényre. Ekkor $h(a) = h(b) = 0$, tehát $\exists c: h'(c) = 0$, amiből az állítás adódik.

A Cauchy-féle középértéktétel

Tétel (Cauchy-féle középértéktétel)

Ha f és g **folytonosak** $[a, b]$ -n, **differentiálhatók** (a, b) -n, és $g'(x) \neq 0$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor létezik $c \in (a, b)$, amelyre

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Megjegyzés.

- A $g(x) = x$ választással visszkapjuk a Lagrange-tételt.
- A Cauchy-féle középértéktétel lesz a **L'Hospital-szabály** bizonyításának alapja.

Bizonyítási ötlet: Alkalmazzuk a Rolle-tételt a

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

segédfüggvényre. Ekkor $h(a) = h(b) = 0$, tehát $\exists c: h'(c) = 0$, amiből az állítás adódik.

Tagolás

- 1 Függvény szélsőértékei
- 2 A Lagrange-féle középértéktétel
- 3 Monoton függvények és az első derivált teszt**
- 4 Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása
- 5 Alkalmazott optimalizációs problémák
- 6 Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály
- 7 A Newton-módszer
- 8 Primitív függvények

Monoton függvények és a derivált

Definíció: Monoton függvény

Az f függvény **monoton növekvő** (csökkenő) egy I intervallumon, ha tetszőleges $x_1 < x_2 \in I$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ill. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Ha az egyenlőség nem áll fenn, akkor **szigorúan** monoton növekvő (csökkenő).

Tétel (Monotonitás és a derivált)

Legyen f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n. Ekkor:

- ① $f' \geq 0$ az (a, b) -n $\iff f$ monoton növekvő $[a, b]$ -n.
- ② $f' \leq 0$ az (a, b) -n $\iff f$ monoton csökkenő $[a, b]$ -n.
- ③ $f' > 0$ az (a, b) -n $\implies f$ szigorúan monoton növekvő $[a, b]$ -n.

Biz. ($\Leftarrow$): A növekvőség definíciójából a differenciahányados ≥ 0 , így a határérték is.

($\Rightarrow$): Lagrange-tétel: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$, ha $x_1 < x_2$.



Monoton függvények és a derivált

Definíció: Monoton függvény

Az f függvény **monoton növekvő** (csökkenő) egy I intervallumon, ha tetszőleges $x_1 < x_2 \in I$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ill. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Ha az egyenlőség nem áll fenn, akkor **szigorúan** monoton növekvő (csökkenő).

Tétel (Monotonitás és a derivált)

Legyen f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n. Ekkor:

- ① $f' \geq 0$ az (a, b) -n $\iff f$ monoton növekvő $[a, b]$ -n.
- ② $f' \leq 0$ az (a, b) -n $\iff f$ monoton csökkenő $[a, b]$ -n.
- ③ $f' > 0$ az (a, b) -n $\implies f$ szigorúan monoton növekvő $[a, b]$ -n.

Biz. ($\Leftarrow$): A növekvőség definíciójából a differenciahányados ≥ 0 , így a határérték is.

($\Rightarrow$): Lagrange-tétel: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$, ha $x_1 < x_2$.



Monoton függvények és a derivált

Definíció: Monoton függvény

Az f függvény **monoton növekvő** (csökkenő) egy I intervallumon, ha tetszőleges $x_1 < x_2 \in I$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ill. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Ha az egyenlőség nem áll fenn, akkor **szigorúan** monoton növekvő (csökkenő).

Tétel (Monotonitás és a derivált)

Legyen f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n. Ekkor:

- ① $f' \geq 0$ az (a, b) -n $\iff f$ **monoton növekvő** $[a, b]$ -n.
- ② $f' \leq 0$ az (a, b) -n $\iff f$ **monoton csökkenő** $[a, b]$ -n.
- ③ $f' > 0$ az (a, b) -n $\implies f$ **szigorúan monoton növekvő** $[a, b]$ -n.

Biz. ($\Leftarrow$): A növekvőség definíciójából a differenciahányados ≥ 0 , így a határérték is.

($\Rightarrow$): Lagrange-tétel: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$, ha $x_1 < x_2$.



Monoton függvények és a derivált

Definíció: Monoton függvény

Az f függvény **monoton növekvő** (csökkenő) egy I intervallumon, ha tetszőleges $x_1 < x_2 \in I$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ill. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Ha az egyenlőség nem áll fenn, akkor **szigorúan** monoton növekvő (csökkenő).

Tétel (Monotonitás és a derivált)

Legyen f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n. Ekkor:

- ① $f' \geq 0$ az (a, b) -n $\iff f$ **monoton növekvő** $[a, b]$ -n.
- ② $f' \leq 0$ az (a, b) -n $\iff f$ **monoton csökkenő** $[a, b]$ -n.
- ③ $f' > 0$ az (a, b) -n $\implies f$ **szigorúan monoton növekvő** $[a, b]$ -n.

Biz. ($\Leftarrow$): A növekvőség definíciójából a differenciahányados ≥ 0 , így a határérték is.

($\Rightarrow$): Lagrange-tétel: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$, ha $x_1 < x_2$.



Monoton függvények és a derivált

Definíció: Monoton függvény

Az f függvény **monoton növekvő** (csökkenő) egy I intervallumon, ha tetszőleges $x_1 < x_2 \in I$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ill. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Ha az egyenlőség nem áll fenn, akkor **szigorúan** monoton növekvő (csökkenő).

Tétel (Monotonitás és a derivált)

Legyen f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n. Ekkor:

- ① $f' \geq 0$ az (a, b) -n $\iff f$ **monoton növekvő** $[a, b]$ -n.
- ② $f' \leq 0$ az (a, b) -n $\iff f$ **monoton csökkenő** $[a, b]$ -n.
- ③ $f' > 0$ az (a, b) -n $\implies f$ **szigorúan monoton növekvő** $[a, b]$ -n.

Biz. ($\Leftarrow$): A növekvőség definíciójából a differenciahányados ≥ 0 , így a határérték is.

($\Rightarrow$): Lagrange-tétel: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$, ha $x_1 < x_2$.



Monoton függvények és a derivált

Definíció: Monoton függvény

Az f függvény **monoton növekvő** (csökkenő) egy I intervallumon, ha tetszőleges $x_1 < x_2 \in I$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ill. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Ha az egyenlőség nem áll fenn, akkor **szigorúan** monoton növekvő (csökkenő).

Tétel (Monotonitás és a derivált)

Legyen f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n. Ekkor:

- ① $f' \geq 0$ az (a, b) -n $\iff f$ **monoton növekvő** $[a, b]$ -n.
- ② $f' \leq 0$ az (a, b) -n $\iff f$ **monoton csökkenő** $[a, b]$ -n.
- ③ $f' > 0$ az (a, b) -n $\implies f$ **szigorúan monoton növekvő** $[a, b]$ -n.

Biz. ($\Leftarrow$): A növekvőség definíciójából a differenciahányados ≥ 0 , így a határérték is.

($\Rightarrow$): Lagrange-tétel: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0$, ha $x_1 < x_2$.



Az első derivált teszt

Tétel (Első derivált teszt)

Legyen c az f **kritikus pontja**, és f legyen folytonos c -ben. Ha f differenciálható c egy környezetében (kivéve esetleg c -ben):

- 1 Ha f' előjelet vált **+ -ről - -ra** c -nél $\implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 2 Ha f' előjelet vált **- -ről + -ra** c -nél $\implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 3 Ha f' **nem** vált előjelet c -nél $\implies c$ -ben **nincs** lokális szélsőérték.

Biz. Az 1. eset: c előtt $f' > 0 \implies f$ növekvő; c után $f' < 0 \implies f$ csökkenő. Tehát $f(c)$ a legnagyobb érték a környezetben. $\square$

Megjegyzés. Az első derivált teszt **nem deriválható** kritikus pontokban is alkalmazható (ahol $f'(c)$ nem létezik), ellentétben a második derivált teszttel.

Az első derivált teszt

Tétel (Első derivált teszt)

Legyen c az f **kritikus pontja**, és f legyen folytonos c -ben. Ha f differenciálható c egy környezetében (kivéve esetleg c -ben):

- 1 Ha f' előjelet vált **+ -ről - -ra** c -nél $\implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 2 Ha f' előjelet vált **- -ről + -ra** c -nél $\implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 3 Ha f' **nem** vált előjelet c -nél $\implies c$ -ben **nincs** lokális szélsőérték.

Biz. Az 1. eset: c előtt $f' > 0 \implies f$ növekvő; c után $f' < 0 \implies f$ csökkenő. Tehát $f(c)$ a legnagyobb érték a környezetben. $\square$

Megjegyzés. Az első derivált teszt **nem deriválható** kritikus pontokban is alkalmazható (ahol $f'(c)$ nem létezik), ellentétben a második derivált tesztrel.

Az első derivált teszt

Tétel (Első derivált teszt)

Legyen c az f **kritikus pontja**, és f legyen folytonos c -ben. Ha f differenciálható c egy környezetében (kivéve esetleg c -ben):

- 1 Ha f' előjelet vált **+ -ről - -ra** c -nél $\implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 2 Ha f' előjelet vált **- -ről + -ra** c -nél $\implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 3 Ha f' **nem** vált előjelet c -nél $\implies c$ -ben **nincs** lokális szélsőérték.

Biz. Az 1. eset: c előtt $f' > 0 \implies f$ növekvő; c után $f' < 0 \implies f$ csökkenő. Tehát $f(c)$ a legnagyobb érték a környezetben. $\square$

Megjegyzés. Az első derivált teszt **nem deriválható** kritikus pontokban is alkalmazható (ahol $f'(c)$ nem létezik), ellentétben a második derivált tesztel.

Az első derivált teszt

Tétel (Első derivált teszt)

Legyen c az f **kritikus pontja**, és f legyen folytonos c -ben. Ha f differenciálható c egy környezetében (kivéve esetleg c -ben):

- 1 Ha f' előjelet vált **+ -ről - -ra** c -nél $\implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 2 Ha f' előjelet vált **- -ről + -ra** c -nél $\implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 3 Ha f' **nem** vált előjelet c -nél $\implies c$ -ben **nincs** lokális szélsőérték.

Biz. Az 1. eset: c előtt $f' > 0 \implies f$ növekvő; c után $f' < 0 \implies f$ csökkenő. Tehát $f(c)$ a legnagyobb érték a környezetben. $\square$

Megjegyzés. Az első derivált teszt **nem deriválható** kritikus pontokban is alkalmazható (ahol $f'(c)$ nem létezik), ellentétben a második derivált teszttel.

Az első derivált teszt

Tétel (Első derivált teszt)

Legyen c az f **kritikus pontja**, és f legyen folytonos c -ben. Ha f differenciálható c egy környezetében (kivéve esetleg c -ben):

- 1 Ha f' előjelet vált **+ -ről - -ra** c -nél $\implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 2 Ha f' előjelet vált **- -ről + -ra** c -nél $\implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 3 Ha f' **nem** vált előjelet c -nél $\implies c$ -ben **nincs** lokális szélsőérték.

Biz. Az 1. eset: c előtt $f' > 0 \implies f$ növekvő; c után $f' < 0 \implies f$ csökkenő. Tehát $f(c)$ a legnagyobb érték a környezetben. $\square$

Megjegyzés. Az első derivált teszt **nem deriválható** kritikus pontokban is alkalmazható (ahol $f'(c)$ nem létezik), ellentétben a második derivált tesztel.

Az első derivált teszt

Tétel (Első derivált teszt)

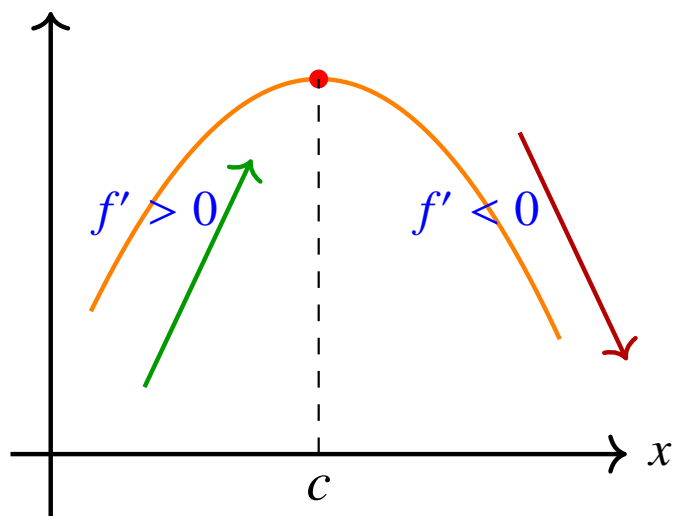
Legyen c az f **kritikus pontja**, és f legyen folytonos c -ben. Ha f differenciálható c egy környezetében (kivéve esetleg c -ben):

- 1 Ha f' előjelet vált **+ -ről - -ra** c -nél $\implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 2 Ha f' előjelet vált **- -ről + -ra** c -nél $\implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 3 Ha f' **nem** vált előjelet c -nél $\implies c$ -ben **nincs** lokális szélsőérték.

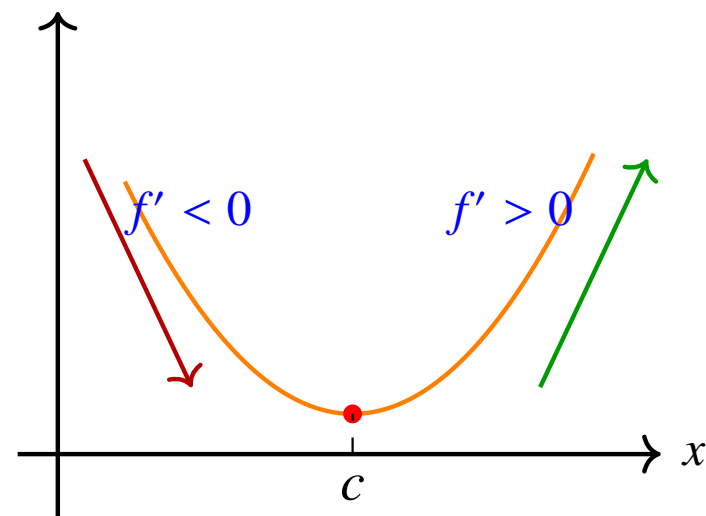
Biz. Az 1. eset: c előtt $f' > 0 \implies f$ növekvő; c után $f' < 0 \implies f$ csökkenő. Tehát $f(c)$ a legnagyobb érték a környezetben. $\square$

Megjegyzés. Az első derivált teszt **nem deriválható** kritikus pontokban is alkalmazható (ahol $f'(c)$ nem létezik), ellentétben a második derivált teszttel.

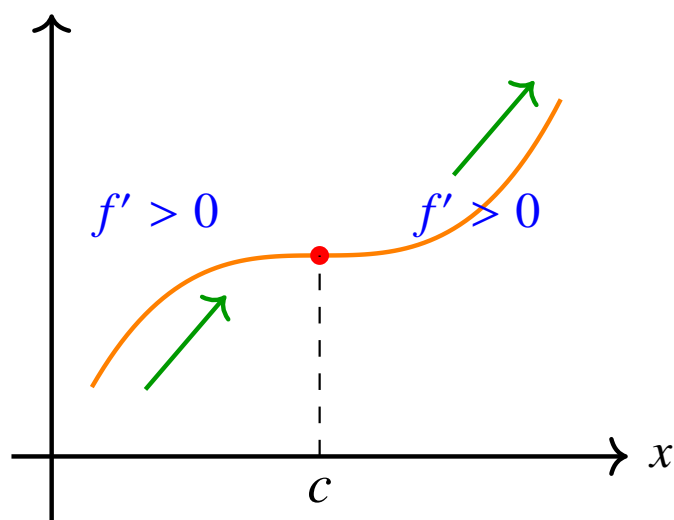
Az első derivált teszt szemléltetése



Lokális maximum



Lokális minimum



Nincs szélsőérték
(nincs előjelváltás)

Kidolgozott példa: monoton intervallumok és szélsőértékek

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ függvény monoton intervallumait és lokális szélsőértékeit!

1. Derivált és kritikus pontok:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

2. Az f' előjeltáblázata:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

3. Eredmény:

- f növekvő: $(-\infty, 1]$ és $[2, +\infty)$; csökkenő: $[1, 2]$.
- Lokális maximum: $f(1) = 2$; lokális minimum: $f(2) = 1$.

Kidolgozott példa: monoton intervallumok és szélsőértékek

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ függvény monoton intervallumait és lokális szélsőértékeit!

1. Derivált és kritikus pontok:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

2. Az f' előjeltáblázata:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

3. Eredmény:

- f növekvő: $(-\infty, 1]$ és $[2, +\infty)$; csökkenő: $[1, 2]$.
- Lokális maximum: $f(1) = 2$; lokális minimum: $f(2) = 1$.

Kidolgozott példa: monoton intervallumok és szélsőértékek

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ függvény monoton intervallumait és lokális szélsőértékeit!

1. Derivált és kritikus pontok:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

2. Az f' előjeltáblázata:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

3. Eredmény:

- f növekvő: $(-\infty, 1]$ és $[2, +\infty)$; csökkenő: $[1, 2]$.
- Lokális maximum: $f(1) = 2$; lokális minimum: $f(2) = 1$.

Kidolgozott példa: monoton intervallumok és szélsőértékek

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ függvény monoton intervallumait és lokális szélsőértékeit!

1. Derivált és kritikus pontok:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

2. Az f' előjeltáblázata:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

3. Eredmény:

- f növekvő: $(-\infty, 1]$ és $[2, +\infty)$; csökkenő: $[1, 2]$.
- Lokális maximum: $f(1) = 2$; lokális minimum: $f(2) = 1$.

Kidolgozott példa: monoton intervallumok és szélsőértékek

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ függvény monoton intervallumait és lokális szélsőértékeit!

1. Derivált és kritikus pontok:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

2. Az f' előjeltáblázata:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗

3. Eredmény:

- f növekvő: $(-\infty, 1]$ és $[2, +\infty)$; csökkenő: $[1, 2]$.
- Lokális maximum: $f(1) = 2$; lokális minimum: $f(2) = 1$.

Kidolgozott példa: monoton intervallumok és szélsőértékek

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ függvény monoton intervallumait és lokális szélsőértékeit!

1. Derivált és kritikus pontok:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

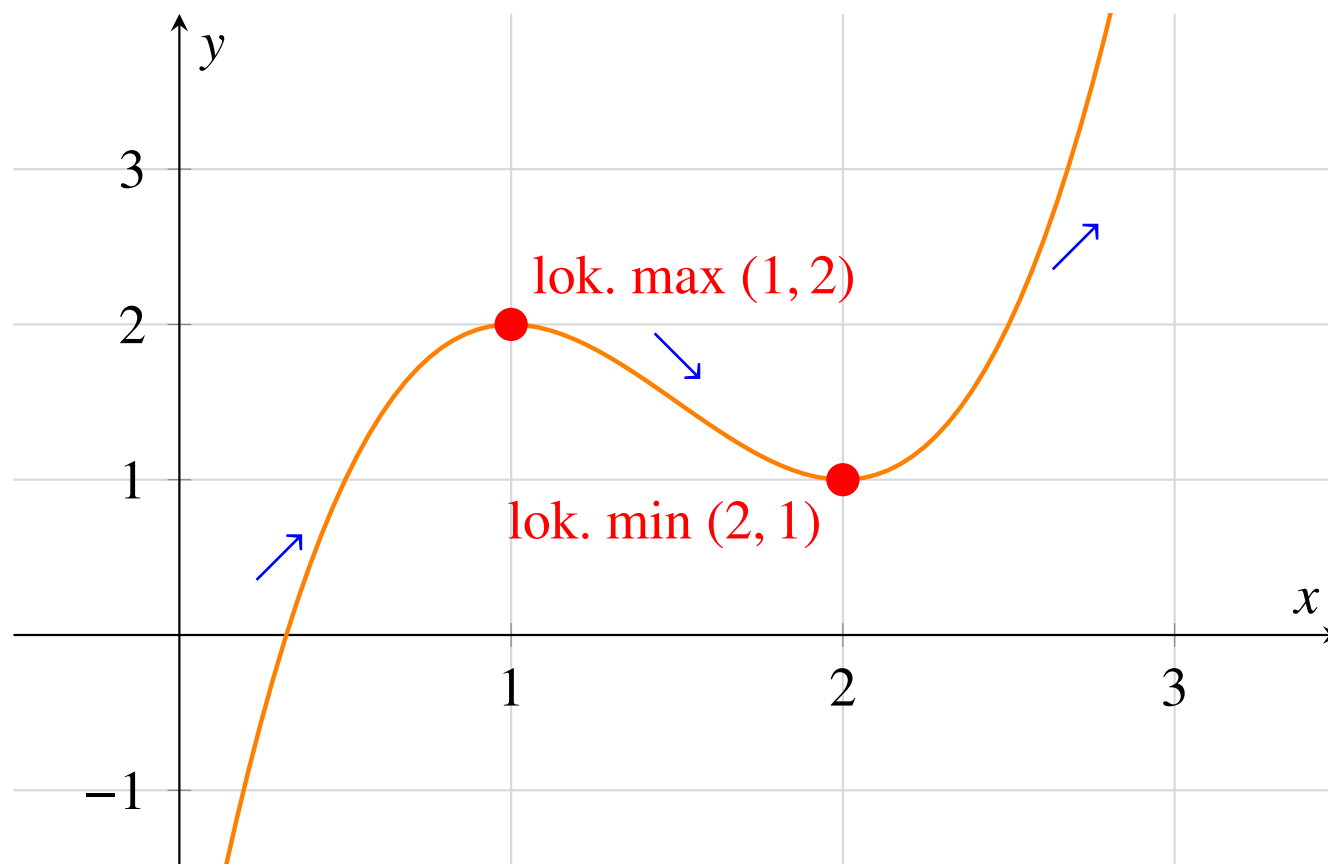
2. Az f' előjeltáblázata:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗

3. Eredmény:

- f növekvő: $(-\infty, 1]$ és $[2, +\infty)$; csökkenő: $[1, 2]$.
- Lokális maximum: $f(1) = 2$; lokális minimum: $f(2) = 1$.

A példa grafikus szemléltetése



Nem deriválható kritikus pontok

Példa

Vizsgáljuk az $f(x) = x^{2/3}$ függvényt!

Derivált: $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}$

* $f'(0)$ nem létezik $\rightarrow x = 0$
kritikus pont.

* $x < 0: f'(x) < 0$ (csökkenő)

* $x > 0: f'(x) > 0$ (növekvő)

Első derivált teszt: előjelváltás $-/+$
 $\Rightarrow$ lokális minimum $x = 0$ -ban.

Megjegyzés. Az első derivált teszt nem deriválható pontban is működik!



Nem deriválható kritikus pontok

Példa

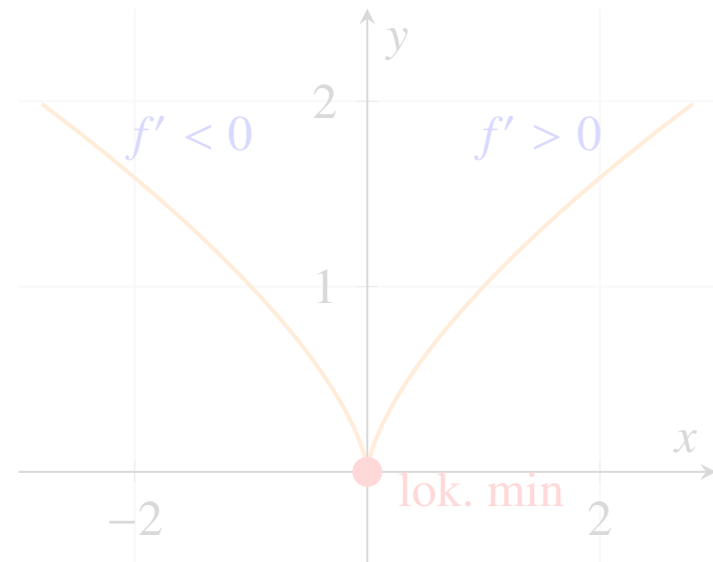
Vizsgáljuk az $f(x) = x^{2/3}$ függvényt!

Derivált: $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}$

- $f'(0)$ nem létezik $\Rightarrow x = 0$ kritikus pont.
- $x < 0: f'(x) < 0$ (csökkenő)
- $x > 0: f'(x) > 0$ (növekvő)

Első derivált teszt: előjelváltás $-/+$
 $\Rightarrow$ **lokális minimum** $x = 0$ -ban.

Megjegyzés. Az első derivált teszt nem deriválható pontban is működik!



Nem deriválható kritikus pontok

Példa

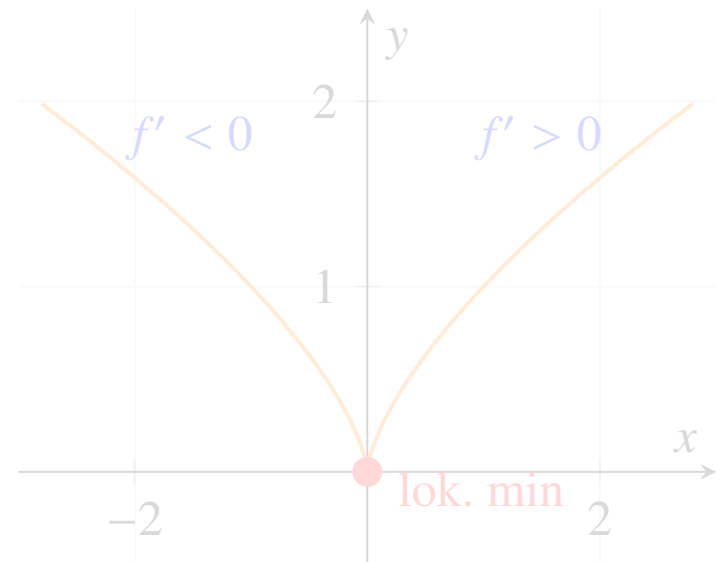
Vizsgáljuk az $f(x) = x^{2/3}$ függvényt!

Derivált: $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}$

- $f'(0)$ nem létezik $\Rightarrow x = 0$ kritikus pont.
- $x < 0: f'(x) < 0$ (csökkenő)
- $x > 0: f'(x) > 0$ (növekvő)

Első derivált teszt: előjelváltás $-/+$
 $\Rightarrow$ **lokális minimum** $x = 0$ -ban.

Megjegyzés. Az első derivált teszt nem deriválható pontban is működik!



Nem deriválható kritikus pontok

Példa

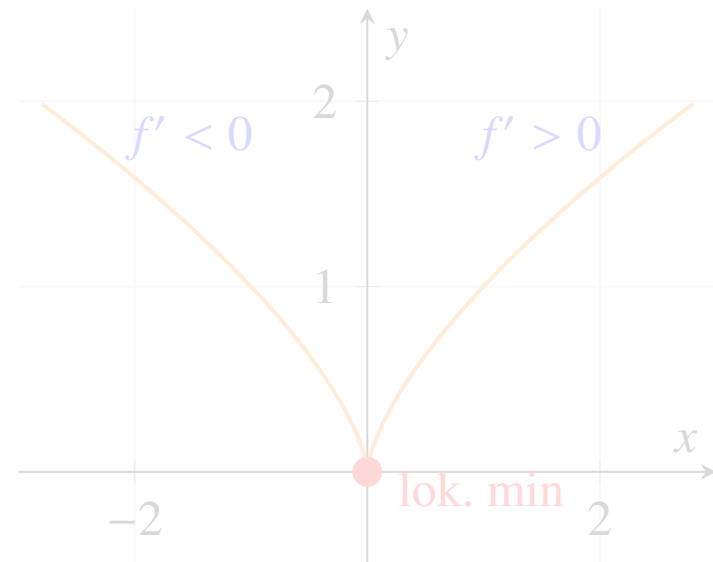
Vizsgáljuk az $f(x) = x^{2/3}$ függvényt!

Derivált: $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}$

- $f'(0)$ **nem létezik** $\Rightarrow x = 0$ kritikus pont.
- $x < 0: f'(x) < 0$ (csökkenő)
- $x > 0: f'(x) > 0$ (növekvő)

Első derivált teszt: előjelváltás $-/+$
 $\Rightarrow$ **lokális minimum** $x = 0$ -ban.

Megjegyzés. Az első derivált teszt nem deriválható pontban is működik!



Nem deriválható kritikus pontok

Példa

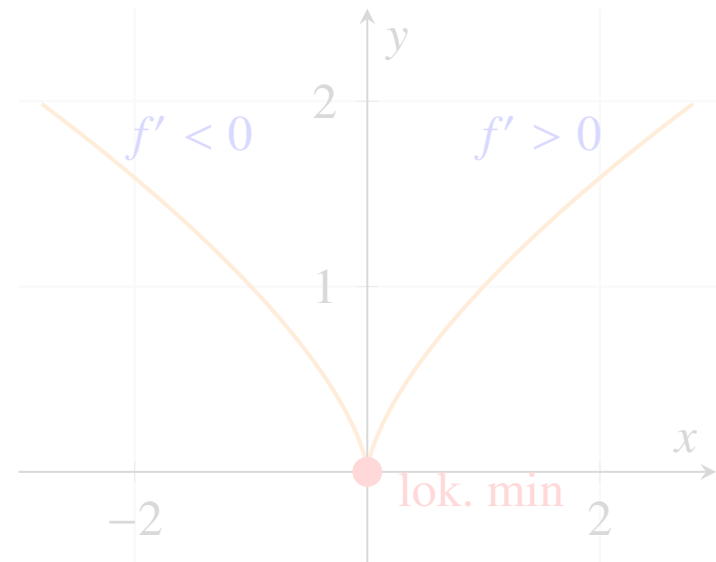
Vizsgáljuk az $f(x) = x^{2/3}$ függvényt!

Derivált: $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}$

- $f'(0)$ **nem létezik** $\Rightarrow x = 0$ kritikus pont.
- $x < 0: f'(x) < 0$ (csökkenő)
- $x > 0: f'(x) > 0$ (növekvő)

Első derivált teszt: előjelváltás $-/+$
 $\Rightarrow$ **lokális minimum** $x = 0$ -ban.

Megjegyzés. Az első derivált teszt nem deriválható pontban is működik!



Nem deriválható kritikus pontok

Példa

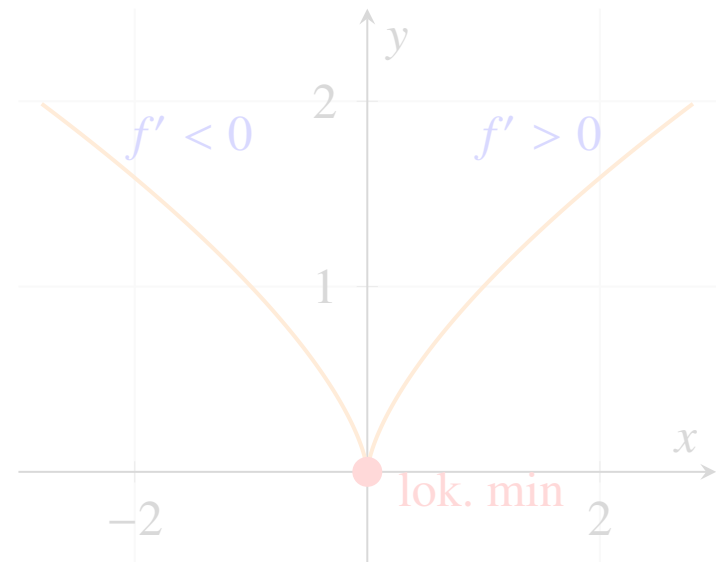
Vizsgáljuk az $f(x) = x^{2/3}$ függvényt!

Derivált: $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}$

- $f'(0)$ **nem létezik** $\Rightarrow x = 0$ kritikus pont.
- $x < 0: f'(x) < 0$ (csökkenő)
- $x > 0: f'(x) > 0$ (növekvő)

Első derivált teszt: előjelváltás $-/+$
 $\Rightarrow$ **lokális minimum** $x = 0$ -ban.

Megjegyzés. Az első derivált teszt nem deriválható pontban is működik!



Nem deriválható kritikus pontok

Példa

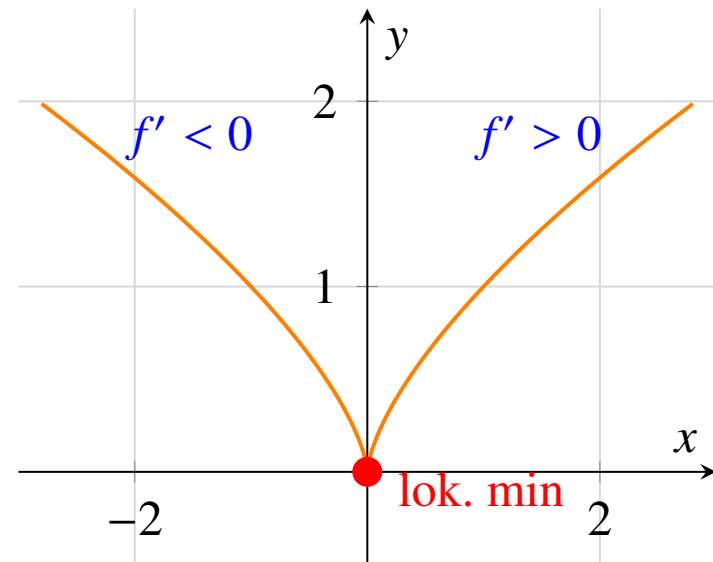
Vizsgáljuk az $f(x) = x^{2/3}$ függvényt!

Derivált: $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}}$

- $f'(0)$ **nem létezik** $\Rightarrow x = 0$ kritikus pont.
- $x < 0: f'(x) < 0$ (csökkenő)
- $x > 0: f'(x) > 0$ (növekvő)

Első derivált teszt: előjelváltás $-/+$
 $\Rightarrow$ **lokális minimum** $x = 0$ -ban.

Megjegyzés. Az első derivált teszt nem deriválható pontban is működik!



Tagolás

- 1 Függvény szélsőértékei
- 2 A Lagrange-féle középértéktétel
- 3 Monoton függvények és az első derivált teszt
- 4 Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása**
- 5 Alkalmazott optimalizációs problémák
- 6 Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály
- 7 A Newton-módszer
- 8 Primitív függvények

Konvexitás és konkávitás

Analitikus definíció: Konvex és konkáv függvény

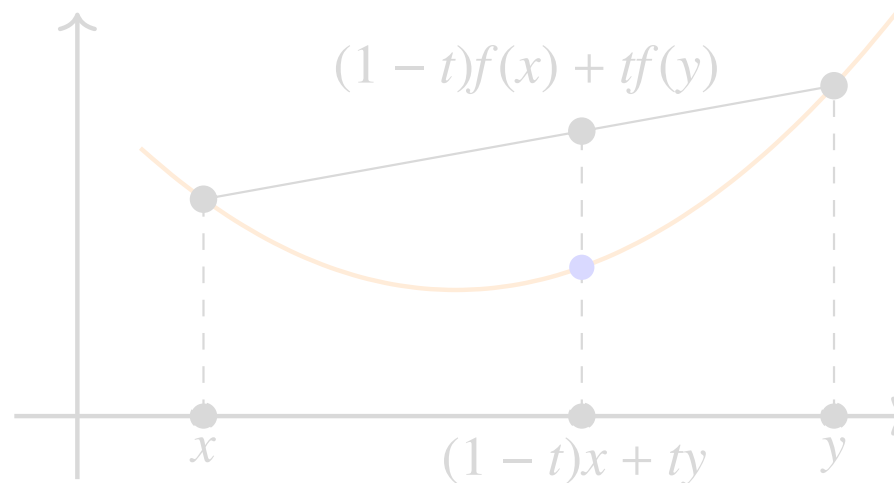
Legyen f folytonos az $[a, b]$ intervallumon.

- f **konvex** függvény, ha minden $x, y \in [a, b]$ és $t \in [0, 1]$ esetén

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

- f **konkáv** függvény, ha minden $x, y \in [a, b]$ és $t \in [0, 1]$ esetén

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y).$$



Megjegyzés. A szinusz bizonyos intervallumokon konvex, másokon konkáv.

Konvexitás és konkávitás

Analitikus definíció: Konvex és konkáv függvény

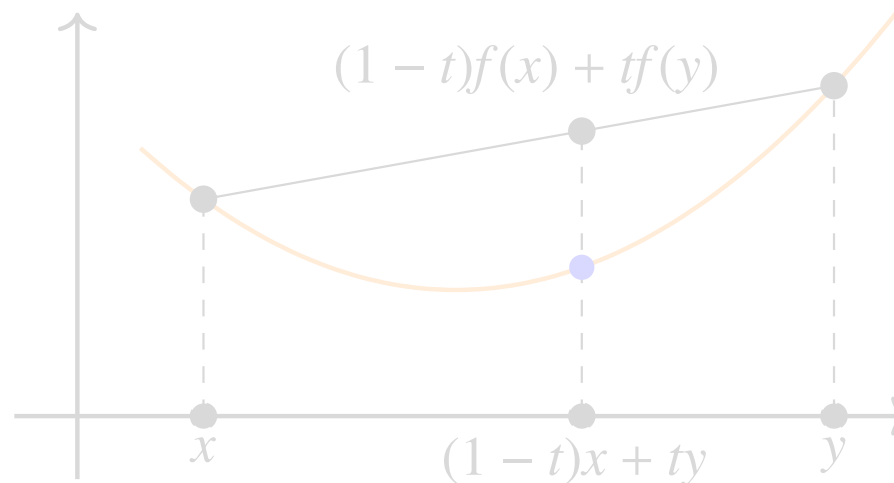
Legyen f folytonos az $[a, b]$ intervallumon.

- f **konvex függvény**, ha minden $x, y \in [a, b]$ és $t \in [0, 1]$ esetén

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

- f **konkáv függvény**, ha minden $x, y \in [a, b]$ és $t \in [0, 1]$ esetén

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y).$$



Megjegyzés. A szinusz bizonyos intervallumokon konvex, másokon konkáv.

Konvexitás és konkávitás

Analitikus definíció: Konvex és konkáv függvény

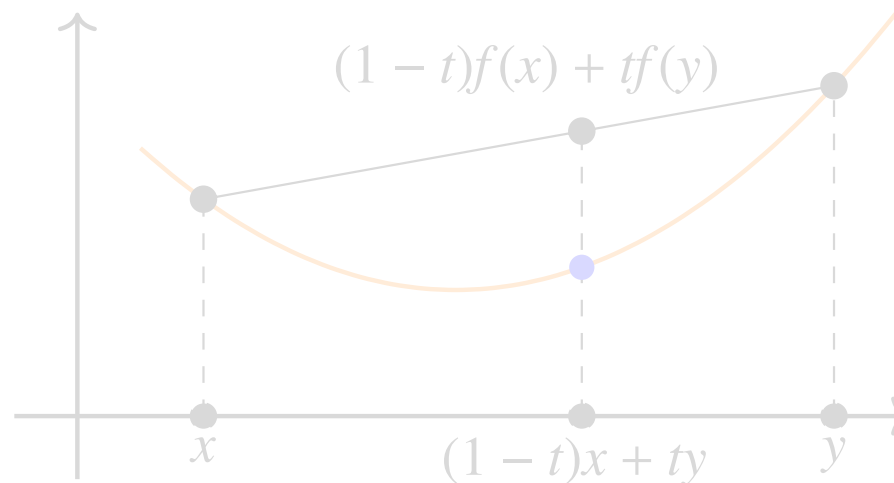
Legyen f folytonos az $[a, b]$ intervallumon.

- f **konvex függvény**, ha minden $x, y \in [a, b]$ és $t \in [0, 1]$ esetén

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

- f **konkáv függvény**, ha minden $x, y \in [a, b]$ és $t \in [0, 1]$ esetén

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y).$$



Megjegyzés. A szinusz bizonyos intervallumokon konvex, másokon konkáv.

Konvexitás és konkávitás

Analitikus definíció: Konvex és konkáv függvény

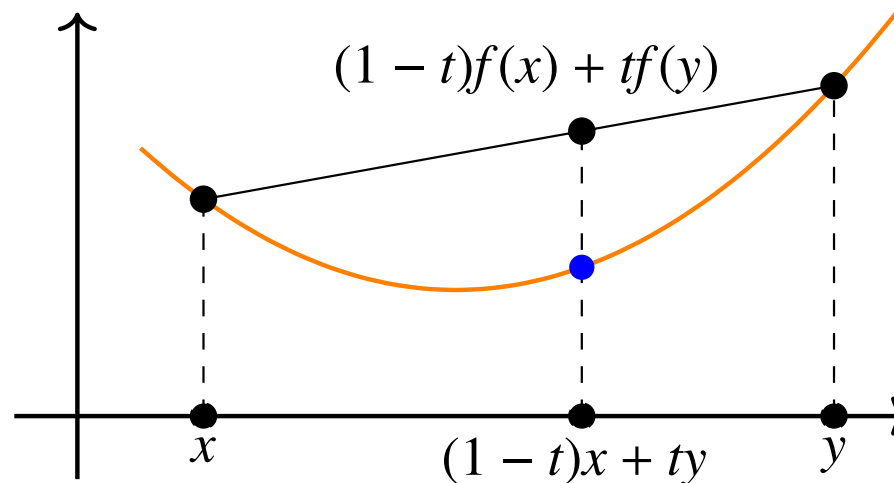
Legyen f folytonos az $[a, b]$ intervallumon.

- f **konvex függvény**, ha minden $x, y \in [a, b]$ és $t \in [0, 1]$ esetén

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

- f **konkáv függvény**, ha minden $x, y \in [a, b]$ és $t \in [0, 1]$ esetén

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y).$$



Megjegyzés. A szinusz bizonyos intervallumokon konvex, másokon konkáv.

Konvexitás és a második derivált

Tétel (Konvexitás-teszt)

Legyen f kétszer differenciálható egy I intervallumon. Ekkor:

- ① Ha $f''(x) \geq 0$ minden $x \in I$ -re, akkor f **konvex**.
- ② Ha $f''(x) \leq 0$ minden $x \in I$ -re, akkor f **konkáv**.

Bizonyítás elég kicsi t -re.

- ① Tegyük fel, hogy $f''(x) \geq 0$ minden $x \in I$ -n. Rögzítsünk $x < y$.
- ② Legyen $g(t) = f((1-t)x + ty) - ((1-t)f(x) + tf(y))$. Ekkor $g(0) = g(1) = 0$.
- ③ A láncszabály szerint $g'(t) = f'((1-t)x + ty)(y-x) - (f(y) - f(x))$ és $g''(t) = f''((1-t)x + ty)(y-x)^2$.
- ④ g kétszer differenciálható, $g''(t) \geq 0 \implies g'(t)$ monoton növekvő.
- ⑤ Tfh. $g(t) > 0$ egy $t \in (0, 1)$ -re.
- ⑥ $\exists \alpha \in (0, t): g'(\alpha) = \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} > 0$.
- ⑦ $\exists \beta \in (t, 1): g'(\beta) = \frac{g(1) - g(t)}{1 - t} < 0$.
- ⑧ Azaz $\alpha < \beta$ és $g'(\alpha) > 0 > g'(\beta)$, ami ellentmond a g' monotonitásának.
- ⑨ Tehát $g(t) \leq 0$ minden $t \in [0, 1]$ -re, azaz f konvex. □

Konvexitás és a második derivált

Tétel (Konvexitás-teszt)

Legyen f kétszer differenciálható egy I intervallumon. Ekkor:

- ① Ha $f''(x) \geq 0$ minden $x \in I$ -re, akkor f **konvex**.
- ② Ha $f''(x) \leq 0$ minden $x \in I$ -re, akkor f **konkáv**.

Bizonyítás elég kicsi t -re.

- ① Tegyük fel, hogy $f''(x) \geq 0$ minden $x \in I$ -n. Rögzítsünk $x < y$.
- ② Legyen $g(t) = f((1-t)x + ty) - ((1-t)f(x) + tf(y))$. Ekkor $g(0) = g(1) = 0$.
- ③ A láncszabály szerint $g'(t) = f'((1-t)x + ty)(y-x) - (f(y) - f(x))$ és $g''(t) = f''((1-t)x + ty)(y-x)^2$.
- ④ g kétszer differenciálható, $g''(t) \geq 0 \implies g'(t)$ monoton növekvő.
- ⑤ Tfh. $g(t) > 0$ egy $t \in (0, 1)$ -re.
- ⑥ $\exists \alpha \in (0, t): g'(\alpha) = \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} > 0$.
- ⑦ $\exists \beta \in (t, 1): g'(\beta) = \frac{g(1) - g(t)}{1 - t} < 0$.
- ⑧ Azaz $\alpha < \beta$ és $g'(\alpha) > 0 > g'(\beta)$, ami ellentmond a g' monotonitásának.
- ⑨ Tehát $g(t) \leq 0$ minden $t \in [0, 1]$ -re, azaz f konvex. □

Konvexitás és a második derivált

Tétel (Konvexitás-teszt)

Legyen f kétszer differenciálható egy I intervallumon. Ekkor:

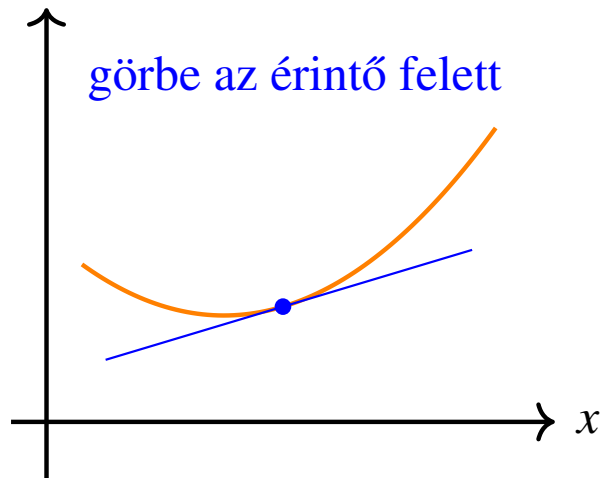
- ① Ha $f''(x) \geq 0$ minden $x \in I$ -re, akkor f **konvex**.
- ② Ha $f''(x) \leq 0$ minden $x \in I$ -re, akkor f **konkáv**.

Bizonyítás elég kicsi t -re.

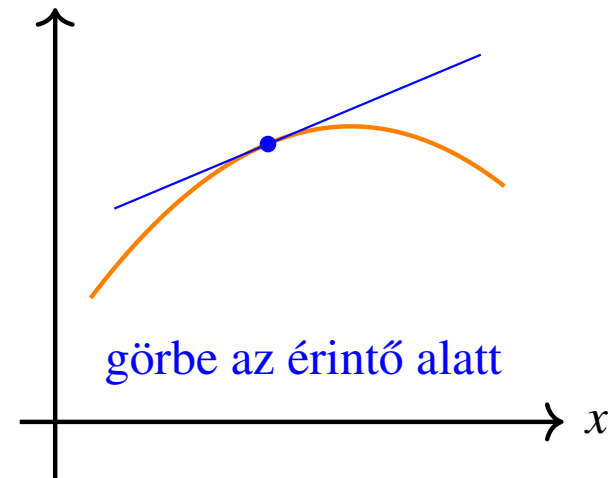
- ① Tegyük fel, hogy $f''(x) \geq 0$ minden $x \in I$ -n. Rögzítsünk $x < y$.
- ② Legyen $g(t) = f((1-t)x + ty) - ((1-t)f(x) + tf(y))$. Ekkor $g(0) = g(1) = 0$.
- ③ A láncszabály szerint $g'(t) = f'((1-t)x + ty)(y-x) - (f(y) - f(x))$ és $g''(t) = f''((1-t)x + ty)(y-x)^2$.
- ④ g kétszer differenciálható, $g''(t) \geq 0 \implies g'(t)$ monoton növekvő.
- ⑤ Tfh. $g(t) > 0$ egy $t \in (0, 1)$ -re.
- ⑥ $\exists \alpha \in (0, t): g'(\alpha) = \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} > 0$.
- ⑦ $\exists \beta \in (t, 1): g'(\beta) = \frac{g(1) - g(t)}{1 - t} < 0$.
- ⑧ Azaz $\alpha < \beta$ és $g'(\alpha) > 0 > g'(\beta)$, ami ellentmond a g' monotonitásának.
- ⑨ Tehát $g(t) \leq 0$ minden $t \in [0, 1]$ -re, azaz f konvex. □

A konvexitás tulajdonságai

- A konvex függvények görbéje az érintői felett halad, a konkáv függvények görbéje az érintői alatt halad.



Konvex (felfelé homorú)

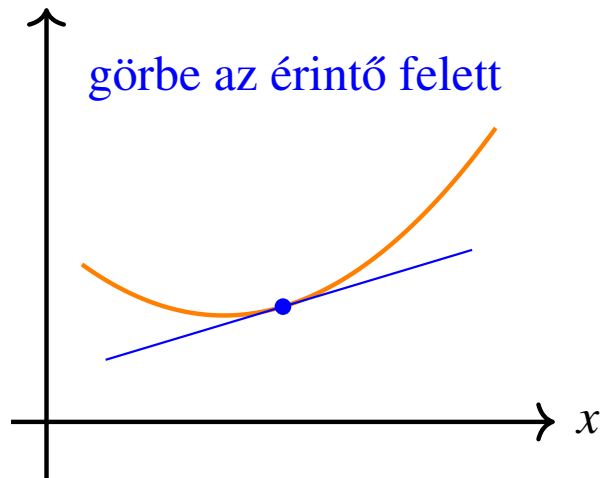


Konkáv (lefelé homorú)

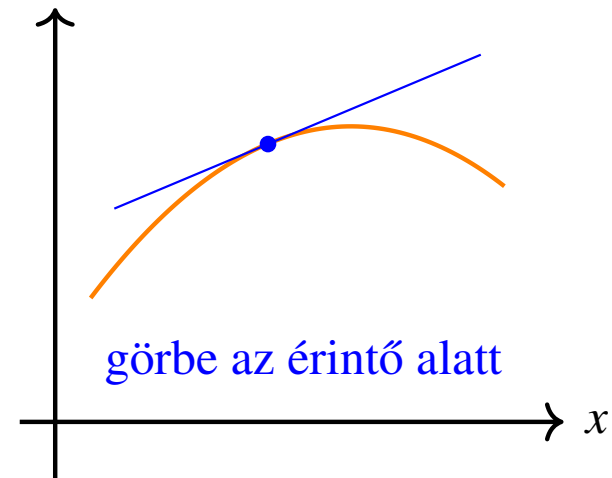
- A konvexitás-teszt differenciálhatósági feltétele nem feltétlen szükséges.
- Példa: Az abszolútérték függvény $f(x) = |x|$ konvex, de $f''(0)$ nem létezik.

A konvexitás tulajdonságai

- A konvex függvények görbéje az érintői felett halad, a konkáv függvények görbéje az érintői alatt halad.



Konvex (felfelé homorú)

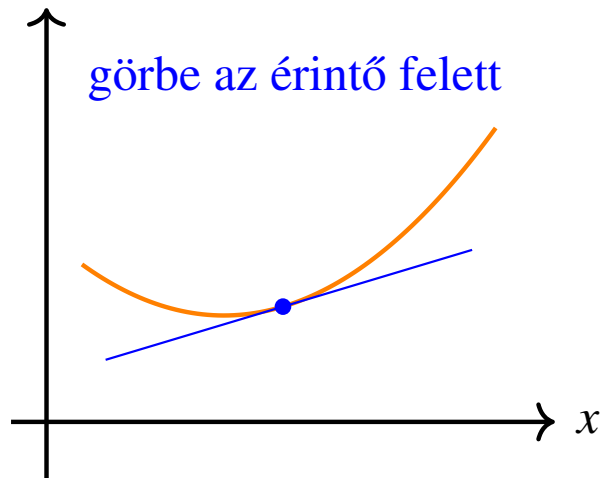


Konkáv (lefelé homorú)

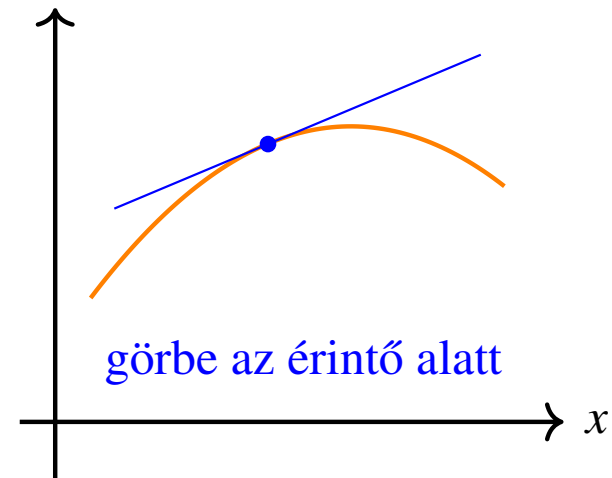
- A konvexitás-teszt differenciálhatósági feltétele nem feltétlen szükséges.
- Példa: Az abszolútérték függvény $f(x) = |x|$ konvex, de $f''(0)$ nem létezik.

A konvexitás tulajdonságai

- A konvex függvények görbéje az érintői felett halad, a konkáv függvények görbéje az érintői alatt halad.



Konvex (felfelé homorú)



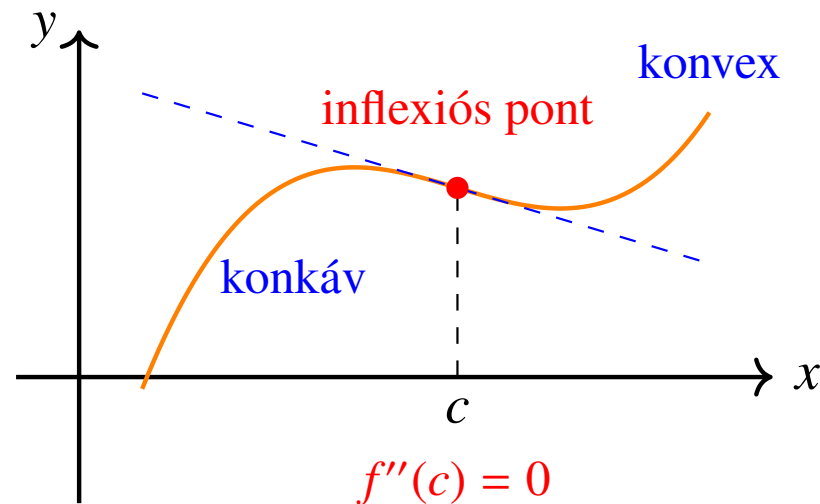
Konkáv (lefelé homorú)

- A konvexitás-teszt differenciálhatósági feltétele nem feltétlen szükséges.
- **Példa:** Az abszolútérték függvény $f(x) = |x|$ konvex, de $f''(0)$ nem létezik.

Inflexiós pontok

Definíció: Inflexiós pont

A c pont az f függvény **inflexiós pontja**, ha f folytonos c -ben, és f konvexitása **megváltozik** c -nél (konvexről konkávra, vagy fordítva).



Tétel: Inflexiós pont szükséges feltétele

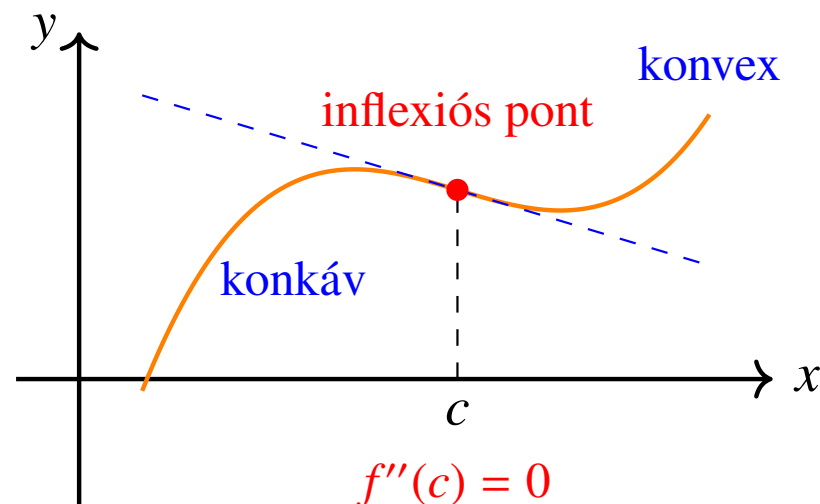
Ha c inflexiós pont és $f''(c)$ létezik, akkor $f''(c) = 0$.

Megjegyzés. $f''(c) = 0$ nem **elégséges** feltétel! Pl. $f(x) = x^4$: $f''(0) = 0$, de $x = 0$ **nem** inflexiós pont.

Inflexiós pontok

Definíció: Inflexiós pont

A c pont az f függvény **inflexiós pontja**, ha f folytonos c -ben, és f konvexitása **megváltozik** c -nél (konvexről konkávra, vagy fordítva).



Tétel: Inflexiós pont szükséges feltétele

Ha c inflexiós pont és $f''(c)$ létezik, akkor $f''(c) = 0$.

Megjegyzés. $f''(c) = 0$ nem **elégséges** feltétel! Pl. $f(x) = x^4$: $f''(0) = 0$, de $x = 0$ **nem** inflexiós pont.

A második derivált teszt lokális szélsőértékekre

Tétel (Második derivált teszt)

Legyen f kétszer differenciálható, és $f'(c) = 0$. Ekkor:

- 1 Ha $f''(c) > 0 \implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 2 Ha $f''(c) < 0 \implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 3 Ha $f''(c) = 0 \implies$ a teszt **nem dönt** (bármilyen lehet).

Az 1. eset biz.: $f''(c) > 0 \implies f'$ mon. növekvő c -hez közel. Mivel $f'(c) = 0$:

- c előtt: $f'(x) < 0$ (f csökkenő);
- c után: $f'(x) > 0$ (f növekvő).

Az első derivált teszt szerint c -ben lokális minimum van. □

Amikor a teszt nem dönt ($f''(c) = 0$)

A második derivált teszt lokális szélsőértékekre

Tétel (Második derivált teszt)

Legyen f kétszer differenciálható, és $f'(c) = 0$. Ekkor:

- 1 Ha $f''(c) > 0 \implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 2 Ha $f''(c) < 0 \implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 3 Ha $f''(c) = 0 \implies$ a teszt **nem dönt** (bármilyen lehet).

Az 1. eset biz.: $f''(c) > 0 \implies f'$ mon. növekvő c -hez közel. Mivel $f'(c) = 0$:

- c előtt: $f'(x) < 0$ (f csökkenő);
- c után: $f'(x) > 0$ (f növekvő).

Az első derivált teszt szerint c -ben lokális minimum van. □

Amikor a teszt nem dönt ($f''(c) = 0$)

A második derivált teszt lokális szélsőértékekre

Tétel (Második derivált teszt)

Legyen f kétszer differenciálható, és $f'(c) = 0$. Ekkor:

- 1 Ha $f''(c) > 0 \implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 2 Ha $f''(c) < 0 \implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 3 Ha $f''(c) = 0 \implies$ a teszt **nem dönt** (bármilyen lehet).

Az 1. eset biz.: $f''(c) > 0 \implies f'$ mon. növekvő c -hez közel. Mivel $f'(c) = 0$:

- c előtt: $f'(x) < 0$ (f csökkenő);
- c után: $f'(x) > 0$ (f növekvő).

Az első derivált teszt szerint c -ben lokális minimum van. □

Amikor a teszt nem dönt ($f''(c) = 0$)

A második derivált teszt lokális szélsőértékekre

Tétel (Második derivált teszt)

Legyen f kétszer differenciálható, és $f'(c) = 0$. Ekkor:

- 1 Ha $f''(c) > 0 \implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 2 Ha $f''(c) < 0 \implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 3 Ha $f''(c) = 0 \implies$ a teszt **nem dönt** (bármilyen lehet).

Az 1. eset biz.: $f''(c) > 0 \implies f'$ mon. növekvő c -hez közel. Mivel $f'(c) = 0$:

- c előtt: $f'(x) < 0$ (f csökkenő);
- c után: $f'(x) > 0$ (f növekvő).

Az első derivált teszt szerint c -ben lokális minimum van. □

Amikor a teszt nem dönt ($f''(c) = 0$)

A második derivált teszt lokális szélsőértékekre

Tétel (Második derivált teszt)

Legyen f kétszer differenciálható, és $f'(c) = 0$. Ekkor:

- 1 Ha $f''(c) > 0 \implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 2 Ha $f''(c) < 0 \implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 3 Ha $f''(c) = 0 \implies$ a teszt **nem dönt** (bármilyen lehet).

Az 1. eset biz.: $f''(c) > 0 \implies f'$ mon. növekvő c -hez közel. Mivel $f'(c) = 0$:

- c előtt: $f'(x) < 0$ (f csökkenő);
- c után: $f'(x) > 0$ (f növekvő).

Az első derivált teszt szerint c -ben lokális minimum van. □

Amikor a teszt nem dönt ($f''(c) = 0$)

A második derivált teszt lokális szélsőértékekre

Tétel (Második derivált teszt)

Legyen f kétszer differenciálható, és $f'(c) = 0$. Ekkor:

- ❶ Ha $f''(c) > 0 \implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- ❷ Ha $f''(c) < 0 \implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- ❸ Ha $f''(c) = 0 \implies$ a teszt **nem dönt** (bármilyen lehet).

Az 1. eset biz.: $f''(c) > 0 \implies f'$ mon. növekvő c -hez közel. Mivel $f'(c) = 0$:

- c előtt: $f'(x) < 0$ (f csökkenő);
- c után: $f'(x) > 0$ (f növekvő).

Az első derivált teszt szerint c -ben lokális minimum van. □

Amikor a teszt nem dönt ($f''(c) = 0$)

A második derivált teszt lokális szélsőértékekre

Tétel (Második derivált teszt)

Legyen f kétszer differenciálható, és $f'(c) = 0$. Ekkor:

- ① Ha $f''(c) > 0 \implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- ② Ha $f''(c) < 0 \implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- ③ Ha $f''(c) = 0 \implies$ a teszt **nem dönt** (bármilyen lehet).

Az 1. eset biz.: $f''(c) > 0 \implies f'$ mon. növekvő c -hez közel. Mivel $f'(c) = 0$:

- c előtt: $f'(x) < 0$ (f csökkenő);
- c után: $f'(x) > 0$ (f növekvő).

Az első derivált teszt szerint c -ben lokális minimum van. □

Amikor a teszt nem dönt ($f''(c) = 0$)

A második derivált teszt lokális szélsőértékekre

Tétel (Második derivált teszt)

Legyen f kétszer differenciálható, és $f'(c) = 0$. Ekkor:

- 1 Ha $f''(c) > 0 \implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 2 Ha $f''(c) < 0 \implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 3 Ha $f''(c) = 0 \implies$ a teszt **nem dönt** (bármilyen lehet).

Az 1. eset biz.: $f''(c) > 0 \implies f'$ mon. növekvő c -hez közel. Mivel $f'(c) = 0$:

- c előtt: $f'(x) < 0$ (f csökkenő);
- c után: $f'(x) > 0$ (f növekvő).

Az első derivált teszt szerint c -ben lokális minimum van. □

Amikor a teszt nem dönt ($f''(c) = 0$)

- $f(x) = x^4$: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0 \rightarrow$ lokális minimum.
- $f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0 \rightarrow$ sem max, sem min.

A második derivált teszt lokális szélsőértékekre

Tétel (Második derivált teszt)

Legyen f kétszer differenciálható, és $f'(c) = 0$. Ekkor:

- 1 Ha $f''(c) > 0 \implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 2 Ha $f''(c) < 0 \implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 3 Ha $f''(c) = 0 \implies$ a teszt **nem dönt** (bármilyen lehet).

Az 1. eset biz.: $f''(c) > 0 \implies f'$ mon. növekvő c -hez közel. Mivel $f'(c) = 0$:

- c előtt: $f'(x) < 0$ (f csökkenő);
- c után: $f'(x) > 0$ (f növekvő).

Az első derivált teszt szerint c -ben lokális minimum van. □

Amikor a teszt nem dönt ($f''(c) = 0$)

- $f(x) = x^4$: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0 \rightarrow$ lokális minimum.
- $f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0 \rightarrow$ sem max, sem min.

A második derivált teszt lokális szélsőértékekre

Tétel (Második derivált teszt)

Legyen f kétszer differenciálható, és $f'(c) = 0$. Ekkor:

- 1 Ha $f''(c) > 0 \implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- 2 Ha $f''(c) < 0 \implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- 3 Ha $f''(c) = 0 \implies$ a teszt **nem dönt** (bármilyen lehet).

Az 1. eset biz.: $f''(c) > 0 \implies f'$ mon. növekvő c -hez közel. Mivel $f'(c) = 0$:

- c előtt: $f'(x) < 0$ (f csökkenő);
- c után: $f'(x) > 0$ (f növekvő).

Az első derivált teszt szerint c -ben lokális minimum van. □

Amikor a teszt nem dönt ($f''(c) = 0$)

- $f(x) = x^4$: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0 \rightarrow$ lokális minimum.
- $f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0 \rightarrow$ sem max, sem min.

A második derivált teszt lokális szélsőértékekre

Tétel (Második derivált teszt)

Legyen f kétszer differenciálható, és $f'(c) = 0$. Ekkor:

- ❶ Ha $f''(c) > 0 \implies f$ -nek **lokális minimuma** van c -ben.
- ❷ Ha $f''(c) < 0 \implies f$ -nek **lokális maximuma** van c -ben.
- ❸ Ha $f''(c) = 0 \implies$ a teszt **nem dönt** (bármilyen lehet).

Az 1. eset biz.: $f''(c) > 0 \implies f'$ mon. növekvő c -hez közel. Mivel $f'(c) = 0$:

- c előtt: $f'(x) < 0$ (f csökkenő);
- c után: $f'(x) > 0$ (f növekvő).

Az első derivált teszt szerint c -ben lokális minimum van. □

Amikor a teszt nem dönt ($f''(c) = 0$)

- $f(x) = x^4$: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0 \rightarrow$ lokális minimum.
- $f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0 \rightarrow$ sem max, sem min.

Függvénygörbe felrajzolása – stratégia

Algoritmus: Függvényvizsgálat lépései

- 1 **Értelmezési tartomány:** Hol értelmezett f ?
- 2 **Szimmetria:** Páros ($f(-x) = f(x)$) vagy páratlan ($f(-x) = -f(x)$)?
- 3 **Tengelymetszetek:** $f(0) = ?$ és $f(x) = 0$ megoldásai.
- 4 **Első derivált, kritikus pontok:** $f'(x) = 0$ vagy nem létezik.
- 5 **Monotonitás:** f' előjeltáblázata; növekvő/csökkenő intervallumok.
- 6 **Lokális szélsőértékek:** Első vagy második derivált teszt.
- 7 **Második derivált, inflexiós pontok:** $f''(x) = 0$; konvex/konkáv intervallumok.
- 8 **Határérték a végtelenben:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; aszimptoták.
- 9 **Grafikon felrajzolása:** A fenti információk összegyűjtése alapján.

Megjegyzés. Nem minden lépésre van szükség minden feladatban. A lépések sorrendje rugalmas.

Függvénygörbe felrajzolása – stratégia

Algoritmus: Függvényvizsgálat lépései

- 1 **Értelmezési tartomány:** Hol értelmezett f ?
- 2 **Szimmetria:** Páros ($f(-x) = f(x)$) vagy páratlan ($f(-x) = -f(x)$)?
- 3 **Tengelymetszetek:** $f(0) = ?$ és $f(x) = 0$ megoldásai.
- 4 **Első derivált, kritikus pontok:** $f'(x) = 0$ vagy nem létezik.
- 5 **Monotonitás:** f' előjeltáblázata; növekvő/csökkenő intervallumok.
- 6 **Lokális szélsőértékek:** Első vagy második derivált teszt.
- 7 **Második derivált, inflexiós pontok:** $f''(x) = 0$; konvex/konkáv intervallumok.
- 8 **Határérték a végtelenben:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; aszimptoták.
- 9 **Grafikon felrajzolása:** A fenti információk összegyűjtése alapján.

Megjegyzés. Nem minden lépésre van szükség minden feladatban. A lépések sorrendje rugalmas.

Függvénygörbe felrajzolása – stratégia

Algoritmus: Függvényvizsgálat lépései

- 1 **Értelmezési tartomány:** Hol értelmezett f ?
- 2 **Szimmetria:** Páros ($f(-x) = f(x)$) vagy páratlan ($f(-x) = -f(x)$)?
- 3 **Tengelymetszetek:** $f(0) = ?$ és $f(x) = 0$ megoldásai.
- 4 **Első derivált, kritikus pontok:** $f'(x) = 0$ vagy nem létezik.
- 5 **Monotonitás:** f' előjeltáblázata; növekvő/csökkenő intervallumok.
- 6 **Lokális szélsőértékek:** Első vagy második derivált teszt.
- 7 **Második derivált, inflexiós pontok:** $f''(x) = 0$; konvex/konkáv intervallumok.
- 8 **Határérték a végtelenben:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; aszimptoták.
- 9 **Grafikon felrajzolása:** A fenti információk összegyűjtése alapján.

Megjegyzés. Nem minden lépésre van szükség minden feladatban. A lépések sorrendje rugalmas.

Függvénygörbe felrajzolása – stratégia

Algoritmus: Függvényvizsgálat lépései

- 1 **Értelmezési tartomány:** Hol értelmezett f ?
- 2 **Szimmetria:** Páros ($f(-x) = f(x)$) vagy páratlan ($f(-x) = -f(x)$)?
- 3 **Tengelymetszetek:** $f(0) = ?$ és $f(x) = 0$ megoldásai.
- 4 **Első derivált, kritikus pontok:** $f'(x) = 0$ vagy nem létezik.
- 5 **Monotonitás:** f' előjeltáblázata; növekvő/csökkenő intervallumok.
- 6 **Lokális szélsőértékek:** Első vagy második derivált teszt.
- 7 **Második derivált, inflexiós pontok:** $f''(x) = 0$; konvex/konkáv intervallumok.
- 8 **Határérték a végtelenben:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; aszimptoták.
- 9 **Grafikon felrajzolása:** A fenti információk összegyűjtése alapján.

Megjegyzés. Nem minden lépésre van szükség minden feladatban. A lépések sorrendje rugalmas.

Függvénygörbe felrajzolása – stratégia

Algoritmus: Függvényvizsgálat lépései

- 1 **Értelmezési tartomány:** Hol értelmezett f ?
- 2 **Szimmetria:** Páros ($f(-x) = f(x)$) vagy páratlan ($f(-x) = -f(x)$)?
- 3 **Tengelymetszetek:** $f(0) = ?$ és $f(x) = 0$ megoldásai.
- 4 **Első derivált, kritikus pontok:** $f'(x) = 0$ vagy nem létezik.
- 5 **Monotonitás:** f' előjeltáblázata; növekvő/csökkenő intervallumok.
- 6 **Lokális szélsőértékek:** Első vagy második derivált teszt.
- 7 **Második derivált, inflexiós pontok:** $f''(x) = 0$; konvex/konkáv intervallumok.
- 8 **Határérték a végtelenben:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; aszimptoták.
- 9 **Grafikon felrajzolása:** A fenti információk összegyűjtése alapján.

Megjegyzés. Nem minden lépésre van szükség minden feladatban. A lépések sorrendje rugalmas.

Függvénygörbe felrajzolása – stratégia

Algoritmus: Függvényvizsgálat lépései

- 1 **Értelmezési tartomány:** Hol értelmezett f ?
- 2 **Szimmetria:** Páros ($f(-x) = f(x)$) vagy páratlan ($f(-x) = -f(x)$)?
- 3 **Tengelymetszetek:** $f(0) = ?$ és $f(x) = 0$ megoldásai.
- 4 **Első derivált, kritikus pontok:** $f'(x) = 0$ vagy nem létezik.
- 5 **Monotonitás:** f' előjeltáblázata; növekvő/csökkenő intervallumok.
- 6 **Lokális szélsőértékek:** Első vagy második derivált teszt.
- 7 **Második derivált, inflexiós pontok:** $f''(x) = 0$; konvex/konkáv intervallumok.
- 8 **Határérték a végtelenben:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; aszimptoták.
- 9 **Grafikon felrajzolása:** A fenti információk összegyűjtése alapján.

Megjegyzés. Nem minden lépésre van szükség minden feladatban. A lépések sorrendje rugalmas.

Függvénygörbe felrajzolása – stratégia

Algoritmus: Függvényvizsgálat lépései

- 1 **Értelmezési tartomány:** Hol értelmezett f ?
- 2 **Szimmetria:** Páros ($f(-x) = f(x)$) vagy páratlan ($f(-x) = -f(x)$)?
- 3 **Tengelymetszetek:** $f(0) = ?$ és $f(x) = 0$ megoldásai.
- 4 **Első derivált, kritikus pontok:** $f'(x) = 0$ vagy nem létezik.
- 5 **Monotonitás:** f' előjeltáblázata; növekvő/csökkenő intervallumok.
- 6 **Lokális szélsőértékek:** Első vagy második derivált teszt.
- 7 **Második derivált, inflexiós pontok:** $f''(x) = 0$; konvex/konkáv intervallumok.
- 8 **Határérték a végtelenben:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; aszimptoták.
- 9 **Grafikon felrajzolása:** A fenti információk összegyűjtése alapján.

Megjegyzés. Nem minden lépésre van szükség minden feladatban. A lépések sorrendje rugalmas.

Függvénygörbe felrajzolása – stratégia

Algoritmus: Függvényvizsgálat lépései

- 1 **Értelmezési tartomány:** Hol értelmezett f ?
- 2 **Szimmetria:** Páros ($f(-x) = f(x)$) vagy páratlan ($f(-x) = -f(x)$)?
- 3 **Tengelymetszetek:** $f(0) = ?$ és $f(x) = 0$ megoldásai.
- 4 **Első derivált, kritikus pontok:** $f'(x) = 0$ vagy nem létezik.
- 5 **Monotonitás:** f' előjeltáblázata; növekvő/csökkenő intervallumok.
- 6 **Lokális szélsőértékek:** Első vagy második derivált teszt.
- 7 **Második derivált, inflexiós pontok:** $f''(x) = 0$; konvex/konkáv intervallumok.
- 8 **Határérték a végtelenben:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; aszimptoták.
- 9 **Grafikon felrajzolása:** A fenti információk összegyűjtése alapján.

Megjegyzés. Nem minden lépésre van szükség minden feladatban. A lépések sorrendje rugalmas.

Függvénygörbe felrajzolása – stratégia

Algoritmus: Függvényvizsgálat lépései

- ❶ **Értelmezési tartomány:** Hol értelmezett f ?
- ❷ **Szimmetria:** Páros ($f(-x) = f(x)$) vagy páratlan ($f(-x) = -f(x)$)?
- ❸ **Tengelymetszetek:** $f(0) = ?$ és $f(x) = 0$ megoldásai.
- ❹ **Első derivált, kritikus pontok:** $f'(x) = 0$ vagy nem létezik.
- ❺ **Monotonitás:** f' előjeltáblázata; növekvő/csökkenő intervallumok.
- ❻ **Lokális szélsőértékek:** Első vagy második derivált teszt.
- ❼ **Második derivált, inflexiós pontok:** $f''(x) = 0$; konvex/konkáv intervallumok.
- ❽ **Határérték a végtelenben:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; aszimptoták.
- ❾ **Grafikon felrajzolása:** A fenti információk összegyűjtése alapján.

Megjegyzés. Nem minden lépésre van szükség minden feladatban. A lépések sorrendje rugalmas.

Függvénygörbe felrajzolása – stratégia

Algoritmus: Függvényvizsgálat lépései

- 1 **Értelmezési tartomány:** Hol értelmezett f ?
- 2 **Szimmetria:** Páros ($f(-x) = f(x)$) vagy páratlan ($f(-x) = -f(x)$)?
- 3 **Tengelymetszetek:** $f(0) = ?$ és $f(x) = 0$ megoldásai.
- 4 **Első derivált, kritikus pontok:** $f'(x) = 0$ vagy nem létezik.
- 5 **Monotonitás:** f' előjeltáblázata; növekvő/csökkenő intervallumok.
- 6 **Lokális szélsőértékek:** Első vagy második derivált teszt.
- 7 **Második derivált, inflexiós pontok:** $f''(x) = 0$; konvex/konkáv intervallumok.
- 8 **Határérték a végtelenben:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; aszimptoták.
- 9 **Grafikon felrajzolása:** A fenti információk összegyűjtése alapján.

Megjegyzés. Nem minden lépésre van szükség minden feladatban. A lépések sorrendje rugalmas.

Függvénygörbe felrajzolása – stratégia

Algoritmus: Függvényvizsgálat lépései

- ❶ **Értelmezési tartomány:** Hol értelmezett f ?
- ❷ **Szimmetria:** Páros ($f(-x) = f(x)$) vagy páratlan ($f(-x) = -f(x)$)?
- ❸ **Tengelymetszetek:** $f(0) = ?$ és $f(x) = 0$ megoldásai.
- ❹ **Első derivált, kritikus pontok:** $f'(x) = 0$ vagy nem létezik.
- ❺ **Monotonitás:** f' előjeltáblázata; növekvő/csökkenő intervallumok.
- ❻ **Lokális szélsőértékek:** Első vagy második derivált teszt.
- ❼ **Második derivált, inflexiós pontok:** $f''(x) = 0$; konvex/konkáv intervallumok.
- ❽ **Határérték a végtelenben:** $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; aszimptoták.
- ❾ **Grafikon felrajzolása:** A fenti információk összegyűjtése alapján.

Megjegyzés. Nem minden lépésre van szükség minden feladatban. A lépések sorrendje rugalmas.

Kidolgozott példa: teljes függvényvizsgálat

Példa

Rajzoljuk fel az $f(x) = x^4 - 4x^3$ függvény grafikonját!

Deriváltak: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$,

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$.

Kritikus pontok: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ és $x = 3$.

Inflexiós pontok: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ és $x = 2$.

Előjeltáblázat:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	–	0	–	–	–	0	+
$f''(x)$	+	0	–	0	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	–16	$\searrow$	–27	$\nearrow$
	konvex	infl.	konkáv	infl.	konvex	lok. min	konvex

Lokális minimum: $f(3) = 81 - 108 = -27$. Az $x = 0$ pont: nincs szélsőérték (nincs előjelváltás f' -ben), de inflexiós pont.

Kidolgozott példa: teljes függvényvizsgálat

Példa

Rajzoljuk fel az $f(x) = x^4 - 4x^3$ függvény grafikonját!

Deriváltak: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$,

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$.

Kritikus pontok: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ és $x = 3$.

Inflexiós pontok: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ és $x = 2$.

Előjeltáblázat:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	–	0	–	–	–	0	+
$f''(x)$	+	0	–	0	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	–16	$\searrow$	–27	$\nearrow$
	konvex	infl.	konkáv	infl.	konvex	lok. min	konvex

Lokális minimum: $f(3) = 81 - 108 = -27$. Az $x = 0$ pont: nincs szélsőérték (nincs előjelváltás f' -ben), de inflexiós pont.

Kidolgozott példa: teljes függvényvizsgálat

Példa

Rajzoljuk fel az $f(x) = x^4 - 4x^3$ függvény grafikonját!

Deriváltak: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$,

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$.

Kritikus pontok: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ és $x = 3$.

Inflexiós pontok: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ és $x = 2$.

Előjeltáblázat:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	–	0	–	–	–	0	+
$f''(x)$	+	0	–	0	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	–16	$\searrow$	–27	$\nearrow$
	konvex	infl.	konkáv	infl.	konvex	lok. min	konvex

Lokális minimum: $f(3) = 81 - 108 = -27$. Az $x = 0$ pont: nincs szélsőérték (nincs előjelváltás f' -ben), de inflexiós pont.

Kidolgozott példa: teljes függvényvizsgálat

Példa

Rajzoljuk fel az $f(x) = x^4 - 4x^3$ függvény grafikonját!

Deriváltak: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$,

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$.

Kritikus pontok: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ és $x = 3$.

Inflexiós pontok: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ és $x = 2$.

Előjeltáblázat:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	–	0	–	–	–	0	+
$f''(x)$	+	0	–	0	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	–16	$\searrow$	–27	$\nearrow$
	konvex	infl.	konkáv	infl.	konvex	lok. min	konvex

Lokális minimum: $f(3) = 81 - 108 = -27$. Az $x = 0$ pont: nincs szélsőérték (nincs előjelváltás f' -ben), de inflexiós pont.

Tagolás

- 1 Függvény szélsőértékei
- 2 A Lagrange-féle középértéktétel
- 3 Monoton függvények és az első derivált teszt
- 4 Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása
- 5 Alkalmazott optimalizációs problémák**
- 6 Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály
- 7 A Newton-módszer
- 8 Primitív függvények

Optimalizációs feladatok megoldási stratégiája

Algoritmus: Alkalmazott optimalizációs feladatok

- 1 Értsd meg a feladatot! Rajzolj ábrát, vezess be jelöléseket.
- 2 Határozd meg a célfüggvényt! Mit kell maximalizálni vagy minimalizálni? Fejezd ki egyetlen változó függvényeként.
- 3 Írd fel a feltételeket (kényszerfeltételek)! Milyen összefüggések vannak a változók között?
- 4 Határozd meg az értelmezési tartományt! Milyen értékeket vehet fel a változó?
- 5 Keresd meg a szélsőértéket! Zárt intervallum $\Rightarrow$ zárt intervallum módszer. Nyílt intervallum $\Rightarrow$ első/második derivált teszt.

Megjegyzés. Ha a feladat zárt intervallumon értelmezett $\Rightarrow$ Weierstrass-tétel garantálja a megoldás létezését!

Optimalizációs feladatok megoldási stratégiája

Algoritmus: Alkalmazott optimalizációs feladatok

- 1 **Értsd meg a feladatot!** Rajzolj ábrát, vezess be jelöléseket.
- 2 **Határozd meg a célfüggvényt!** Mit kell maximalizálni vagy minimalizálni? Fejezd ki egyetlen változó függvényeként.
- 3 **Írd fel a feltételeket (kényszerfeltételek)!** Milyen összefüggések vannak a változók között?
- 4 **Határozd meg az értelmezési tartományt!** Milyen értékeket vehet fel a változó?
- 5 **Keresd meg a szélsőértéket!** Zárt intervallum $\Rightarrow$ zárt intervallum módszer. Nyílt intervallum $\Rightarrow$ első/második derivált teszt.

Megjegyzés. Ha a feladat zárt intervallumon értelmezett $\Rightarrow$ Weierstrass-tétel garantálja a megoldás létezését!

Optimalizációs feladatok megoldási stratégiája

Algoritmus: Alkalmazott optimalizációs feladatok

- 1 **Értsd meg a feladatot!** Rajzolj ábrát, vezess be jelöléseket.
- 2 **Határozd meg a célfüggvényt!** Mit kell maximalizálni vagy minimalizálni? Fejezd ki egyetlen változó függvényeként.
- 3 **Írd fel a feltételeket (kényszerfeltételek)!** Milyen összefüggések vannak a változók között?
- 4 **Határozd meg az értelmezési tartományt!** Milyen értékeket vehet fel a változó?
- 5 **Keresd meg a szélsőértéket!** Zárt intervallum $\Rightarrow$ zárt intervallum módszer. Nyílt intervallum $\Rightarrow$ első/második derivált teszt.

Megjegyzés. Ha a feladat zárt intervallumon értelmezett $\Rightarrow$ Weierstrass-tétel garantálja a megoldás létezését!

Optimalizációs feladatok megoldási stratégiája

Algoritmus: Alkalmazott optimalizációs feladatok

- 1 **Értsd meg a feladatot!** Rajzolj ábrát, vezess be jelöléseket.
- 2 **Határozd meg a célfüggvényt!** Mit kell maximalizálni vagy minimalizálni? Fejezd ki egyetlen változó függvényeként.
- 3 **Írd fel a feltételeket (kényszerfeltételek)! Milyen összefüggések vannak a változók között?**
- 4 **Határozd meg az értelmezési tartományt!** Milyen értékeket vehet fel a változó?
- 5 **Keresd meg a szélsőértéket!** Zárt intervallum $\Rightarrow$ zárt intervallum módszer. Nyílt intervallum $\Rightarrow$ első/második derivált teszt.

Megjegyzés. Ha a feladat zárt intervallumon értelmezett $\Rightarrow$ Weierstrass-tétel garantálja a megoldás létezését!

Optimalizációs feladatok megoldási stratégiája

Algoritmus: Alkalmazott optimalizációs feladatok

- 1 **Értsd meg a feladatot!** Rajzolj ábrát, vezess be jelöléseket.
- 2 **Határozd meg a célfüggvényt!** Mit kell maximalizálni vagy minimalizálni? Fejezd ki egyetlen változó függvényeként.
- 3 **Írd fel a feltételeket (kényszerfeltételek)!** Milyen összefüggések vannak a változók között?
- 4 **Határozd meg az értelmezési tartományt!** Milyen értékeket vehet fel a változó?
- 5 **Keresd meg a szélsőértéket!** Zárt intervallum $\Rightarrow$ zárt intervallum módszer. Nyílt intervallum $\Rightarrow$ első/második derivált teszt.

Megjegyzés. Ha a feladat zárt intervallumon értelmezett $\Rightarrow$ Weierstrass-tétel garantálja a megoldás létezését!

Optimalizációs feladatok megoldási stratégiája

Algoritmus: Alkalmazott optimalizációs feladatok

- 1 **Értsd meg a feladatot!** Rajzolj ábrát, vezess be jelöléseket.
- 2 **Határozd meg a célfüggvényt!** Mit kell maximalizálni vagy minimalizálni? Fejezd ki egyetlen változó függvényeként.
- 3 **Írd fel a feltételeket (kényszerfeltételek)!** Milyen összefüggések vannak a változók között?
- 4 **Határozd meg az értelmezési tartományt!** Milyen értékeket vehet fel a változó?
- 5 **Keresd meg a szélsőértéket!** Zárt intervallum $\Rightarrow$ zárt intervallum módszer. Nyílt intervallum $\Rightarrow$ első/második derivált teszt.

Megjegyzés. Ha a feladat zárt intervallumon értelmezett $\Rightarrow$ Weierstrass-tétel garantálja a megoldás létezését!

Optimalizációs feladatok megoldási stratégiája

Algoritmus: Alkalmazott optimalizációs feladatok

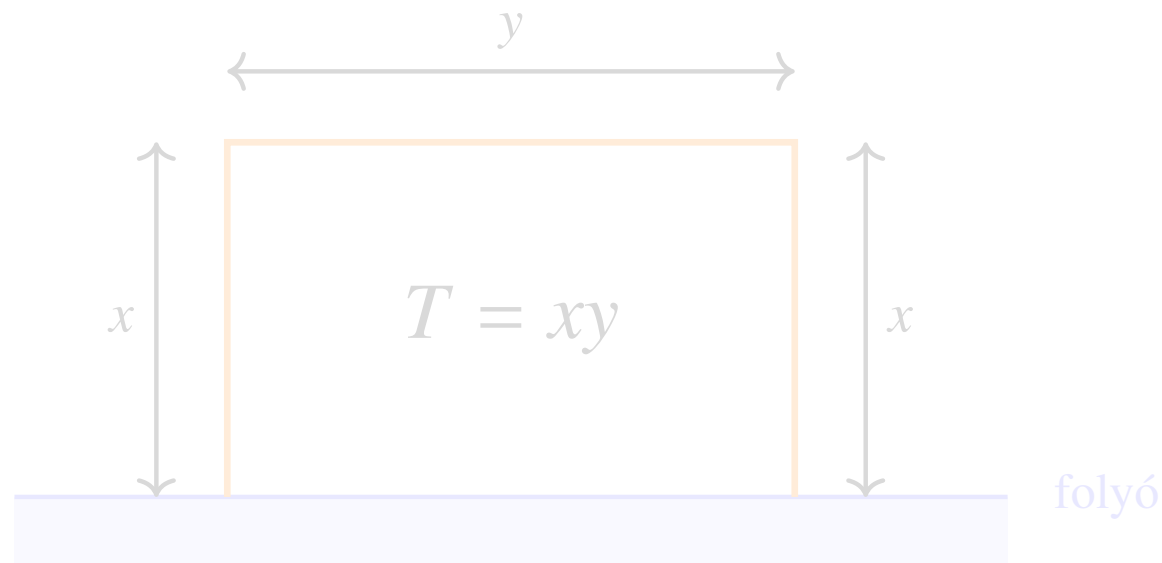
- 1 **Értsd meg a feladatot!** Rajzolj ábrát, vezess be jelöléseket.
- 2 **Határozd meg a célfüggvényt!** Mit kell maximalizálni vagy minimalizálni? Fejezd ki egyetlen változó függvényeként.
- 3 **Írd fel a feltételeket (kényszerfeltételek)!** Milyen összefüggések vannak a változók között?
- 4 **Határozd meg az értelmezési tartományt!** Milyen értékeket vehet fel a változó?
- 5 **Keresd meg a szélsőértéket!** Zárt intervallum $\Rightarrow$ zárt intervallum módszer. Nyílt intervallum $\Rightarrow$ első/második derivált teszt.

Megjegyzés. Ha a feladat zárt intervallumon értelmezett $\Rightarrow$ Weierstrass-tétel garantálja a megoldás létezését!

1. példa: Kerítés feladat

Feladat

Egy gazda 400 m kerítéssel akar bekeríteni egy téglalap alakú legelőt, amelynek egyik oldala egy egyenes folyópart (ott nem kell kerítés). Mekkora a **legnagyobb terület**, amit be tud keríteni?



Változók: x = a két kerített oldal hossza, y = a folyóval párhuzamos oldal.

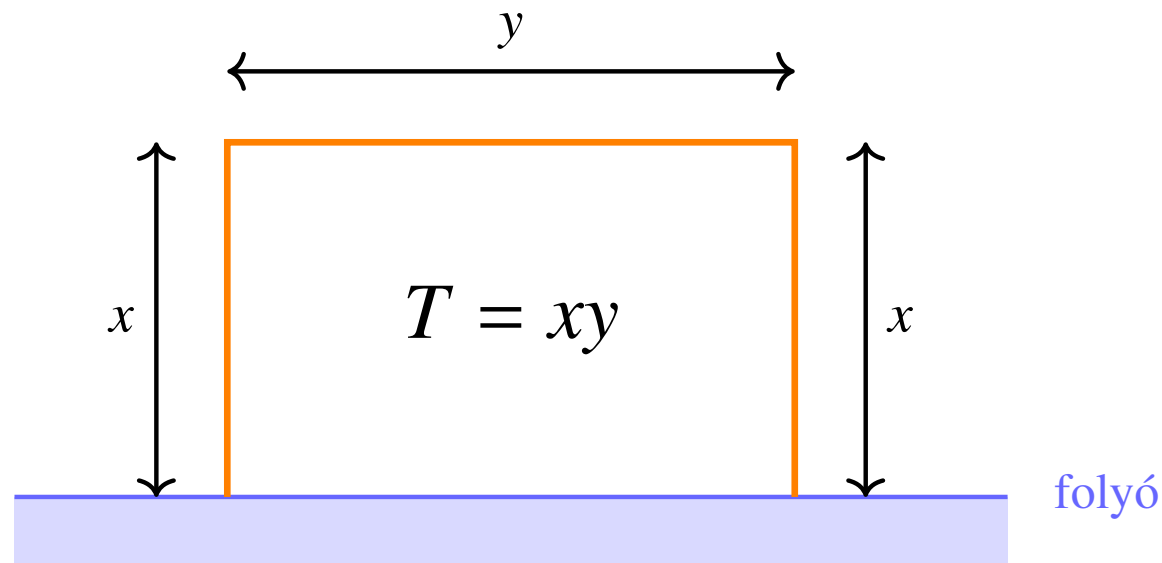
Kényszerfeltétel: $2x + y = 400$, tehát $y = 400 - 2x$.

Értelmezési tartomány: $x \in [0, 200]$.

1. példa: Kerítés feladat

Feladat

Egy gazda 400 m kerítéssel akar bekeríteni egy téglalap alakú legelőt, amelynek egyik oldala egy egyenes folyópart (ott nem kell kerítés). Mekkora a **legnagyobb terület**, amit be tud keríteni?



Változók: x = a két kerített oldal hossza, y = a folyóval párhuzamos oldal.

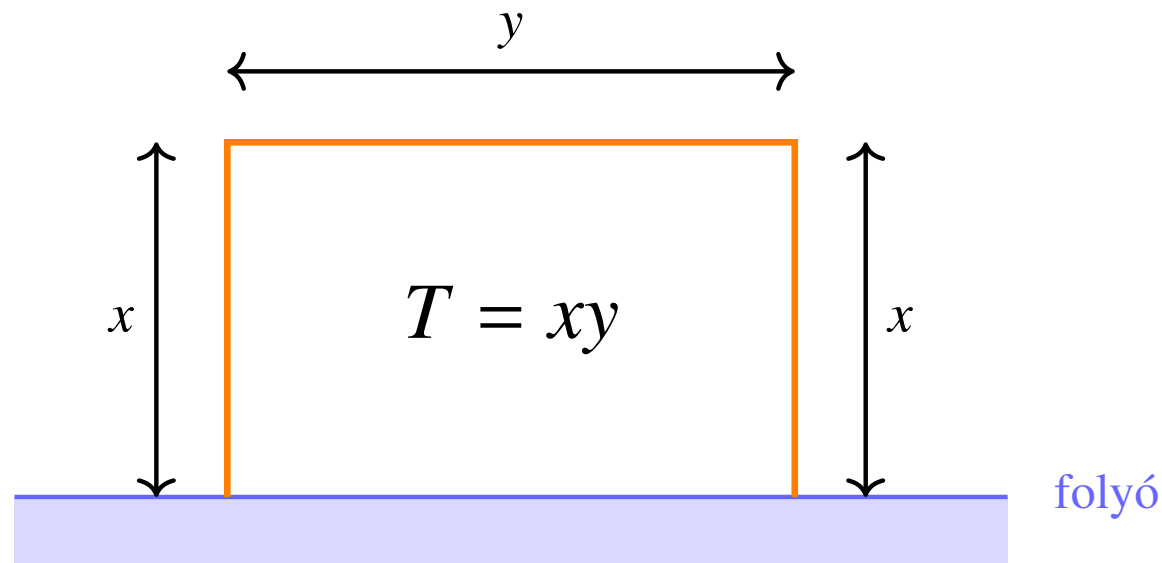
Kényszerfeltétel: $2x + y = 400$, tehát $y = 400 - 2x$.

Értelmezési tartomány: $x \in [0, 200]$.

1. példa: Kerítés feladat

Feladat

Egy gazda 400 m kerítéssel akar bekeríteni egy téglalap alakú legelőt, amelynek egyik oldala egy egyenes folyópart (ott nem kell kerítés). Mekkora a **legnagyobb terület**, amit be tud keríteni?



Változók: x = a két kerített oldal hossza, y = a folyóval párhuzamos oldal.

Kényszerfeltétel: $2x + y = 400$, tehát $y = 400 - 2x$.

Értelmezési tartomány: $x \in [0, 200]$.

1. példa: megoldás

Célfüggvény (egyetlen változóban):

$$T(x) = x \cdot y = x(400 - 2x) = 400x - 2x^2, \quad x \in [0, 200].$$

Derivált és kritikus pont:

$$T'(x) = 400 - 4x = 0 \implies x = 100.$$

Zárt intervallum módszer:

x	0	100	200
$T(x)$	0	20 000	0

Eredmény:

- Legnagyobb terület: $T(100) = 20\,000 \text{ m}^2$.
- Optimális méretek: $x = 100 \text{ m}$, $y = 400 - 200 = 200 \text{ m}$.

Megjegyzés. A második derivált is megerősíti: $T''(x) = -4 < 0 \implies$ lokális (és egyben abszolút) maximum.

1. példa: megoldás

Célfüggvény (egyetlen változóban):

$$T(x) = x \cdot y = x(400 - 2x) = 400x - 2x^2, \quad x \in [0, 200].$$

Derivált és kritikus pont:

$$T'(x) = 400 - 4x = 0 \implies x = 100.$$

Zárt intervallum módszer:

x	0	100	200
$T(x)$	0	20 000	0

Eredmény:

- Legnagyobb terület: $T(100) = 20\,000 \text{ m}^2$.
- Optimális méretek: $x = 100 \text{ m}$, $y = 400 - 200 = 200 \text{ m}$.

Megjegyzés. A második derivált is megerősíti: $T''(x) = -4 < 0 \implies$ lokális (és egyben abszolút) maximum.

1. példa: megoldás

Célfüggvény (egyetlen változóban):

$$T(x) = x \cdot y = x(400 - 2x) = 400x - 2x^2, \quad x \in [0, 200].$$

Derivált és kritikus pont:

$$T'(x) = 400 - 4x = 0 \implies x = 100.$$

Zárt intervallum módszer:

x	0	100	200
$T(x)$	0	20 000	0

Eredmény:

- Legnagyobb terület: $T(100) = 20\,000 \text{ m}^2$.
- Optimális méretek: $x = 100 \text{ m}$, $y = 400 - 200 = 200 \text{ m}$.

Megjegyzés. A második derivált is megerősíti: $T''(x) = -4 < 0 \implies$ lokális (és egyben abszolút) maximum.

1. példa: megoldás

Célfüggvény (egyetlen változóban):

$$T(x) = x \cdot y = x(400 - 2x) = 400x - 2x^2, \quad x \in [0, 200].$$

Derivált és kritikus pont:

$$T'(x) = 400 - 4x = 0 \implies x = 100.$$

Zárt intervallum módszer:

x	0	100	200
$T(x)$	0	20 000	0

Eredmény:

- Legnagyobb terület: $T(100) = 20\,000 \text{ m}^2$.
- Optimális méretek: $x = 100 \text{ m}$, $y = 400 - 200 = 200 \text{ m}$.

Megjegyzés. A második derivált is megerősíti: $T''(x) = -4 < 0 \implies$ lokális (és egyben abszolút) maximum.

1. példa: megoldás

Célfüggvény (egyetlen változóban):

$$T(x) = x \cdot y = x(400 - 2x) = 400x - 2x^2, \quad x \in [0, 200].$$

Derivált és kritikus pont:

$$T'(x) = 400 - 4x = 0 \implies x = 100.$$

Zárt intervallum módszer:

x	0	100	200
$T(x)$	0	20 000	0

Eredmény:

- Legnagyobb terület: $T(100) = 20\,000 \text{ m}^2$.
- Optimális méretek: $x = 100 \text{ m}$, $y = 400 - 200 = 200 \text{ m}$.

Megjegyzés. A második derivált is megerősíti: $T''(x) = -4 < 0 \implies$ lokális (és egyben abszolút) maximum.

1. példa: megoldás

Célfüggvény (egyetlen változóban):

$$T(x) = x \cdot y = x(400 - 2x) = 400x - 2x^2, \quad x \in [0, 200].$$

Derivált és kritikus pont:

$$T'(x) = 400 - 4x = 0 \implies x = 100.$$

Zárt intervallum módszer:

x	0	100	200
$T(x)$	0	20 000	0

Eredmény:

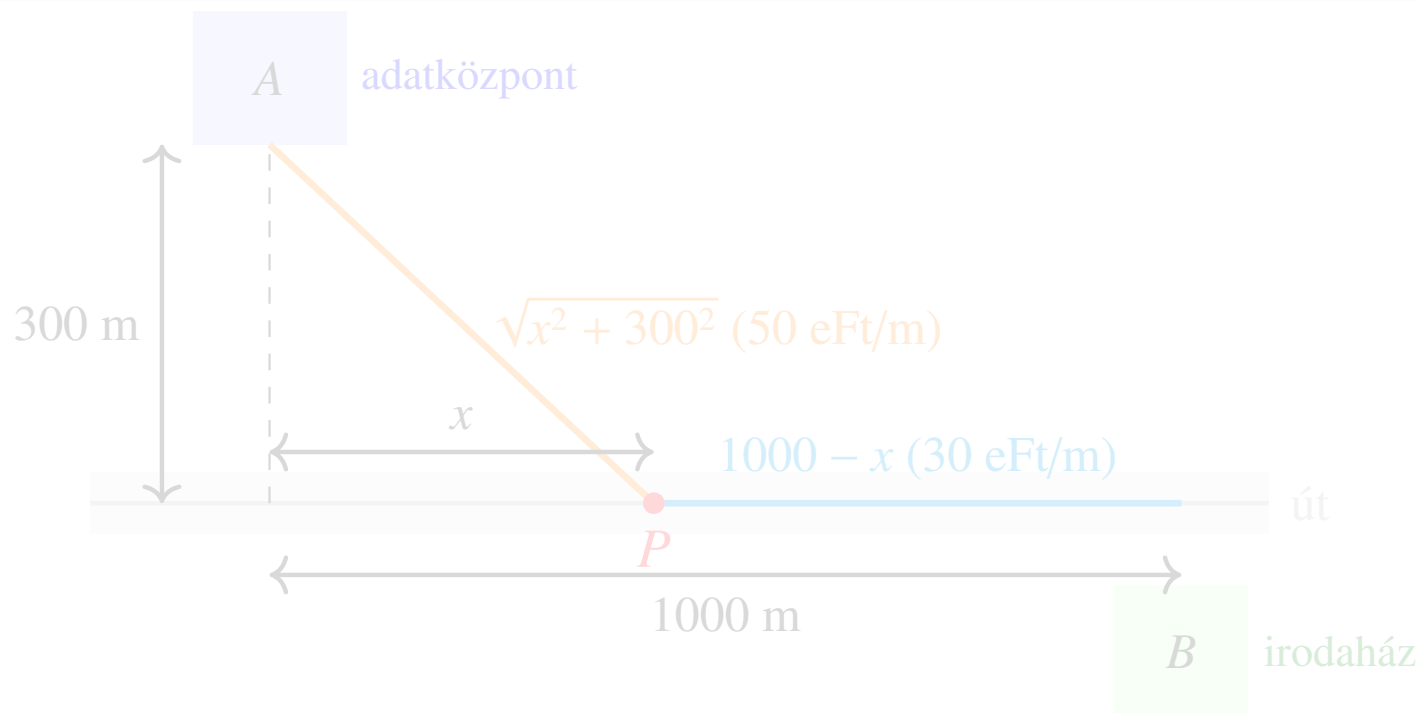
- Legnagyobb terület: $T(100) = 20\,000 \text{ m}^2$.
- Optimális méretek: $x = 100 \text{ m}$, $y = 400 - 200 = 200 \text{ m}$.

Megjegyzés. A **második derivált** is megerősíti: $T''(x) = -4 < 0 \implies$ lokális (és egyben abszolút) maximum.

2. példa: Optikai kábel fektetése

Feladat

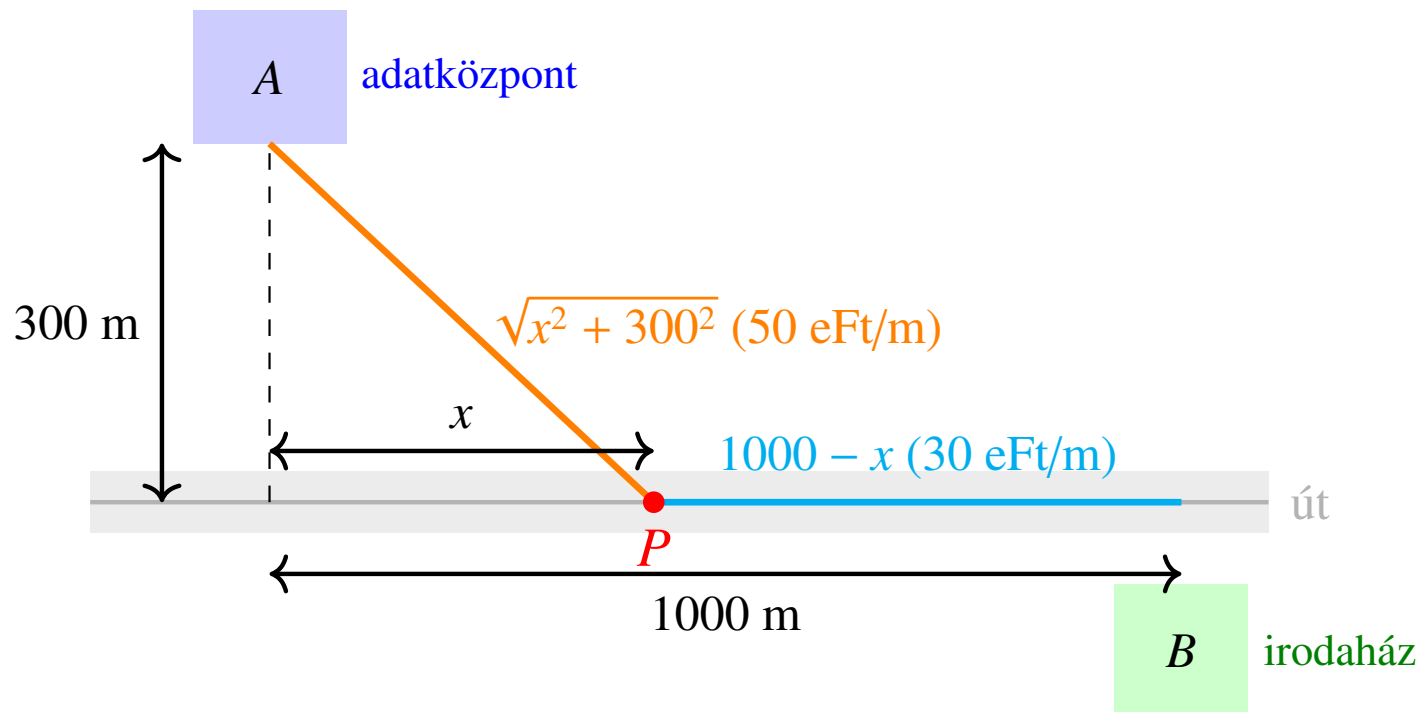
Egy adatközpontot (A) optikai kábellel kell összekötni egy irodaházzal (B). Az adatközpont **300 m**-re van az egyenes úttól; az irodaház az út mentén, az A-hoz legközelebbi ponttól **1000 m**-re. Az **út mentén** a kábelfektetés **30 ezer Ft/m**, a **terepen** **50 ezer Ft/m**. Hol csatlakozzunk az úthoz, hogy a **költség minimális** legyen?



2. példa: Optikai kábel fektetése

Feladat

Egy adatközpontot (A) optikai kábellel kell összekötni egy irodaházzal (B). Az adatközpont 300 m-re van az egyenes úttól; az irodaház az út mentén, az A-hoz legközelebbi ponttól 1000 m-re. Az **út mentén** a kábelfektetés 30 ezer Ft/m, a **terepen** 50 ezer Ft/m. Hol csatlakozzunk az úthoz, hogy a **költség minimális** legyen?



2. példa: megoldás

Célfüggvény (ezer Ft-ban):

$$C(x) = 50 \sqrt{x^2 + 90\,000} + 30(1000 - x), \quad x \in [0, 1000].$$

Derivált:

$$C'(x) = \frac{50x}{\sqrt{x^2 + 90\,000}} - 30 = 0.$$

$$50x = 30 \sqrt{x^2 + 90\,000} \implies 2500x^2 = 900(x^2 + 90\,000)$$

$$x = 225.$$

Ellenőrzés (zárt intervallum módszer):

x	0	225	1000
$C(x)$	4500	4200	≈ 5220

$$\sqrt{225^2 + 300^2} = \sqrt{140\,625} = 375 \text{ m.}$$

Eredmény: A minimális költség $C(225) = 50 \cdot 375 + 30 \cdot 775 = 4\,200$ ezer Ft.

A csatlakozási pont P az adatközpont alatti ponttól **225 m**-re van az út mentén.

2. példa: megoldás

Célfüggvény (ezer Ft-ban):

$$C(x) = 50 \sqrt{x^2 + 90\,000} + 30(1000 - x), \quad x \in [0, 1000].$$

Derivált:

$$C'(x) = \frac{50x}{\sqrt{x^2 + 90\,000}} - 30 = 0.$$

$$50x = 30 \sqrt{x^2 + 90\,000} \implies 2500x^2 = 900(x^2 + 90\,000)$$

$$x = 225.$$

Ellenőrzés (zárt intervallum módszer):

x	0	225	1000
$C(x)$	4500	4200	≈ 5220

$$\sqrt{225^2 + 300^2} = \sqrt{140\,625} = 375 \text{ m.}$$

Eredmény: A minimális költség $C(225) = 50 \cdot 375 + 30 \cdot 775 = 4\,200$ ezer Ft.

A csatlakozási pont P az adatközpont alatti ponttól **225 m**-re van az út mentén.

2. példa: megoldás

Célfüggvény (ezer Ft-ban):

$$C(x) = 50 \sqrt{x^2 + 90\,000} + 30(1000 - x), \quad x \in [0, 1000].$$

Derivált:

$$C'(x) = \frac{50x}{\sqrt{x^2 + 90\,000}} - 30 = 0.$$

$$50x = 30 \sqrt{x^2 + 90\,000} \implies 2500x^2 = 900(x^2 + 90\,000)$$

$$x = 225.$$

Ellenőrzés (zárt intervallum módszer):

x	0	225	1000
$C(x)$	4500	4200	≈ 5220

$$\sqrt{225^2 + 300^2} = \sqrt{140\,625} = 375 \text{ m.}$$

Eredmény: A minimális költség $C(225) = 50 \cdot 375 + 30 \cdot 775 = 4\,200$ ezer Ft.

A csatlakozási pont P az adatközpont alatti ponttól **225 m**-re van az út mentén.

3. példa: Konzervdoboz optimalizálása

Feladat

Mekkora méretű az az 1 literes (1000 cm^3) hengeres konzervdoboz, amelynek a **felszíne minimális?**



Kényszerfeltétel:

$$V = \pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Célfüggvény (felszín):

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Ért. tart.: $r \in (0, +\infty)$.

Derivált: $A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42 \text{ cm}.$

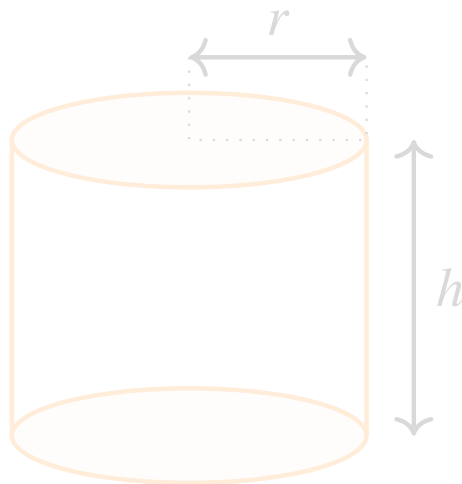
$$A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \Rightarrow \text{lokális (és abszolút) minimum.}$$

Optimális méretek: $h = 2r$, azaz a magasság egyenlő az átmérővel.

3. példa: Konzervdoboz optimalizálása

Feladat

Mekkora méretű az az 1 literes (1000 cm^3) hengeres konzervdoboz, amelynek a **felszíne minimális**?



Kényszerfeltétel:

$$V = \pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Célfüggvény (felszín):

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Ért. tart.: $r \in (0, +\infty)$.

Derivált: $A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42 \text{ cm}.$

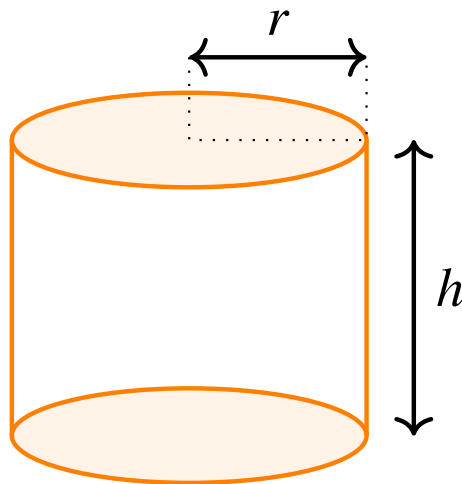
$A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \Rightarrow$ **lokális (és abszolút) minimum.**

Optimális méretek: $h = 2r$, azaz a **magasság egyenlő az átmérővel.**

3. példa: Konzervdoboz optimalizálása

Feladat

Mekkora méretű az az 1 literes (1000 cm^3) hengeres konzervdoboz, amelynek a **felszíne minimális**?



Kényszerfeltétel:

$$V = \pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Célfüggvény (felszín):

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Ért. tart.: $r \in (0, +\infty)$.

Derivált: $A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42 \text{ cm}.$

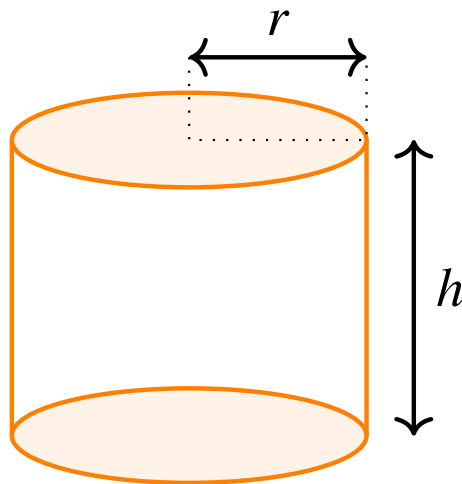
$A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \Rightarrow$ **lokális (és abszolút) minimum.**

Optimális méretek: $h = 2r$, azaz a **magasság egyenlő az átmérővel.**

3. példa: Konzervdoboz optimalizálása

Feladat

Mekkora méretű az az 1 literes (1000 cm^3) hengeres konzervdoboz, amelynek a **felszíne minimális**?



Kényszerfeltétel:

$$V = \pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Célfüggvény (felszín):

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Ért. tart.: $r \in (0, +\infty)$.

Derivált: $A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42 \text{ cm}.$

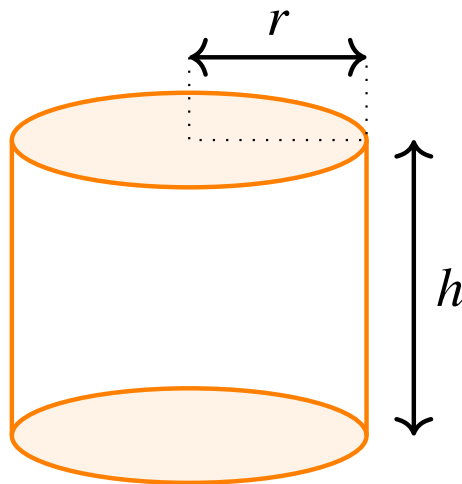
$A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \Rightarrow$ **lokális (és abszolút) minimum.**

Optimális méretek: $h = 2r$, azaz a magasság egyenlő az átmérővel.

3. példa: Konzervdoboz optimalizálása

Feladat

Mekkora méretű az az 1 literes (1000 cm^3) hengeres konzervdoboz, amelynek a **felszíne minimális**?



Kényszerfeltétel:

$$V = \pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Célfüggvény (felszín):

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Ért. tart.: $r \in (0, +\infty)$.

Derivált: $A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42 \text{ cm}.$

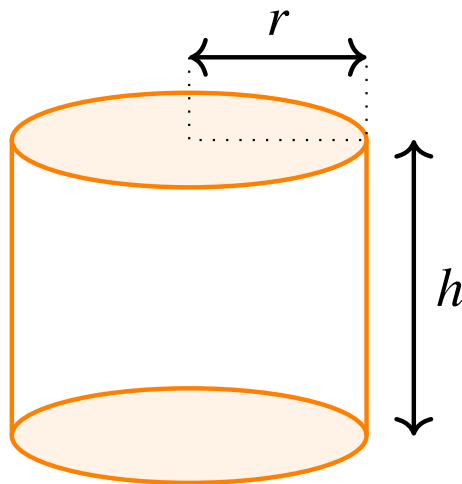
$A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \Rightarrow$ lokális (és abszolút) minimum.

Optimális méretek: $h = 2r$, azaz a magasság egyenlő az átmérővel.

3. példa: Konzervdoboz optimalizálása

Feladat

Mekkora méretű az az 1 literes (1000 cm^3) hengeres konzervdoboz, amelynek a **felszíne minimális**?



Kényszerfeltétel:

$$V = \pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Célfüggvény (felszín):

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Ért. tart.: $r \in (0, +\infty)$.

Derivált: $A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42 \text{ cm}.$

$A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \Rightarrow$ **lokális (és abszolút) minimum.**

Optimális méretek: $h = 2r$, azaz a **magasság egyenlő az átmérővel**.

Tagolás

- 1 Függvény szélsőértékei
- 2 A Lagrange-féle középértéktétel
- 3 Monoton függvények és az első derivált teszt
- 4 Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása
- 5 Alkalmazott optimalizációs problémák
- 6 Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály**
- 7 A Newton-módszer
- 8 Primitív függvények

Motiváció: mi a határozatlan alak?

A határérték-számítás során előfordulnak olyan esetek, amikor az egyszerű helyettesítés **nem ad egyértelmű eredményt**:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$$

A határozatlan alakok típusai

Alak	Példa
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$
$0 \cdot \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$
$\infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$	(visszavezethetők $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakra)

Megjegyzés. A $\frac{0}{0}$ alak **nem** jelenti azt, hogy a határérték 1 (vagy 0, vagy bármi más) — a határérték bármilyen valós szám, $\pm\infty$, vagy nem létező lehet.

Motiváció: mi a határozatlan alak?

A határérték-számítás során előfordulnak olyan esetek, amikor az egyszerű helyettesítés **nem ad egyértelmű eredményt**:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$$

A határozatlan alakok típusai

Alak	Példa
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$
$0 \cdot \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$
$\infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$	(visszavezethetők $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakra)

Megjegyzés. A $\frac{0}{0}$ alak **nem** jelenti azt, hogy a határérték 1 (vagy 0, vagy bármi más) — a határérték bármilyen valós szám, $\pm\infty$, vagy nem létező lehet.

Motiváció: mi a határozatlan alak?

A határérték-számítás során előfordulnak olyan esetek, amikor az egyszerű helyettesítés **nem ad egyértelmű eredményt**:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$$

A határozatlan alakok típusai

Alak	Példa
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$
$0 \cdot \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$
$\infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$	(visszavezethetők $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakra)

Megjegyzés. A $\frac{0}{0}$ alak **nem** jelenti azt, hogy a határérték 1 (vagy 0, vagy bármi más) — a határérték bármilyen valós szám, $\pm\infty$, vagy nem létező lehet.

A L'Hospital-szabály

Tétel (L'Hospital-szabály, $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra)

Legyen f és g **differentiálható** egy c körüli nyílt intervallumon (esetleg c kivételével), és $g'(x) \neq 0$. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ és } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0, \quad (\text{vagy mindkettő } \pm \infty).$$

Ha $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (véges vagy $\pm \infty$), akkor $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Megjegyzés.

- c lehet véges szám, $+\infty$ vagy $-\infty$ is.
- A szabály egy oldali határértékre (c^+ , c^-) is érvényes.
- A szabály nem azt mondja, hogy $\frac{f'}{g'}$ határértéke mindig létezik — ha nem létezik, a szabály nem alkalmazható (de $\frac{f}{g}$ határértéke mégis létezhet).

A L'Hospital-szabály

Tétel (L'Hospital-szabály, $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra)

Legyen f és g **differentiálható** egy c körüli nyílt intervallumon (esetleg c kivételével), és $g'(x) \neq 0$. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ és } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0, \quad (\text{vagy mindkettő } \pm \infty).$$

Ha $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (véges vagy $\pm \infty$), akkor $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Megjegyzés.

- c lehet véges szám, $+\infty$ vagy $-\infty$ is.
- A szabály **egy oldali határértékre** (c^+ , c^-) is érvényes.
- A szabály **nem** azt mondja, hogy $\frac{f'}{g'}$ határértéke mindig létezik — ha nem létezik, a szabály nem alkalmazható (de $\frac{f}{g}$ határértéke mégis létezhet).

A L'Hospital-szabály

Tétel (L'Hospital-szabály, $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra)

Legyen f és g **differentiálható** egy c körüli nyílt intervallumon (esetleg c kivételével), és $g'(x) \neq 0$. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ és } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0, \quad (\text{vagy mindkettő } \pm \infty).$$

Ha $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (véges vagy $\pm \infty$), akkor $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Megjegyzés.

- c lehet véges szám, $+\infty$ vagy $-\infty$ is.
- A szabály **egy oldali határértékre** (c^+ , c^-) is érvényes.
- A szabály **nem** azt mondja, hogy $\frac{f'}{g'}$ határértéke mindig létezik — ha nem létezik, a szabály nem alkalmazható (de $\frac{f}{g}$ határértéke mégis létezhet).

A L'Hospital-szabály

Tétel (L'Hospital-szabály, $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra)

Legyen f és g **differentiálható** egy c körüli nyílt intervallumon (esetleg c kivételével), és $g'(x) \neq 0$. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ és } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0, \quad (\text{vagy mindkettő } \pm \infty).$$

Ha $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (véges vagy $\pm \infty$), akkor $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Megjegyzés.

- c lehet véges szám, $+\infty$ vagy $-\infty$ is.
- A szabály **egy oldali határértékre** (c^+ , c^-) is érvényes.
- A szabály **nem** azt mondja, hogy $\frac{f'}{g'}$ határértéke mindig létezik — ha nem létezik, a szabály nem alkalmazható (de $\frac{f}{g}$ határértéke mégis létezhet).

A L'Hospital-szabály

Tétel (L'Hospital-szabály, $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra)

Legyen f és g **differentiálható** egy c körüli nyílt intervallumon (esetleg c kivételével), és $g'(x) \neq 0$. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ és } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0, \quad (\text{vagy mindkettő } \pm \infty).$$

Ha $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (véges vagy $\pm \infty$), akkor $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Megjegyzés.

- c lehet véges szám, $+\infty$ vagy $-\infty$ is.
- A szabály **egy oldali határértékre** (c^+ , c^-) is érvényes.
- A szabály **nem** azt mondja, hogy $\frac{f'}{g'}$ határértéke mindig létezik — ha nem létezik, a szabály nem alkalmazható (de $\frac{f}{g}$ határértéke mégis létezhet).

L'Hospital-szabály alkalmazása: $\frac{0}{0}$ alak

1. példa: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$f(x) = e^x - 1 \rightarrow 0$, $g(x) = x \rightarrow 0$: $\frac{0}{0}$ alak.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = \mathbf{1}.$$

2. példa: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

$\frac{0}{0}$ alak ($x \rightarrow 1$): $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}.$

3. példa: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (kétszeri alkalmazás)

$\frac{0}{0}$ alak : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$

L'Hospital-szabály alkalmazása: $\frac{0}{0}$ alak

1. példa: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$f(x) = e^x - 1 \rightarrow 0$, $g(x) = x \rightarrow 0$: $\frac{0}{0}$ alak.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = \mathbf{1}.$$

2. példa: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

$\frac{0}{0}$ alak ($x \rightarrow 1$): $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}.$

3. példa: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (kétszeri alkalmazás)

$\frac{0}{0}$ alak : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$

L'Hospital-szabály alkalmazása: $\frac{0}{0}$ alak

1. példa: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$f(x) = e^x - 1 \rightarrow 0$, $g(x) = x \rightarrow 0$: $\frac{0}{0}$ alak.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1.$$

2. példa: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

$\frac{0}{0}$ alak ($x \rightarrow 1$): $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}.$

3. példa: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (kétszeri alkalmazás)

$\frac{0}{0}$ alak : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$

L'Hospital-szabály alkalmazása: $\frac{\infty}{\infty}$ alak

4. példa: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$

$\frac{\infty}{\infty}$ alak. Kétszeri alkalmazás:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Megjegyzés. Általánosan: minden $k \geq 0$ esetén $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$ — az exponenciális **gyorsabban tart végtelenbe**, mint bármely polinom.

5. példa: $0 \cdot \infty$ visszavezetése — $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

$0 \cdot \infty$ alak. Írjuk át hányados alakba:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

L'Hospital-szabály alkalmazása: $\frac{\infty}{\infty}$ alak

4. példa: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$

$\frac{\infty}{\infty}$ alak. Kétszeri alkalmazás:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Megjegyzés. Általánosan: minden $k \geq 0$ esetén $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$ — az exponenciális **gyorsabban tart végtelenbe**, mint bármely polinom.

5. példa: $0 \cdot \infty$ visszavezetése — $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

$0 \cdot \infty$ alak. Írjuk át hányados alakba:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

L'Hospital-szabály alkalmazása: $\frac{\infty}{\infty}$ alak

4. példa: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$

$\frac{\infty}{\infty}$ alak. Kétszeri alkalmazás:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Megjegyzés. Általánosan: minden $k \geq 0$ esetén $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$ — az exponenciális **gyorsabban tart végtelenbe**, mint bármely polinom.

5. példa: $0 \cdot \infty$ visszavezetése — $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

$0 \cdot \infty$ alak. Írjuk át hányados alakba:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

L'Hospital-szabály alkalmazása: $\frac{\infty}{\infty}$ alak

4. példa: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$

$\frac{\infty}{\infty}$ alak. Kétszeri alkalmazás:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Megjegyzés. Általánosan: minden $k \geq 0$ esetén $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$ — az exponenciális **gyorsabban tart végtelenbe**, mint bármely polinom.

5. példa: $0 \cdot \infty$ visszavezetése — $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

$0 \cdot \infty$ alak. Írjuk át hányados alakba:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Hatványkitevős határozatlan alakok

Az 1^∞ , 0^0 , ∞^0 alakokat **logaritmálással** vezetjük vissza $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakra.

Módszer

Ha $\lim f(x)^{g(x)}$ határozatlan alakú, legyen $y = f(x)^{g(x)}$, akkor

$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x).$$

Számítsuk ki $\lim \ln y$ -t **L'Hospital-szabállyal**, majd $\lim y = e^{\lim \ln y}$.

6. példa (1^∞ alak): $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Legyen $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, ekkor

$$\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{-1/x^2} = \frac{1}{1 + 1/x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1.$$

Tehát $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$.

Hatványkitevős határozatlan alakok

Az 1^∞ , 0^0 , ∞^0 alakokat **logaritmálással** vezetjük vissza $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakra.

Módszer

Ha $\lim f(x)^{g(x)}$ határozatlan alakú, legyen $y = f(x)^{g(x)}$, akkor

$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x).$$

Számítsuk ki $\lim \ln y$ -t **L'Hospital-szabállyal**, majd $\lim y = e^{\lim \ln y}$.

6. példa (1^∞ alak): $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Legyen $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, ekkor

$$\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{-1/x^2} = \frac{1}{1 + 1/x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1.$$

Tehát $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$.

Hatványkitevős határozatlan alakok

Az 1^∞ , 0^0 , ∞^0 alakokat **logaritmálással** vezetjük vissza $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakra.

Módszer

Ha $\lim f(x)^{g(x)}$ határozatlan alakú, legyen $y = f(x)^{g(x)}$, akkor

$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x).$$

Számítsuk ki $\lim \ln y$ -t **L'Hospital-szabállyal**, majd $\lim y = e^{\lim \ln y}$.

6. példa (1^∞ alak): $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Legyen $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, ekkor

$$\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{-1/x^2} = \frac{1}{1 + 1/x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1.$$

Tehát $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$.

A L'Hospital-szabály bizonyítása a $\frac{0}{0}$ esetben

Megmutatjuk, hogy ha $f(c) = g(c) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, akkor $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

- 1 Ha szükséges, definiáljuk f, g -t a c helyen: $f(c) = g(c) = 0$. Így f és g **folytonos** lesz c -ben.
- 2 Tetszőleges $x \neq c$ esetén f és g kielégítik a **Cauchy-féle középértéktétel** feltételeit a $[c, x]$ (ill. $[x, c]$) intervallumon: $\exists t_x$ (szigorúan c és x között), amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)}.$$

- 3 Mivel t_x szigorúan c és x között van, $x \rightarrow c$ esetén $t_x \rightarrow c$ is teljesül.
- 4 Ezért

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)} = \lim_{t \rightarrow c} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L.$$

□

Megjegyzés. Az $\frac{\infty}{\infty}$ eset és a $c = \pm\infty$ eset bizonyítása hasonló gondolatmenetű, de technikai részleteiben nehezebb.

Figyelmeztetések és összefoglalás

Mikor *nem* szabad alkalmazni a L'Hospital-szabályt?

- Ha a határérték **nem** $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alak!
- Tipikus hiba: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{1} = 1.$
- Valójában: $\frac{\sin x + \cos x}{x} \rightarrow \frac{1}{0} = +\infty$, ha $x \rightarrow 0$.
- Ha $\frac{f'}{g'}$ **nem konvergál**, abból nem következik, hogy $\frac{f}{g}$ sem konvergál.
- Pl. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ nem létezik.

Összefoglalás

- L'Hospital-szabály: $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra, véges és végtelen c -re.
- $0 \cdot \infty$ és $\infty - \infty$: hányados alakra hozás.
- 1^∞ , 0^0 , ∞^0 : logaritmálás $\rightarrow 0 \cdot \infty$ alak.
- Alkalmazás előtt **mindig ellenőrizd** a határozatlan alakot!

Figyelmeztetések és összefoglalás

Mikor *nem* szabad alkalmazni a L'Hospital-szabályt?

- Ha a határérték **nem** $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alak!
- Tipikus hiba: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{1} = 1$.
- Valójában: $\frac{\sin x + \cos x}{x} \rightarrow \frac{1}{0} = +\infty$, ha $x \rightarrow 0$.
- Ha $\frac{f'}{g'}$ **nem konvergál**, abból nem következik, hogy $\frac{f}{g}$ sem konvergál.
- Pl. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ nem létezik.

Összefoglalás

- L'Hospital-szabály: $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra, véges és végtelen c -re.
- $0 \cdot \infty$ és $\infty - \infty$: hányados alakra hozás.
- 1^∞ , 0^0 , ∞^0 : logaritmálás $\rightarrow 0 \cdot \infty$ alak.
- Alkalmazás előtt **mindig ellenőrizd** a határozatlan alakot!

Figyelmeztetések és összefoglalás

Mikor *nem* szabad alkalmazni a L'Hospital-szabályt?

- Ha a határérték **nem** $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alak!
- **Tipikus hiba:** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{1} = 1.$
- Valójában: $\frac{\sin x + \cos x}{x} \rightarrow \frac{1}{0} = +\infty$, ha $x \rightarrow 0$.
- Ha $\frac{f'}{g'}$ **nem konvergál**, abból nem következik, hogy $\frac{f}{g}$ sem konvergál.
- Pl. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ nem létezik.

Összefoglalás

- L'Hospital-szabály: $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra, véges és végtelen c -re.
- $0 \cdot \infty$ és $\infty - \infty$: hányados alakra hozás.
- 1^∞ , 0^0 , ∞^0 : logaritmálás $\rightarrow 0 \cdot \infty$ alak.
- Alkalmazás előtt **mindig ellenőrizd** a határozatlan alakot!

Figyelmeztetések és összefoglalás

Mikor *nem* szabad alkalmazni a L'Hospital-szabályt?

- Ha a határérték **nem** $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alak!
- Tipikus hiba: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{1} = 1.$
- Valójában: $\frac{\sin x + \cos x}{x} \rightarrow \frac{1}{0} = +\infty$, ha $x \rightarrow 0$.
- Ha $\frac{f'}{g'}$ **nem konvergál**, abból nem következik, hogy $\frac{f}{g}$ sem konvergál.
- Pl. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ nem létezik.

Összefoglalás

- L'Hospital-szabály: $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra, véges és végtelen c -re.
- $0 \cdot \infty$ és $\infty - \infty$: hányados alakra hozás.
- 1^∞ , 0^0 , ∞^0 : logaritmálás $\rightarrow 0 \cdot \infty$ alak.
- Alkalmazás előtt **mindig ellenőrizd** a határozatlan alakot!

Figyelmeztetések és összefoglalás

Mikor *nem* szabad alkalmazni a L'Hospital-szabályt?

- Ha a határérték **nem** $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alak!
- **Tipikus hiba:** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{1} = 1.$
- **Valójában:** $\frac{\sin x + \cos x}{x} \rightarrow \frac{1}{0} = +\infty$, ha $x \rightarrow 0$.
- Ha $\frac{f'}{g'}$ **nem konvergál**, abból nem következik, hogy $\frac{f}{g}$ sem konvergál.
- Pl. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ nem létezik.

Összefoglalás

- L'Hospital-szabály: $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra, véges és végtelen c -re.
- $0 \cdot \infty$ és $\infty - \infty$: hányados alakra hozás.
- 1^∞ , 0^0 , ∞^0 : logaritmálás $\rightarrow 0 \cdot \infty$ alak.
- Alkalmazás előtt **mindig ellenőrizd** a határozatlan alakot!

Figyelmeztetések és összefoglalás

Mikor *nem* szabad alkalmazni a L'Hospital-szabályt?

- Ha a határérték **nem** $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alak!
- **Tipikus hiba:** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{1} = 1.$
- **Valójában:** $\frac{\sin x + \cos x}{x} \rightarrow \frac{1}{0} = +\infty$, ha $x \rightarrow 0$.
- Ha $\frac{f'}{g'}$ **nem konvergál**, abból nem következik, hogy $\frac{f}{g}$ sem konvergál.
- **Pl.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ nem létezik.

Összefoglalás

- L'Hospital-szabály: $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra, véges és végtelen c -re.
- $0 \cdot \infty$ és $\infty - \infty$: hányados alakra hozás.
- 1^∞ , 0^0 , ∞^0 : logaritmálás $\rightarrow 0 \cdot \infty$ alak.
- Alkalmazás előtt **mindig ellenőrizd** a határozatlan alakot!

Figyelmeztetések és összefoglalás

Mikor *nem* szabad alkalmazni a L'Hospital-szabályt?

- Ha a határérték **nem** $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alak!
- **Tipikus hiba:** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{1} = 1.$
- **Valójában:** $\frac{\sin x + \cos x}{x} \rightarrow \frac{1}{0} = +\infty$, ha $x \rightarrow 0$.
- Ha $\frac{f'}{g'}$ **nem konvergál**, abból nem következik, hogy $\frac{f}{g}$ sem konvergál.
- **Pl.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ nem létezik.

Összefoglalás

- L'Hospital-szabály: $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra, véges és végtelen c -re.
- $0 \cdot \infty$ és $\infty - \infty$: hányados alakra hozás.
- 1^∞ , 0^0 , ∞^0 : logaritmálás $\rightarrow 0 \cdot \infty$ alak.
- Alkalmazás előtt **mindig ellenőrizd** a határozatlan alakot!

Figyelmeztetések és összefoglalás

Mikor *nem* szabad alkalmazni a L'Hospital-szabályt?

- Ha a határérték **nem** $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alak!
- **Tipikus hiba:** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{1} = 1.$
- **Valójában:** $\frac{\sin x + \cos x}{x} \rightarrow \frac{1}{0} = +\infty$, ha $x \rightarrow 0$.
- Ha $\frac{f'}{g'}$ **nem konvergál**, abból nem következik, hogy $\frac{f}{g}$ sem konvergál.
- **Pl.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ nem létezik.

Összefoglalás

- L'Hospital-szabály: $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra, véges és végtelen c -re.
- $0 \cdot \infty$ és $\infty - \infty$: hányados alakra hozás.
- 1^∞ , 0^0 , ∞^0 : logaritmálás $\rightarrow 0 \cdot \infty$ alak.
- Alkalmazás előtt **mindig ellenőrizd** a határozatlan alakot!

Figyelmeztetések és összefoglalás

Mikor *nem* szabad alkalmazni a L'Hospital-szabályt?

- Ha a határérték **nem** $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alak!
- **Tipikus hiba:** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{1} = 1.$
- **Valójában:** $\frac{\sin x + \cos x}{x} \rightarrow \frac{1}{0} = +\infty$, ha $x \rightarrow 0$.
- Ha $\frac{f'}{g'}$ **nem konvergál**, abból nem következik, hogy $\frac{f}{g}$ sem konvergál.
- **Pl.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ nem létezik.

Összefoglalás

- L'Hospital-szabály: $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra, véges és végtelen c -re.
- $0 \cdot \infty$ és $\infty - \infty$: hányados alakra hozás.
- 1^∞ , 0^0 , ∞^0 : logaritmálás $\rightarrow 0 \cdot \infty$ alak.
- Alkalmazás előtt **mindig ellenőrizd** a határozatlan alakot!

Figyelmeztetések és összefoglalás

Mikor *nem* szabad alkalmazni a L'Hospital-szabályt?

- Ha a határérték **nem** $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alak!
- **Tipikus hiba:** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{1} = 1.$
- **Valójában:** $\frac{\sin x + \cos x}{x} \rightarrow \frac{1}{0} = +\infty$, ha $x \rightarrow 0$.
- Ha $\frac{f'}{g'}$ **nem konvergál**, abból nem következik, hogy $\frac{f}{g}$ sem konvergál.
- **Pl.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ nem létezik.

Összefoglalás

- L'Hospital-szabály: $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra, véges és végtelen c -re.
- $0 \cdot \infty$ és $\infty - \infty$: hányados alakra hozás.
- 1^∞ , 0^0 , ∞^0 : logaritmálás $\rightarrow 0 \cdot \infty$ alak.
- Alkalmazás előtt **mindig ellenőrizd** a határozatlan alakot!

Figyelmeztetések és összefoglalás

Mikor *nem* szabad alkalmazni a L'Hospital-szabályt?

- Ha a határérték **nem** $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alak!
- **Tipikus hiba:** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{1} = 1.$
- **Valójában:** $\frac{\sin x + \cos x}{x} \rightarrow \frac{1}{0} = +\infty$, ha $x \rightarrow 0$.
- Ha $\frac{f'}{g'}$ **nem konvergál**, abból nem következik, hogy $\frac{f}{g}$ sem konvergál.
- **Pl.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ nem létezik.

Összefoglalás

- L'Hospital-szabály: $\frac{0}{0}$ és $\frac{\infty}{\infty}$ alakra, véges és végtelen c -re.
- $0 \cdot \infty$ és $\infty - \infty$: hányados alakra hozás.
- 1^∞ , 0^0 , ∞^0 : logaritmálás $\rightarrow 0 \cdot \infty$ alak.
- Alkalmazás előtt **mindig ellenőrizd** a határozatlan alakot!

Tagolás

- 1 Függvény szélsőértékei
- 2 A Lagrange-féle középértéktétel
- 3 Monoton függvények és az első derivált teszt
- 4 Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása
- 5 Alkalmazott optimalizációs problémák
- 6 Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály
- 7 A Newton-módszer**
- 8 Primitív függvények

A Newton-módszer – motiváció

Feladat

Oldjuk meg az $f(x) = 0$ egyenletet, ha f differenciálható,.

Ötlet

- Válasszunk egy $(x^*, f(x^*))$ random pontot az f görbéjén.

- Közelítsük f -et az x^* pontban az érintőjével:

$$f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*).$$

- $f(x) = 0$ helyett oldjuk meg az $f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) = 0$ egyenletet:

$$x^{**} = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}.$$

- Iteráljunk és reménykedjünk!

A Newton–Raphson-iteráció

Az $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ sorozat *sok esetben* konvergál $f(x) = 0$ egy α gyökéhez.

A Newton-módszer – motiváció

Feladat

Oldjuk meg az $f(x) = 0$ egyenletet, ha f differenciálható,.

Ötlet

- Válasszunk egy $(x^*, f(x^*))$ random pontot az f görbéjén.
- Közelítsük f -et az x^* pontban az érintőjével:

$$f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*).$$

- $f(x) = 0$ helyett oldjuk meg az $f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) = 0$ egyenletet:

$$x^{**} = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}.$$

- Iteráljunk és reménykedjünk!

A Newton–Raphson-iteráció

Az $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ sorozat *sok esetben* konvergál $f(x) = 0$ egy α gyökéhez.

A Newton-módszer – motiváció

Feladat

Oldjuk meg az $f(x) = 0$ egyenletet, ha f differenciálható,.

Ötlet

- Válasszunk egy $(x^*, f(x^*))$ **random pontot** az f görbéjén.

- Közelítsük f -et az x^* pontban az érintőjével:

$$f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*).$$

- $f(x) = 0$ helyett oldjuk meg az $f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) = 0$ egyenletet:

$$x^{**} = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}.$$

- Iteráljunk és reménykedjünk!

A Newton–Raphson-iteráció

Az $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ sorozat *sok esetben* konvergál $f(x) = 0$ egy α gyökéhez.

A Newton-módszer – motiváció

Feladat

Oldjuk meg az $f(x) = 0$ egyenletet, ha f differenciálható,.

Ötlet

- Válasszunk egy $(x^*, f(x^*))$ **random pontot** az f görbéjén.
- Közelítsük f -et az x^* pontban az érintőjével:

$$f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*).$$

- $f(x) = 0$ helyett oldjuk meg az $f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) = 0$ egyenletet:

$$x^{**} = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}.$$

- Iteráljunk és reménykedjünk!

A Newton–Raphson-iteráció

Az $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ sorozat *sok esetben* konvergál $f(x) = 0$ egy α gyökéhez.

A Newton-módszer – motiváció

Feladat

Oldjuk meg az $f(x) = 0$ egyenletet, ha f differenciálható,.

Ötlet

- Válasszunk egy $(x^*, f(x^*))$ **random pontot** az f görbéjén.
- Közelítsük f -et az x^* pontban az érintőjével:

$$f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*).$$

- $f(x) = 0$ helyett oldjuk meg az $f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) = 0$ egyenletet:

$$x^{**} = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}.$$

- Iteráljunk és reménykedjünk!

A Newton–Raphson-iteráció

Az $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ sorozat *sok esetben* konvergál $f(x) = 0$ egy α gyökéhez.

A Newton-módszer – motiváció

Feladat

Oldjuk meg az $f(x) = 0$ egyenletet, ha f differenciálható,.

Ötlet

- Válasszunk egy $(x^*, f(x^*))$ **random pontot** az f görbéjén.
- Közelítsük f -et az x^* pontban az érintőjével:

$$f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*).$$

- $f(x) = 0$ helyett oldjuk meg az $f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) = 0$ egyenletet:

$$x^{**} = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}.$$

- **Iteráljunk és reménykedjünk!**

A Newton–Raphson-iteráció

Az $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ sorozat *sok esetben* konvergál $f(x) = 0$ egy α gyökéhez.

A Newton-módszer – motiváció

Feladat

Oldjuk meg az $f(x) = 0$ egyenletet, ha f differenciálható,.

Ötlet

- Válasszunk egy $(x^*, f(x^*))$ **random pontot** az f görbéjén.
- Közelítsük f -et az x^* pontban az érintőjével:

$$f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*).$$

- $f(x) = 0$ helyett oldjuk meg az $f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) = 0$ egyenletet:

$$x^{**} = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}.$$

- **Iteráljunk és reménykedjünk!**

A Newton–Raphson-iteráció

Az $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ sorozat *sok esetben* konvergál $f(x) = 0$ egy α gyökéhez.

Kidolgozott példa: $\sqrt{2}$ közelítése

Feladat

Közelítsük $\sqrt{2}$ értékét a Newton-módszerrel, kiindulva $x_0 = 1$ -ből!

Modellezés: $\sqrt{2}$ az $f(x) = x^2 - 2 = 0$ egyenlet pozitív gyöke.
 $f'(x) = 2x$, tehát az iterációs képlet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Iterációk:

n	x_n	$ x_n - \sqrt{2} $
0	1.000 000 000 000	$4,14 \times 10^{-1}$
1	1.500 000 000 000	$8,58 \times 10^{-2}$
2	1.416 666 666 667	$2,45 \times 10^{-3}$
3	1.414 215 686 275	$2,12 \times 10^{-6}$
4	1.414 213 562 375	$< 10^{-12}$

Megjegyzés. Minden lépésben a pontos tizedesjegyek száma megduplázódik — ez a négyzetes (kvadratus) konvergencia jele.

Kidolgozott példa: $\sqrt{2}$ közelítése

Feladat

Közelítsük $\sqrt{2}$ értékét a Newton-módszerrel, kiindulva $x_0 = 1$ -ből!

Modellezés: $\sqrt{2}$ az $f(x) = x^2 - 2 = 0$ egyenlet pozitív gyöke.
 $f'(x) = 2x$, tehát az iterációs képlet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Iterációk:

n	x_n	$ x_n - \sqrt{2} $
0	1.000 000 000 000	$4,14 \times 10^{-1}$
1	1.500 000 000 000	$8,58 \times 10^{-2}$
2	1.416 666 666 667	$2,45 \times 10^{-3}$
3	1.414 215 686 275	$2,12 \times 10^{-6}$
4	1.414 213 562 375	$< 10^{-12}$

Megjegyzés. Minden lépésben a pontos tizedesjegyek száma megduplázódik — ez a négyzetes (kvadratus) konvergencia jele.

Kidolgozott példa: $\sqrt{2}$ közelítése

Feladat

Közelítsük $\sqrt{2}$ értékét a Newton-módszerrel, kiindulva $x_0 = 1$ -ből!

Modellezés: $\sqrt{2}$ az $f(x) = x^2 - 2 = 0$ egyenlet pozitív gyöke.
 $f'(x) = 2x$, tehát az iterációs képlet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Iterációk:

n	x_n	$ x_n - \sqrt{2} $
0	1.000 000 000 000	$4,14 \times 10^{-1}$
1	1.500 000 000 000	$8,58 \times 10^{-2}$
2	1.416 666 666 667	$2,45 \times 10^{-3}$
3	1.414 215 686 275	$2,12 \times 10^{-6}$
4	1.414 213 562 375	$< 10^{-12}$

Megjegyzés. Minden lépésben a pontos tizedesjegyek száma megduplázódik — ez a négyzetes (kvadratus) konvergencia jele.

Kidolgozott példa: $\sqrt{2}$ közelítése

Feladat

Közelítsük $\sqrt{2}$ értékét a Newton-módszerrel, kiindulva $x_0 = 1$ -ből!

Modellezés: $\sqrt{2}$ az $f(x) = x^2 - 2 = 0$ egyenlet pozitív gyöke.
 $f'(x) = 2x$, tehát az iterációs képlet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Iterációk:

n	x_n	$ x_n - \sqrt{2} $
0	1.000 000 000 000	$4,14 \times 10^{-1}$
1	1.500 000 000 000	$8,58 \times 10^{-2}$
2	1.416 666 666 667	$2,45 \times 10^{-3}$
3	1.414 215 686 275	$2,12 \times 10^{-6}$
4	1.414 213 562 375	$< 10^{-12}$

Megjegyzés. Minden lépésben a pontos tizedesjegyek száma **megduplázódik** — ez a **négyzetes (kvadratus) konvergencia** jele.

Konvergenca és korlátok

Kvadratikus konvergenca (informálisan)

Ha x_n elég közel van az r gyökhöz és $f'(r) \neq 0$, $f''(r)$ létezik, akkor

$$|x_{n+1} - r| \approx \frac{|f''(r)|}{2|f'(r)|} |x_n - r|^2.$$

Az ε hiba a következő lépésben $\approx C\varepsilon^2$ lesz: **a pontos jegyek száma lépésenként duplázódik.**

Mikor nem működik?

- $f'(x_n) = 0$ valamelyik lépésben (osztás nullával).
- Rossz kezdőpont $\Rightarrow$ divergencia, ciklizálás vagy kaotikus viselkedés.
- Többszörös gyök esetén a konvergenca csak **lineáris**.

Konvergenca és korlátok

Kvadratis konvergenca (informálisan)

Ha x_n elég közel van az r gyökhöz és $f'(r) \neq 0$, $f''(r)$ létezik, akkor

$$|x_{n+1} - r| \approx \frac{|f''(r)|}{2|f'(r)|} |x_n - r|^2.$$

Az ε hiba a következő lépésben $\approx C\varepsilon^2$ lesz: **a pontos jegyek száma lépésenként duplázódik.**

Mikor nem működik?

- $f'(x_n) = 0$ valamelyik lépésben (osztás nullával).
- Rossz kezdőpont $\Rightarrow$ divergencia, ciklizálás vagy kaotikus viselkedés.
- Többszörös gyök esetén a konvergenca csak **lineáris**.

Konvergencia és korlátok

Kvadratikus konvergencia (informálisan)

Ha x_n elég közel van az r gyökhöz és $f'(r) \neq 0$, $f''(r)$ létezik, akkor

$$|x_{n+1} - r| \approx \frac{|f''(r)|}{2|f'(r)|} |x_n - r|^2.$$

Az ε hiba a következő lépésben $\approx C\varepsilon^2$ lesz: **a pontos jegyek száma lépésenként duplázódik.**

Mikor nem működik?

- $f'(x_n) = 0$ valamelyik lépésben (osztás nullával).
- Rossz kezdőpont $\Rightarrow$ divergencia, ciklizálás vagy kaotikus viselkedés.
- Többszörös gyök esetén a konvergencia csak **lineáris**.

Konvergenca és korlátok

Kvadratikus konvergenca (informálisan)

Ha x_n elég közel van az r gyökhöz és $f'(r) \neq 0$, $f''(r)$ létezik, akkor

$$|x_{n+1} - r| \approx \frac{|f''(r)|}{2|f'(r)|} |x_n - r|^2.$$

Az ε hiba a következő lépésben $\approx C\varepsilon^2$ lesz: **a pontos jegyek száma lépésenként duplázódik.**

Mikor nem működik?

- $f'(x_n) = 0$ valamelyik lépésben (osztás nullával).
- Rossz kezdőpont $\Rightarrow$ divergencia, ciklizálás vagy kaotikus viselkedés.
- Többszörös gyök esetén a konvergenca csak **lineáris**.

Konvergenca és korlátok

Kvadratikus konvergenca (informálisan)

Ha x_n elég közel van az r gyökhöz és $f'(r) \neq 0$, $f''(r)$ létezik, akkor

$$|x_{n+1} - r| \approx \frac{|f''(r)|}{2|f'(r)|} |x_n - r|^2.$$

Az ε hiba a következő lépésben $\approx C\varepsilon^2$ lesz: **a pontos jegyek száma lépésenként duplázódik.**

Mikor nem működik?

- $f'(x_n) = 0$ valamelyik lépésben (osztás nullával).
- Rossz kezdőpont $\Rightarrow$ divergencia, ciklizálás vagy kaotikus viselkedés.
- Többszörös gyök esetén a konvergenca csak **lineáris**.

Tagolás

- 1 Függvény szélsőértékei
- 2 A Lagrange-féle középértéktétel
- 3 Monoton függvények és az első derivált teszt
- 4 Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása
- 5 Alkalmazott optimalizációs problémák
- 6 Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály
- 7 A Newton-módszer
- 8 Primitív függvények**

A primitív függvény fogalma

Definíció: Primitív függvény

Az F függvényt az f függvény **primitív függvényének** nevezzük egy I intervallumon, ha F differenciálható I -n és

$$F'(x) = f(x) \quad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

Tétel (A primitív függvény egyértelműsége)

Ha F és G is primitív függvénye f -nek I -n, akkor

$$G(x) = F(x) + C$$

valamely $C \in \mathbb{R}$ konstanssal. Azaz: bármely két primitív függvény csupán egy **additív konstansban** különbözhet egymástól.

Biz. $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$, tehát $G - F$ konstans a Lagrange-féle közéértéktétel 1. következménye szerint. □

A primitív függvény fogalma

Definíció: Primitív függvény

Az F függvényt az f függvény **primitív függvényének** nevezzük egy I intervallumon, ha F differenciálható I -n és

$$F'(x) = f(x) \quad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

Tétel (A primitív függvény egyértelműsége)

Ha F és G is primitív függvénye f -nek I -n, akkor

$$G(x) = F(x) + C$$

valamely $C \in \mathbb{R}$ konstanssal. Azaz: bármely két primitív függvény csupán egy **additív konstansban** különbözhet egymástól.

Biz. $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$, tehát $G - F$ konstans a Lagrange-féle közéértéktétel 1. következménye szerint. □

A primitív függvény fogalma

Definíció: Primitív függvény

Az F függvényt az f függvény **primitív függvényének** nevezzük egy I intervallumon, ha F differenciálható I -n és

$$F'(x) = f(x) \quad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

Tétel (A primitív függvény egyértelműsége)

Ha F és G is primitív függvénye f -nek I -n, akkor

$$G(x) = F(x) + C$$

valamely $C \in \mathbb{R}$ konstanssal. Azaz: bármely két primitív függvény csupán egy **additív konstansban** különbözhet egymástól.

Biz. $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$, tehát $G - F$ konstans a Lagrange-féle közéértéktétel 1. következménye szerint. □

Ismert elemi függvények primitív függvényei

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
e^x	$e^x + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$a^x \ (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\ln x$	$x \ln x - x + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$

Megjegyzés. A táblázat minden sora közvetlenül a deriválási szabályokból olvasható vissza.

Szabályok a primitív függvényekre

Tétel: Linearitás

Legyenek F és G rendre f és g primitív függvényei, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor:

- $F + G$ primitív függvénye $f + g$ -nek,
- cF primitív függvénye cf -nek.
- Ha f differenciálható és $f(x) \neq 0$, akkor $\frac{f'}{f}$ primitív függvénye $\ln |f|$.

Biz. Az első két állítás közvetlenül következik a deriválási szabályokból. A harmadik állításnál a láncszabályt kell alkalmazni:

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad \square$$

Szabályok a primitív függvényekre

Tétel: Linearitás

Legyenek F és G rendre f és g primitív függvényei, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor:

- $F + G$ primitív függvénye $f + g$ -nek,
- cF primitív függvénye cf -nek.
- Ha f differenciálható és $f(x) \neq 0$, akkor $\frac{f'}{f}$ primitív függvénye $\ln |f|$.

Biz. Az első két állítás közvetlenül következik a deriválási szabályokból. A harmadik állításnál a láncszabályt kell alkalmazni:

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad \square$$

Szabályok a primitív függvényekre

Tétel: Linearitás

Legyenek F és G rendre f és g primitív függvényei, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor:

- $F + G$ primitív függvénye $f + g$ -nek,
- cF primitív függvénye cf -nek.
- Ha f differenciálható és $f(x) \neq 0$, akkor $\frac{f'}{f}$ primitív függvénye $\ln |f|$.

Biz. Az első két állítás közvetlenül következik a deriválási szabályokból. A harmadik állításnál a láncszabályt kell alkalmazni:

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad \square$$

Szabályok a primitív függvényekre

Tétel: Linearitás

Legyenek F és G rendre f és g primitív függvényei, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor:

- $F + G$ primitív függvénye $f + g$ -nek,
- cF primitív függvénye cf -nek.
- Ha f differenciálható és $f(x) \neq 0$, akkor $\frac{f'}{f}$ primitív függvénye $\ln |f|$.

Biz. Az első két állítás közvetlenül következik a deriválási szabályokból. A harmadik állításnál a láncszabályt kell alkalmazni:

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad \square$$

Szabályok a primitív függvényekre

Tétel: Linearitás

Legyenek F és G rendre f és g primitív függvényei, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor:

- $F + G$ primitív függvénye $f + g$ -nek,
- cF primitív függvénye cf -nek.
- Ha f differenciálható és $f(x) \neq 0$, akkor $\frac{f'}{f}$ primitív függvénye $\ln |f|$.

Biz. Az első két állítás közvetlenül következik a deriválási szabályokból. A harmadik állításnál a láncszabályt kell alkalmazni:

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad \square$$

Primitív függvény keresése – példák

1. példa

Határozzuk meg $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ primitív függvényét!

Megoldás: $3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C = x^3 - 2x^2 + 5x + C.$

Ellenőrzés: $(x^3 - 2x^2 + 5x + C)' = 3x^2 - 4x + 5. \checkmark$

2. példa

Határozzuk meg $f(x) = 2 \sin x + 3e^x$ primitív függvényét!

Megoldás: $2 \cdot (-\cos x) + 3e^x + C = -2 \cos x + 3e^x + C.$

Ellenőrzés: $(-2 \cos x + 3e^x + C)' = 2 \sin x + 3e^x. \checkmark$

Primitív függvény keresése – példák

1. példa

Határozzuk meg $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ primitív függvényét!

Megoldás: $3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C = x^3 - 2x^2 + 5x + C.$

Ellenőrzés: $(x^3 - 2x^2 + 5x + C)' = 3x^2 - 4x + 5. \checkmark$

2. példa

Határozzuk meg $f(x) = 2 \sin x + 3e^x$ primitív függvényét!

Megoldás: $2 \cdot (-\cos x) + 3e^x + C = -2 \cos x + 3e^x + C.$

Ellenőrzés: $(-2 \cos x + 3e^x + C)' = 2 \sin x + 3e^x. \checkmark$

Primitív függvény keresése – példák

1. példa

Határozzuk meg $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ primitív függvényét!

Megoldás: $3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C = x^3 - 2x^2 + 5x + C.$

Ellenőrzés: $(x^3 - 2x^2 + 5x + C)' = 3x^2 - 4x + 5. \checkmark$

2. példa

Határozzuk meg $f(x) = 2 \sin x + 3e^x$ primitív függvényét!

Megoldás: $2 \cdot (-\cos x) + 3e^x + C = -2 \cos x + 3e^x + C.$

Ellenőrzés: $(-2 \cos x + 3e^x + C)' = 2 \sin x + 3e^x. \checkmark$

Primitív függvény keresése – példák

1. példa

Határozzuk meg $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ primitív függvényét!

Megoldás: $3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C = x^3 - 2x^2 + 5x + C.$

Ellenőrzés: $(x^3 - 2x^2 + 5x + C)' = 3x^2 - 4x + 5. \checkmark$

2. példa

Határozzuk meg $f(x) = 2 \sin x + 3e^x$ primitív függvényét!

Megoldás: $2 \cdot (-\cos x) + 3e^x + C = -2 \cos x + 3e^x + C.$

Ellenőrzés: $(-2 \cos x + 3e^x + C)' = 2 \sin x + 3e^x. \checkmark$

Köszönöm a figyelmet!