

Differenciálás (3. hét)

Matematika informatikusoknak 2

Nagy Gábor Péter

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

2025/2026-os tanév II. féléve

Tagolás

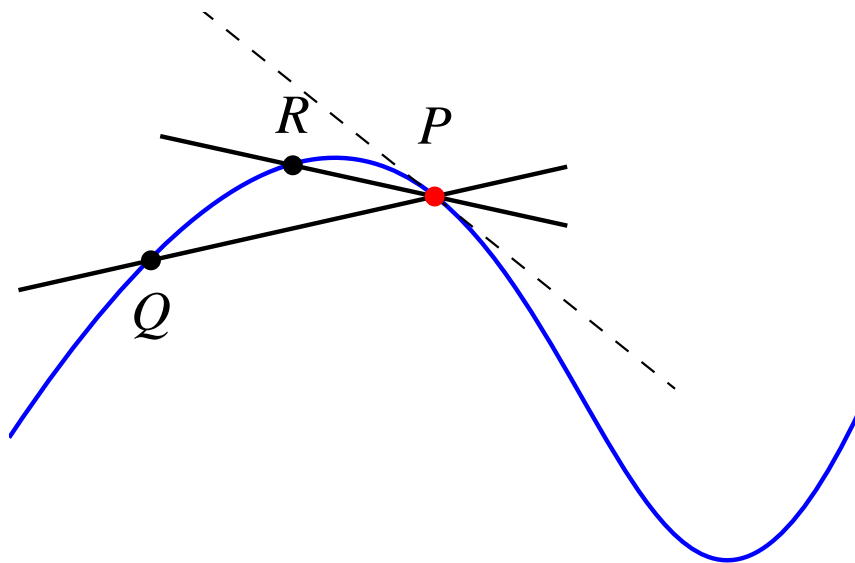
- 1 A deriváltfüggvény
- 2 Deriválási szabályok
- 3 A derivált mint változási sebesség
- 4 A trigonometrikus függvények deriváltja
- 5 A láncszabály
- 6 Az exponenciális függvény és a logaritmus deriváltja
- 7 Paraméteres görbék, részecske mozgása
- 8 Implicit függvény deriváltja
- 9 Linearizáció és differenciálok

Tagolás

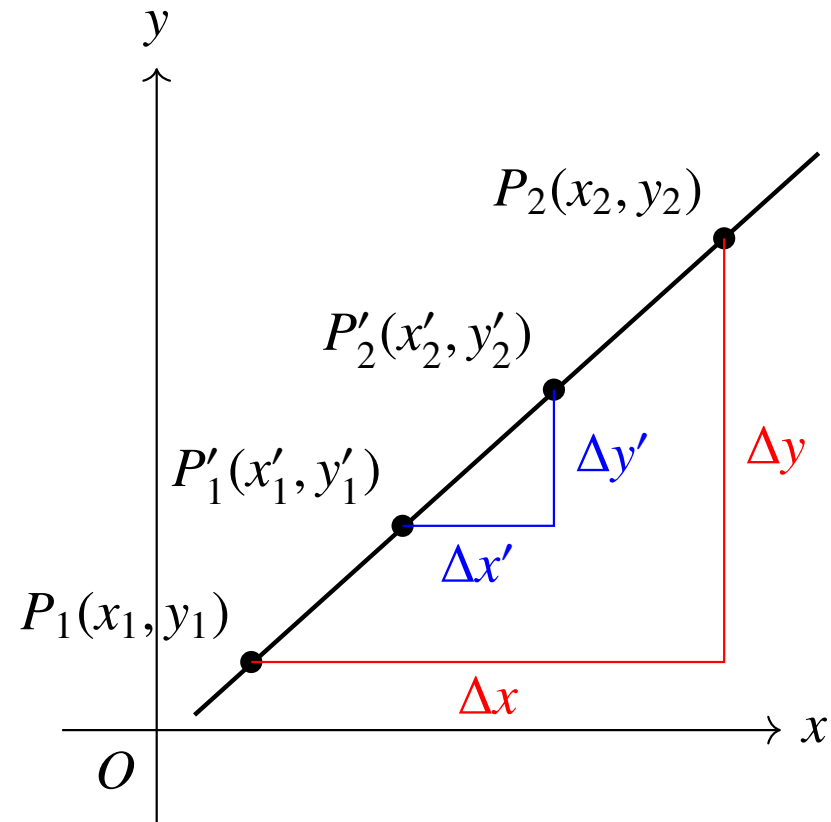
- 1 A deriváltfüggvény
- 2 Deriválási szabályok
- 3 A derivált mint változási sebesség
- 4 A trigonometrikus függvények deriváltja
- 5 A láncszabály
- 6 Az exponenciális függvény és a logaritmus deriváltja
- 7 Paraméteres görbék, részecske mozgása
- 8 Implicit függvény deriváltja
- 9 Linearizáció és differenciálok

Emlékeztető: görbe érintője, egyenes meredeksége

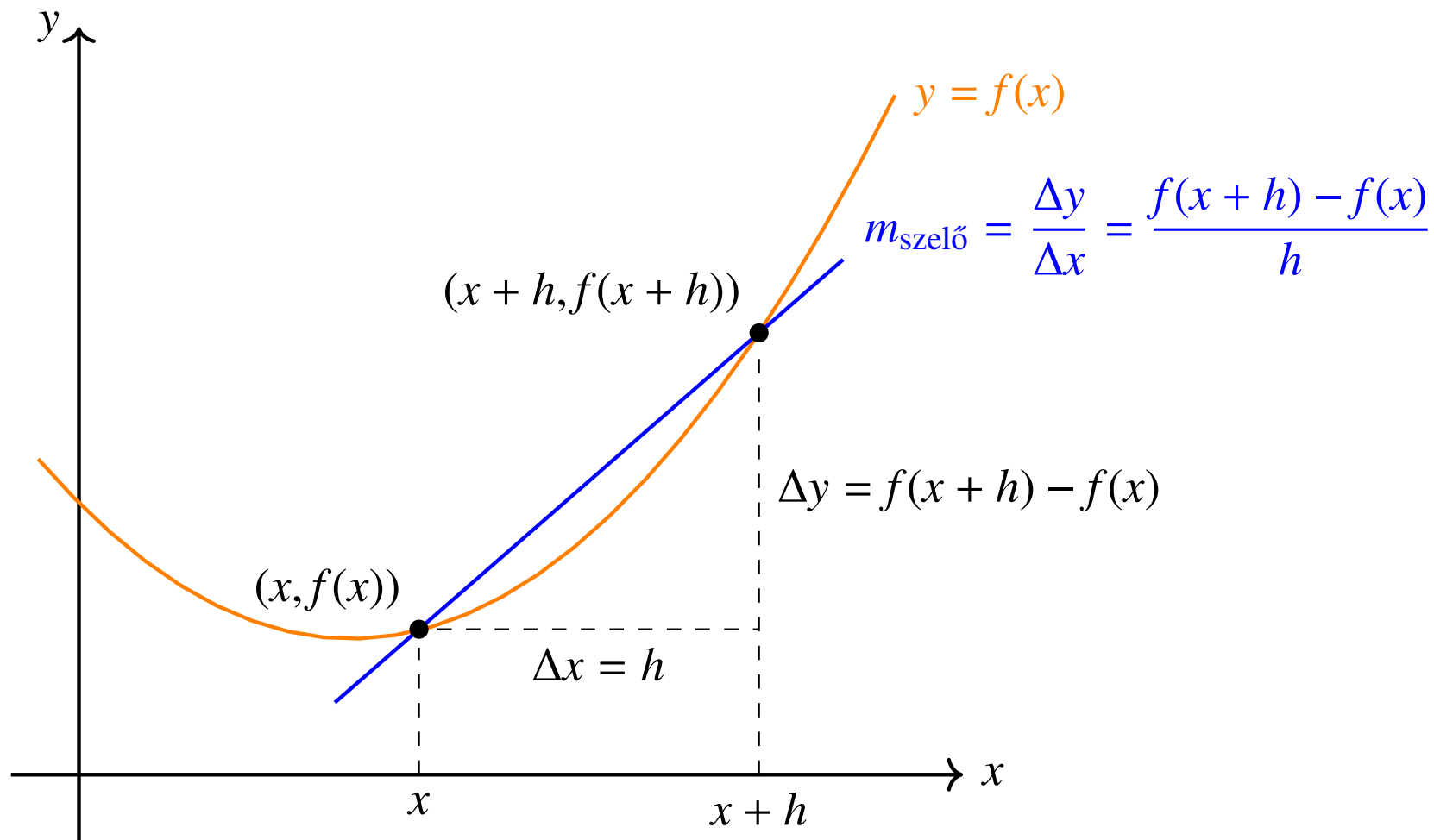
- Egy görbe sima pontjába húzott érintője a szelő határhelyzete.



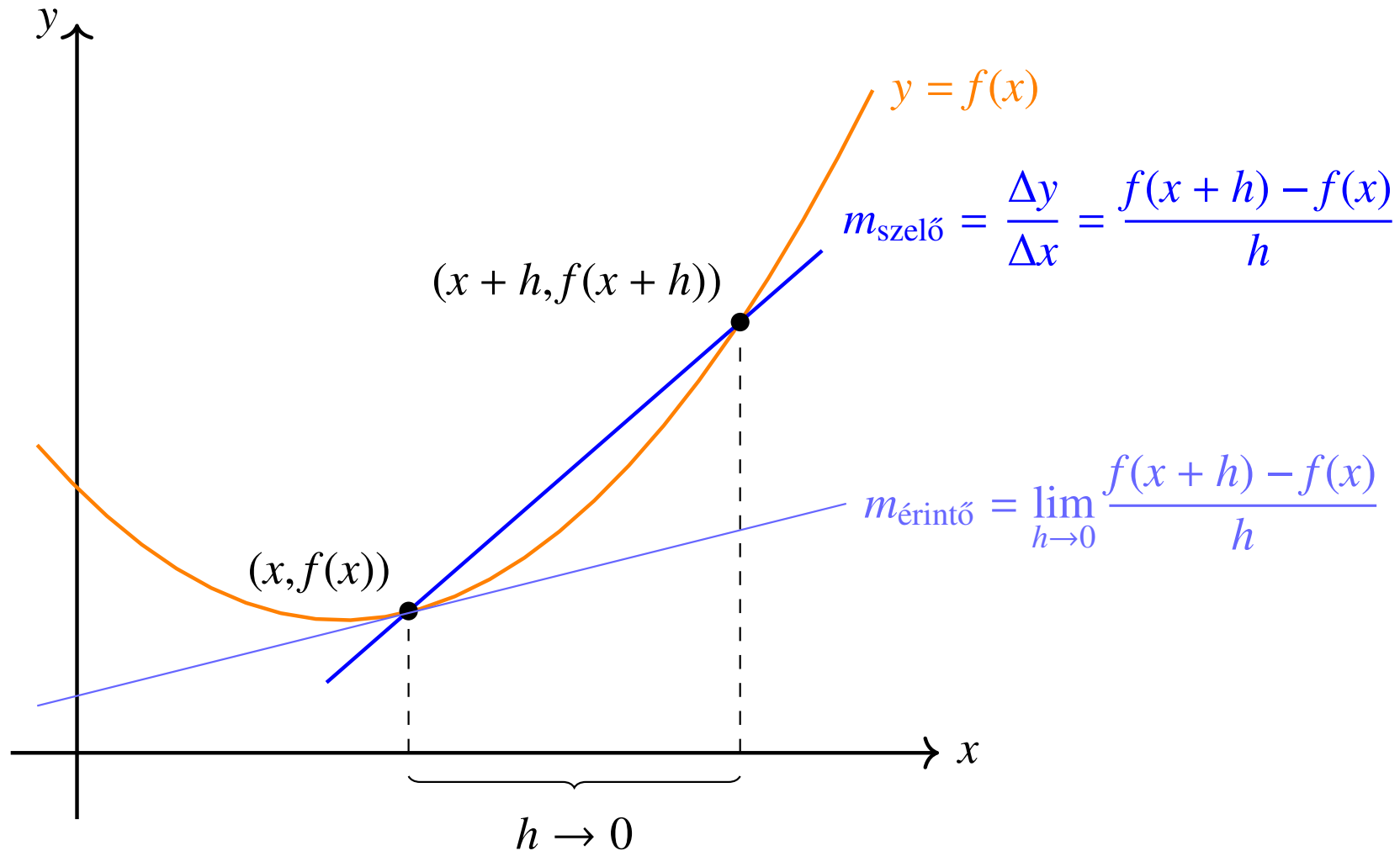
- Egy egyenes meredeksége a változások $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hányadosa.



Görbe meredeksége mint határérték



Görbe meredeksége mint határérték



A deriváltfüggvény

Definíció: Deriválhatóság (differenciálhatóság)

Azt mondjuk, hogy az $f : A \subseteq \mathbb{R}$ függvény **differenciálható az $a \in A$ pontban**, ha a következő határérték létezik:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Definíció: Deriváltfüggvény (deriválás, differenciálás)

Ha f differenciálható minden $x \in A$ pontban, akkor a $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely minden $x \in A$ ponthoz hozzárendeli a fenti határérték értékét, a **deriváltfüggvényének** nevezzük.

Jelölés:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

- A derivált értéke megadja a **függvény meredekségét** az adott pontban.
- További jelölések: $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\dot{f}(x)$ (fizikában).

A deriváltfüggvény

Definíció: Deriválhatóság (differenciálhatóság)

Azt mondjuk, hogy az $f : A \subseteq \mathbb{R}$ függvény **differenciálható az $a \in A$ pontban**, ha a következő határérték létezik:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Definíció: Deriváltfüggvény (deriválás, differenciálás)

Ha f differenciálható minden $x \in A$ pontban, akkor a $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely minden $x \in A$ ponthoz hozzárendeli a fenti határérték értékét, a **deriváltfüggvényének** nevezzük.

Jelölés:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

- A derivált értéke megadja a **függvény meredekségét** az adott pontban.
- További jelölések: $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\dot{f}(x)$ (fizikában).

A deriváltfüggvény

Definíció: Deriválhatóság (differenciálhatóság)

Azt mondjuk, hogy az $f : A \subseteq \mathbb{R}$ függvény **differenciálható az $a \in A$ pontban**, ha a következő határérték létezik:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Definíció: Deriváltfüggvény (deriválás, differenciálás)

Ha f differenciálható minden $x \in A$ pontban, akkor a $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely minden $x \in A$ ponthoz hozzárendeli a fenti határérték értékét, a **deriváltfüggvényének** nevezzük.

Jelölés:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

- A derivált értéke megadja a **függvény meredekségét** az adott pontban.
- További jelölések: $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\dot{f}(x)$ (fizikában).

A deriváltfüggvény

Definíció: Deriválhatóság (differenciálhatóság)

Azt mondjuk, hogy az $f : A \subseteq \mathbb{R}$ függvény **differenciálható az $a \in A$ pontban**, ha a következő határérték létezik:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Definíció: Deriváltfüggvény (deriválás, differenciálás)

Ha f differenciálható minden $x \in A$ pontban, akkor a $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely minden $x \in A$ ponthoz hozzárendeli a fenti határérték értékét, a **deriváltfüggvényének** nevezzük.

Jelölés:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

- A derivált értéke megadja a **függvény meredekségét** az adott pontban.
- További jelölések: $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\dot{f}(x)$ (fizikában).

A derivált kiszámítása a definíció alapján

Példa: $f(x) = mx + b$ deriváltja (meredeksége) $f'(x) = m$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + b - (mx+b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m.$$

Példa: $f(x) = x^2$ deriváltja $f'(x) = 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

A derivált kiszámítása a definíció alapján

Példa: $f(x) = mx + b$ deriváltja (meredeksége) $f'(x) = m$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + b - (mx+b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m.$$

Példa: $f(x) = x^2$ deriváltja $f'(x) = 2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

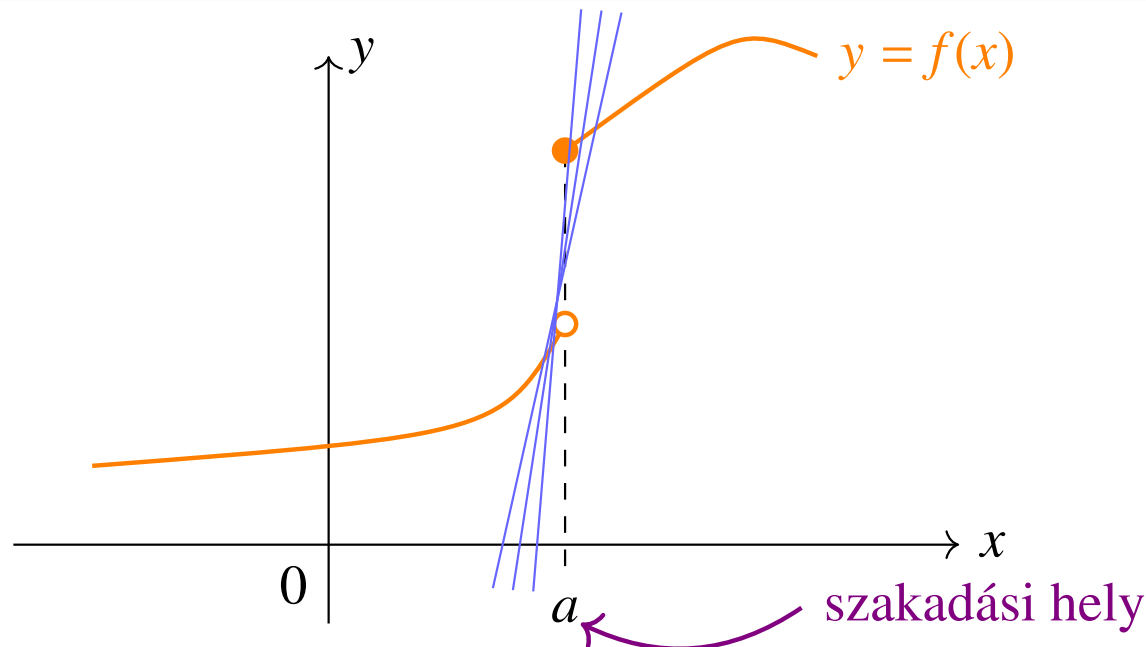
A differenciálhatóság és a folytonosság kapcsolata

Tétel: Differenciálhatóság és folytonosság

Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos az a pontban.

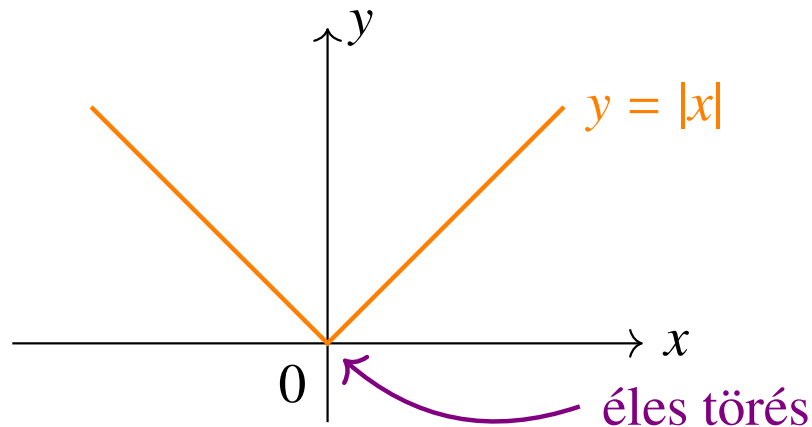
Bizonyítás.

Szakadási hely esetén a szelők meredeksége nem korlátos, így nem is lehet határértékük. □



Differenciálhatóság és simaság

- A differenciálhatóság egy erősebb tulajdonság, mint a folytonosság.
- A differenciálhatóság azt jelenti, hogy a függvény nemcsak folytonos, hanem "sima" is a pontban, azaz nincs éles törés vagy szakadási hely.
- Például a $f(x) = |x|$ függvény nem differenciálható $x = 0$ -ban, mert ott éles törés van, de folytonos.

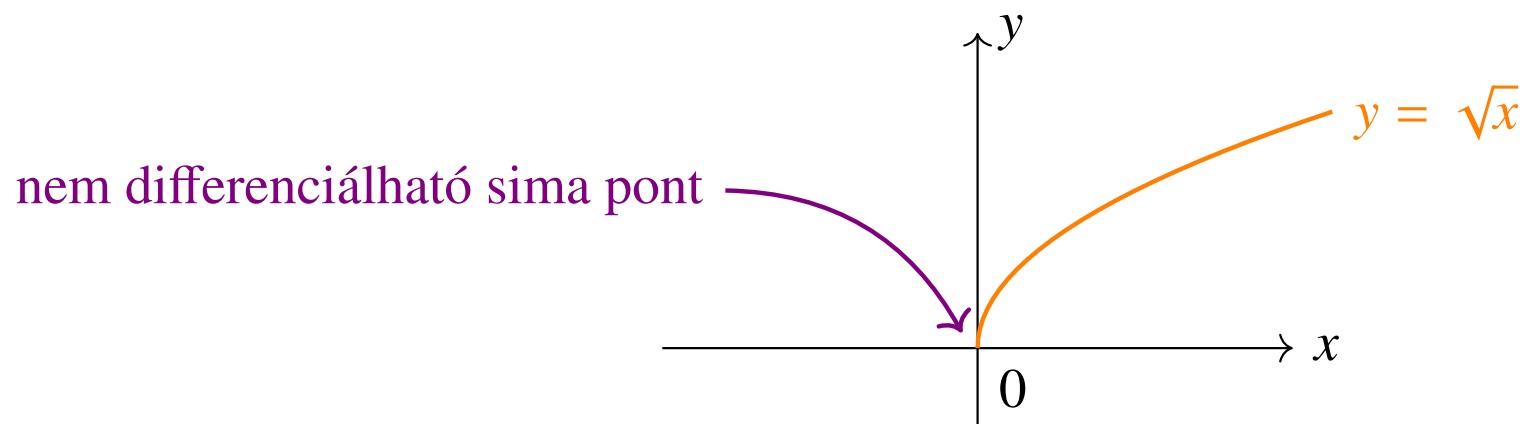


- Hasonló helyzetek kezelhetők a **jobb és bal oldali deriváltak** fogalmával.

Sima, de nem differenciálható pontok

Példa: $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $x = 0$ -ban sima, de nem differenciálható

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$



Tagolás

- 1 A deriváltfüggvény
- 2 Deriválási szabályok**
- 3 A derivált mint változási sebesség
- 4 A trigonometrikus függvények deriváltja
- 5 A láncszabály
- 6 Az exponenciális függvény és a logaritmus deriváltja
- 7 Paraméteres görbék, részecske mozgása
- 8 Implicit függvény deriváltja
- 9 Linearizáció és differenciálok

Konstans függvény és hatványfüggvény deriváltja

1. szabály: Konstans függvény deriváltja

Ha $f(x) = c$ konstans függvény, akkor $f'(x) = 0$.

- Valójában ennél már többet beláttunk: elsőfokú $f(x) = mx + b$ függvények deriváltja az m meredekség: $f'(x) = m$.

2. szabály: Pozitív egész kitevős hatványfüggvény deriváltja

Ha $f(x) = x^n$ ahol $n \in \mathbb{N}$, akkor $f'(x) = nx^{n-1}$.

- Ezt is láttuk már az $n = 1$ és $n = 2$ esetekre.
- Az általános esetet közvetlenül be lehet látni a **binomiális tétel** vagy az

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

azonosság segítségével.

- Mi a deriváltakra vonatkozó **szorzatszabályból** fogjuk levezetni.

Konstans függvény és hatványfüggvény deriváltja

1. szabály: Konstans függvény deriváltja

Ha $f(x) = c$ konstans függvény, akkor $f'(x) = 0$.

- Valójában ennél már többet beláttunk: elsőfokú $f(x) = mx + b$ függvények deriváltja az m meredekség: $f'(x) = m$.

2. szabály: Pozitív egész kitevős hatványfüggvény deriváltja

Ha $f(x) = x^n$ ahol $n \in \mathbb{N}$, akkor $f'(x) = nx^{n-1}$.

- Ezt is láttuk már az $n = 1$ és $n = 2$ esetekre.
- Az általános esetet közvetlenül be lehet látni a **binomiális tétel** vagy az

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

azonosság segítségével.

- Mi a deriváltakra vonatkozó **szorzatszabályból** fogjuk levezetni.

Konstans függvény és hatványfüggvény deriváltja

1. szabály: Konstans függvény deriváltja

Ha $f(x) = c$ konstans függvény, akkor $f'(x) = 0$.

- Valójában ennél már többet beláttunk: elsőfokú $f(x) = mx + b$ függvények deriváltja az m meredekség: $f'(x) = m$.

2. szabály: Pozitív egész kitevős hatványfüggvény deriváltja

Ha $f(x) = x^n$ ahol $n \in \mathbb{N}$, akkor $f'(x) = nx^{n-1}$.

- Ezt is láttuk már az $n = 1$ és $n = 2$ esetekre.
- Az általános esetet közvetlenül be lehet látni a **binomiális tétel** vagy az

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

azonosság segítségével.

- Mi a deriváltakra vonatkozó **szorzatszabályból** fogjuk levezetni.

Konstans függvény és hatványfüggvény deriváltja

1. szabály: Konstans függvény deriváltja

Ha $f(x) = c$ konstans függvény, akkor $f'(x) = 0$.

- Valójában ennél már többet beláttunk: elsőfokú $f(x) = mx + b$ függvények deriváltja az m meredekség: $f'(x) = m$.

2. szabály: Pozitív egész kitevős hatványfüggvény deriváltja

Ha $f(x) = x^n$ ahol $n \in \mathbb{N}$, akkor $f'(x) = nx^{n-1}$.

- Ezt is láttuk már az $n = 1$ és $n = 2$ esetekre.
- Az általános esetet közvetlenül be lehet látni a **binomiális tétel** vagy az

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

azonosság segítségével.

- Mi a deriváltakra vonatkozó **szorzatszabályból** fogjuk levezetni.

Konstans függvény és hatványfüggvény deriváltja

1. szabály: Konstans függvény deriváltja

Ha $f(x) = c$ konstans függvény, akkor $f'(x) = 0$.

- Valójában ennél már többet beláttunk: elsőfokú $f(x) = mx + b$ függvények deriváltja az m meredekség: $f'(x) = m$.

2. szabály: Pozitív egész kitevős hatványfüggvény deriváltja

Ha $f(x) = x^n$ ahol $n \in \mathbb{N}$, akkor $f'(x) = nx^{n-1}$.

- Ezt is láttuk már az $n = 1$ és $n = 2$ esetekre.
- Az általános esetet közvetlenül be lehet látni a **binomiális tétel** vagy az

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

azonosság segítségével.

- Mi a deriváltakra vonatkozó **szorzatszabályból** fogjuk levezetni.

Konstans függvény és hatványfüggvény deriváltja

1. szabály: Konstans függvény deriváltja

Ha $f(x) = c$ konstans függvény, akkor $f'(x) = 0$.

- Valójában ennél már többet beláttunk: elsőfokú $f(x) = mx + b$ függvények deriváltja az m meredekség: $f'(x) = m$.

2. szabály: Pozitív egész kitevős hatványfüggvény deriváltja

Ha $f(x) = x^n$ ahol $n \in \mathbb{N}$, akkor $f'(x) = nx^{n-1}$.

- Ezt is láttuk már az $n = 1$ és $n = 2$ esetekre.
- Az általános esetet közvetlenül be lehet látni a **binomiális tétel** vagy az

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

azonosság segítségével.

- Mi a deriváltakra vonatkozó **szorzatszabályból** fogjuk levezetni.

Szorzás konstanssal, összeg deriváltja

3. szabály: Szorzás konstanssal

Ha f differenciálható és $c \in \mathbb{R}$, akkor $(cf)'(x) = cf'(x)$.

4. szabály: Összeg deriváltja

Ha f és g differenciálható, akkor $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

- A 3. és 4. szabály következik a derivált definíciójából, valamint a határértékek és az alpműveletek felcserélhetőségéből.
- Az 1-4. szabály segítségével kiszámíthatjuk a polinomok deriváltját.

Példa: $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5$ deriváltja

$$f'(x) \stackrel{\text{4. szabály}}{=} (3x^4)' + (2x^3)' - (5)'$$

$$\stackrel{\text{3. szabály}}{=} 3 \cdot (x^4)' + 2 \cdot (x^3)' - (5)'$$

$$\stackrel{\text{2. szabály}}{=} 3 \cdot 4x^{4-1} + 2 \cdot 3x^{3-1} - 0 = 12x^3 + 6x^2.$$

Szorzás konstanssal, összeg deriváltja

3. szabály: Szorzás konstanssal

Ha f differenciálható és $c \in \mathbb{R}$, akkor $(cf)'(x) = cf'(x)$.

4. szabály: Összeg deriváltja

Ha f és g differenciálható, akkor $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

- A 3. és 4. szabály következik a derivált definíciójából, valamint a határértékek és az alpműveletek felcserélhetőségéből.
- Az 1-4. szabály segítségével kiszámíthatjuk a polinomok deriváltját.

Példa: $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5$ deriváltja

$$\begin{aligned}
 f'(x) &\stackrel{\text{4. szabály}}{=} (3x^4)' + (2x^3)' - (5)' \\
 &\stackrel{\text{3. szabály}}{=} 3 \cdot (x^4)' + 2 \cdot (x^3)' - (5)' \\
 &\stackrel{\text{2. szabály}}{=} 3 \cdot 4x^{4-1} + 2 \cdot 3x^{3-1} - 0 = 12x^3 + 6x^2.
 \end{aligned}$$

Szorzás konstanssal, összeg deriváltja

3. szabály: Szorzás konstanssal

Ha f differenciálható és $c \in \mathbb{R}$, akkor $(cf)'(x) = cf'(x)$.

4. szabály: Összeg deriváltja

Ha f és g differenciálható, akkor $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

- A 3. és 4. szabály következik a derivált definíciójából, valamint a határértékek és az alpműveletek felcserélhetőségéből.
- Az 1-4. szabály segítségével kiszámíthatjuk a polinomok deriváltját.

Példa: $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5$ deriváltja

$$\begin{aligned}
 f'(x) &\stackrel{\text{4. szabály}}{=} (3x^4)' + (2x^3)' - (5)' \\
 &\stackrel{\text{3. szabály}}{=} 3 \cdot (x^4)' + 2 \cdot (x^3)' - (5)' \\
 &\stackrel{\text{2. szabály}}{=} 3 \cdot 4x^{4-1} + 2 \cdot 3x^{3-1} - 0 = 12x^3 + 6x^2.
 \end{aligned}$$

Szorzás konstanssal, összeg deriváltja

3. szabály: Szorzás konstanssal

Ha f differenciálható és $c \in \mathbb{R}$, akkor $(cf)'(x) = cf'(x)$.

4. szabály: Összeg deriváltja

Ha f és g differenciálható, akkor $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

- A 3. és 4. szabály következik a derivált definíciójából, valamint a határértékek és az alpműveletek felcserélhetőségéből.
- Az 1-4. szabály segítségével kiszámíthatjuk a polinomok deriváltját.

Példa: $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5$ deriváltja

$$f'(x) \stackrel{\text{4. szabály}}{=} (3x^4)' + (2x^3)' - (5)'$$

$$\stackrel{\text{3. szabály}}{=} 3 \cdot (x^4)' + 2 \cdot (x^3)' - (5)'$$

$$\stackrel{\text{2. szabály}}{=} 3 \cdot 4x^{4-1} + 2 \cdot 3x^{3-1} - 0 = 12x^3 + 6x^2.$$

Szorzás konstanssal, összeg deriváltja

3. szabály: Szorzás konstanssal

Ha f differenciálható és $c \in \mathbb{R}$, akkor $(cf)'(x) = cf'(x)$.

4. szabály: Összeg deriváltja

Ha f és g differenciálható, akkor $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

- A 3. és 4. szabály következik a derivált definíciójából, valamint a határértékek és az alpműveletek felcserélhetőségéből.
- Az 1-4. szabály segítségével kiszámíthatjuk a polinomok deriváltját.

Példa: $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5$ deriváltja

$$\begin{aligned}
 f'(x) &\stackrel{\text{4. szabály}}{=} (3x^4)' + (2x^3)' - (5)' \\
 &\stackrel{\text{3. szabály}}{=} 3 \cdot (x^4)' + 2 \cdot (x^3)' - (5)' \\
 &\stackrel{\text{2. szabály}}{=} 3 \cdot 4x^{4-1} + 2 \cdot 3x^{3-1} - 0 = 12x^3 + 6x^2.
 \end{aligned}$$

A szorzatszabály

5. szabály: Szorzatszabály

Ha f és g differenciálható, akkor

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - \cancel{f(x)g(x+h)} + \cancel{f(x)g(x+h)} - f(x)g(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\&= g(x)f'(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}$$

Hatványfüggvény deriváltjának bizonyítása

- **Emlékeztető:** $f(x) = x^n$ deriváltja $f'(x) = nx^{n-1}$.
- **Teljes indukcióval** fogjuk bizonyítani, az $n = 1$ és $n = 2$ eseteket már láttuk.
- **Indukciós feltevés:** Tegyük fel, hogy $f(x) = x^k$ deriváltja $f'(x) = kx^{k-1}$ minden $k < n$ pozitív egész számra.
- Megmutatjuk n -re:

$$\begin{aligned}
 (x^n)' &= (x \cdot x^{n-1})' && \text{(szorzatra bontjuk)} \\
 &= (x)' \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})' && \text{(szorzatszabály)} \\
 &= 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1)x^{(n-1)-1} && \text{(ind. feltevés)} \\
 &= x^{n-1} + (n-1)x^{(n-1)} && \text{(számolás)} \\
 &= nx^{n-1} && \text{(eredmény)}
 \end{aligned}$$

Hányadosszabály

6. szabály: Hányadosszabály

Ha f és g differenciálható, és $g(x) \neq 0$, akkor

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

- Mivel $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, a szorzatszabályt és a következő szabályt használva levezethető.
- **Reciprok függvény deriváltja:** Ha g differenciálható és $g(x) \neq 0$, akkor
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

$$0 = (1)' = \left(g \cdot \frac{1}{g}\right)' = g' \cdot \frac{1}{g} + g \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' \implies \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Racionális függvények deriváltja

- A hányadosszabály segítségével kiszámíthatjuk a racionális függvények deriváltját, azaz olyan függvényekét, amelyek polinomok hányadosai.

Példa: $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$ deriváltja

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^3 + 3)'(x^2 - 1) - (2x^3 + 3)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(6x^2)(x^2 - 1) - (2x^3 + 3)(2x)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{6x^4 - 6x^2 - 4x^4 - 6x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Racionális függvények deriváltja

- A hányadosszabály segítségével kiszámíthatjuk a racionális függvények deriváltját, azaz olyan függvényekét, amelyek polinomok hányadosai.

Példa: $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$ deriváltja

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^3 + 3)'(x^2 - 1) - (2x^3 + 3)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(6x^2)(x^2 - 1) - (2x^3 + 3)(2x)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{6x^4 - 6x^2 - 4x^4 - 6x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Negatív egész kitevős hatványfüggvény deriváltja

- Egy másik alkalmazás a negatív egész kitevős hatványfüggvények deriváltjának kiszámítása.

7. szabály: Negatív egész kitevős hatványfüggvény deriváltja

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$.

$$\begin{aligned}(x^{-n})' &= \left(\frac{1}{x^n}\right)' && \text{(definíció)} \\ &= -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} && \text{(reciprok függvény deriváltja)} \\ &= -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} && \text{(hatványfüggvény deriváltja)} \\ &= -nx^{-n-1} && \text{(számolás)}\end{aligned}$$

Deriválási szabályok összefoglalása

Szabály	Függvény	Derivált
1.	c	0
2.	x^n	nx^{n-1}
3.	cf	cf'
4.	$f \pm g$	$f' \pm g'$
5. (szorzat)	fg	$f'g + fg'$
6. (hányados)	$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$
7.	x^{-n}	$-nx^{-n-1}$

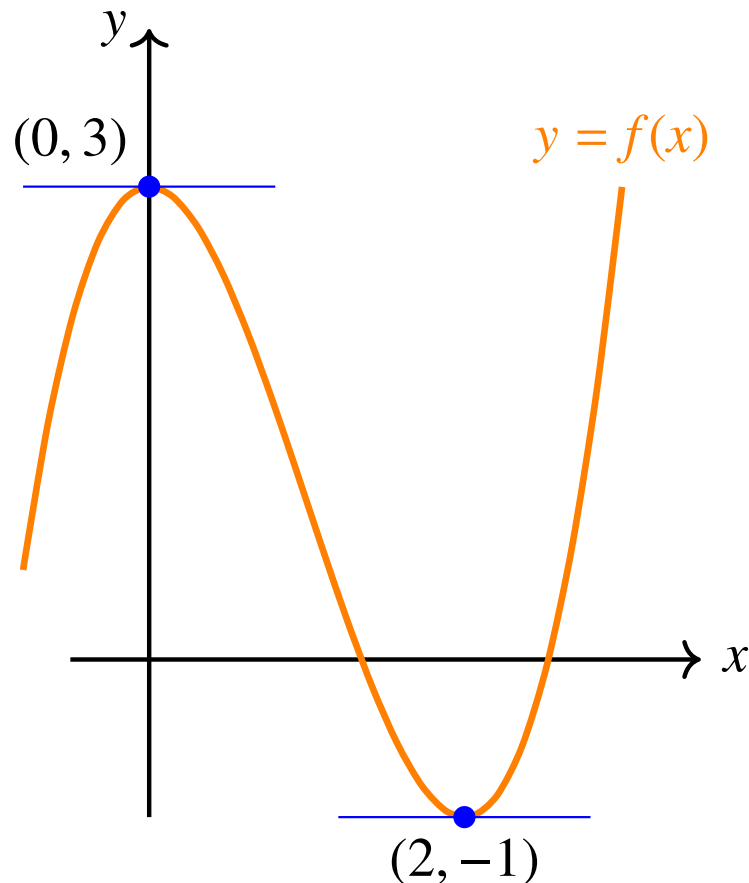
Tagolás

- 1 A deriváltfüggvény
- 2 Deriválási szabályok
- 3 A derivált mint változási sebesség**
- 4 A trigonometrikus függvények deriváltja
- 5 A láncszabály
- 6 Az exponenciális függvény és a logaritmus deriváltja
- 7 Paraméteres görbék, részecske mozgása
- 8 Implicit függvény deriváltja
- 9 Linearizáció és differenciálok

Vízszintes érintők keresése

Példa

Keressük meg a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ függvény vízszintes érintőit!



- A vízszintes érintő meredeksége 0, így a keresett pontokban a függvény deriváltja 0 kell legyen.
- Ezért meg kell határoznunk a függvény deriváltját, majd meg kell oldanunk az $f'(x) = 0$ egyenletet.
- $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
- $f'(x) = 0 \implies 3x(x - 2) = 0 \implies x_1 = 0$ és $x_2 = 2$.
- Az $y = f(x)$ értékeket kiszámolva: $y_1 = f(0) = 3$ és $y_2 = f(2) = -1$.

Pillanatnyi változási sebesség

- Az $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ hányados a függvény **változási sebességét** adja meg az x és $x+h$ pontok között.
- A $h \rightarrow 0$ határérték a **pillanatnyi változási sebességet** adja meg az x pontban, amely megegyezik a függvény deriváltjával x -ben.
- Ha $f(t)$ egy mozgó test helyét adja meg az idő függvényében, akkor az **átlagsebessége**

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\text{elmozdulás}}{\text{eltelt idő}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

- A **pillanatnyi sebesség** az átlagsebesség határértéke, amikor $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v_{\text{pill}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

- A **gyorsulás** a pillanatnyi sebesség változási sebessége, azaz a sebesség deriváltja:

$$a(t) = v'(t) = f''(t).$$

Pillanatnyi változási sebesség

- Az $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ hányados a függvény **változási sebességét** adja meg az x és $x+h$ pontok között.
- A $h \rightarrow 0$ határérték a **pillanatnyi változási sebességet** adja meg az x pontban, amely megegyezik a függvény deriváltjával x -ben.
- Ha $f(t)$ egy mozgó test helyét adja meg az idő függvényében, akkor az **átlagsebessége**

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\text{elmozdulás}}{\text{eltelt idő}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

- A **pillanatnyi sebesség** az átlagsebesség határértéke, amikor $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v_{\text{pill}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

- A **gyorsulás** a pillanatnyi sebesség változási sebessége, azaz a sebesség deriváltja:

$$a(t) = v'(t) = f''(t).$$

Pillanatnyi változási sebesség

- Az $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ hányados a függvény **változási sebességét** adja meg az x és $x+h$ pontok között.
- A $h \rightarrow 0$ határérték a **pillanatnyi változási sebességet** adja meg az x pontban, amely megegyezik a függvény deriváltjával x -ben.
- Ha $f(t)$ egy mozgó test helyét adja meg az idő függvényében, akkor az **átlagsebessége**

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\text{elmozdulás}}{\text{eltelt idő}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

- A **pillanatnyi sebesség** az átlagsebesség határértéke, amikor $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v_{\text{pill}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

- A **gyorsulás** a pillanatnyi sebesség változási sebessége, azaz a sebesség deriváltja:

$$a(t) = v'(t) = f''(t).$$

Pillanatnyi változási sebesség

- Az $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ hányados a függvény **változási sebességét** adja meg az x és $x+h$ pontok között.
- A $h \rightarrow 0$ határérték a **pillanatnyi változási sebességet** adja meg az x pontban, amely megegyezik a függvény deriváltjával x -ben.
- Ha $f(t)$ egy mozgó test helyét adja meg az idő függvényében, akkor az **átlagsebessége**

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\text{elmozdulás}}{\text{eltelt idő}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

- A **pillanatnyi sebesség** az átlagsebesség határértéke, amikor $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v_{\text{pill}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

- A **gyorsulás** a pillanatnyi sebesség változási sebessége, azaz a sebesség deriváltja:

$$a(t) = v'(t) = f''(t).$$

Pillanatnyi változási sebesség

- Az $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ hányados a függvény **változási sebességét** adja meg az x és $x+h$ pontok között.
- A $h \rightarrow 0$ határérték a **pillanatnyi változási sebességet** adja meg az x pontban, amely megegyezik a függvény deriváltjával x -ben.
- Ha $f(t)$ egy mozgó test helyét adja meg az idő függvényében, akkor az **átlagsebessége**

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\text{elmozdulás}}{\text{eltelt idő}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

- A **pillanatnyi sebesség** az átlagsebesség határértéke, amikor $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v_{\text{pill}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

- A **gyorsulás** a pillanatnyi sebesség változási sebessége, azaz a sebesség deriváltja:

$$a(t) = v'(t) = f''(t).$$

A szabadesés példája

- Newton második törvénye szerint egy test gyorsulása **egyenesen arányos** a rá ható erővel: $a = \frac{F}{m}$, ahol F a testre ható erő és m a test tömege.
- Szabadesés esetén a testre ható erő a **gravitációs erő**, amely egyenlő a test súlyával: $F = mg$, ahol g a gravitációs gyorsulás ($\approx 9.81 \text{ m/s}^2$).
- Ezért a szabadesés gyorsulása $a = \frac{mg}{m} = g$, azaz minden test ugyanakkora gyorsulással esik, függetlenül a tömegétől.
- Mivel $v'(t) = a$, a test sebessége időben lineárisan nő:

$$v(t) = gt + v_0,$$

ahol v_0 a kezdeti sebesség.

- A test helye időben négyzetesen nő:

$$s'(t) = v(t) = gt + v_0$$

- Így s_0 kezdeti hely mellett $s(t)$ a következőképpen alakul:

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.$$

A szabadesés példája

- Newton második törvénye szerint egy test gyorsulása **egyenesen arányos** a rá ható erővel: $a = \frac{F}{m}$, ahol F a testre ható erő és m a test tömege.
- Szabadesés esetén a testre ható erő a **gravitációs erő**, amely egyenlő a test súlyával: $F = mg$, ahol g a gravitációs gyorsulás ($\approx 9.81 \text{ m/s}^2$).
- Ezért a szabadesés gyorsulása $a = \frac{mg}{m} = g$, azaz minden test ugyanakkora gyorsulással esik, függetlenül a tömegétől.
- Mivel $v'(t) = a$, a test sebessége időben lineárisan nő:

$$v(t) = gt + v_0,$$

ahol v_0 a kezdeti sebesség.

- A test helye időben négyzetesen nő:

$$s'(t) = v(t) = gt + v_0$$

- Így s_0 kezdeti hely mellett $s(t)$ a következőképpen alakul:

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.$$

A szabadesés példája

- Newton második törvénye szerint egy test gyorsulása **egyenesen arányos** a rá ható erővel: $a = \frac{F}{m}$, ahol F a testre ható erő és m a test tömege.
- Szabadesés esetén a testre ható erő a **gravitációs erő**, amely egyenlő a test súlyával: $F = mg$, ahol g a gravitációs gyorsulás ($\approx 9.81 \text{ m/s}^2$).
- Ezért a szabadesés gyorsulása $a = \frac{mg}{m} = g$, azaz minden test ugyanakkora gyorsulással esik, függetlenül a tömegétől.
- Mivel $v'(t) = a$, a test sebessége időben lineárisan nő:

$$v(t) = gt + v_0,$$

ahol v_0 a kezdeti sebesség.

- A test helye időben négyzetesen nő:

$$s'(t) = v(t) = gt + v_0$$

- Így s_0 kezdeti hely mellett $s(t)$ a következőképpen alakul:

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.$$

A szabadesés példája

- Newton második törvénye szerint egy test gyorsulása **egyenesen arányos** a rá ható erővel: $a = \frac{F}{m}$, ahol F a testre ható erő és m a test tömege.
- Szabadesés esetén a testre ható erő a **gravitációs erő**, amely egyenlő a test súlyával: $F = mg$, ahol g a gravitációs gyorsulás ($\approx 9.81 \text{ m/s}^2$).
- Ezért a szabadesés gyorsulása $a = \frac{mg}{m} = g$, azaz minden test ugyanakkora gyorsulással esik, függetlenül a tömegétől.
- Mivel $v'(t) = a$, a test sebessége időben lineárisan nő:

$$v(t) = gt + v_0,$$

ahol v_0 a kezdeti sebesség.

- A test helye időben négyzetesen nő:

$$s'(t) = v(t) = gt + v_0$$

- Így s_0 kezdeti hely mellett $s(t)$ a következőképpen alakul:

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.$$

A szabadesés példája

- Newton második törvénye szerint egy test gyorsulása **egyenesen arányos** a rá ható erővel: $a = \frac{F}{m}$, ahol F a testre ható erő és m a test tömege.
- Szabadesés esetén a testre ható erő a **gravitációs erő**, amely egyenlő a test súlyával: $F = mg$, ahol g a gravitációs gyorsulás ($\approx 9.81 \text{ m/s}^2$).
- Ezért a szabadesés gyorsulása $a = \frac{mg}{m} = g$, azaz minden test ugyanakkora gyorsulással esik, függetlenül a tömegétől.
- Mivel $v'(t) = a$, a test sebessége időben lineárisan nő:

$$v(t) = gt + v_0,$$

ahol v_0 a kezdeti sebesség.

- A test helye időben négyzetesen nő:

$$s'(t) = v(t) = gt + v_0$$

- Így s_0 kezdeti hely mellett $s(t)$ a következőképpen alakul:

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.$$

A szabadesés példája

- Newton második törvénye szerint egy test gyorsulása **egyenesen arányos** a rá ható erővel: $a = \frac{F}{m}$, ahol F a testre ható erő és m a test tömege.
- Szabadesés esetén a testre ható erő a **gravitációs erő**, amely egyenlő a test súlyával: $F = mg$, ahol g a gravitációs gyorsulás ($\approx 9.81 \text{ m/s}^2$).
- Ezért a szabadesés gyorsulása $a = \frac{mg}{m} = g$, azaz minden test ugyanakkora gyorsulással esik, függetlenül a tömegétől.
- Mivel $v'(t) = a$, a test sebessége időben lineárisan nő:

$$v(t) = gt + v_0,$$

ahol v_0 a kezdeti sebesség.

- A test helye időben négyzetesen nő:

$$s'(t) = v(t) = gt + v_0$$

- Így s_0 kezdeti hely mellett $s(t)$ a következőképpen alakul:

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.$$

Deriváltak a gazdaságban

- A mozgást leíró függvények első és második deriváltját a mérnökök sebességnek és gyorsulásnak nevezik.
- A változási sebességre a közgazdászok is kidolgozták a maguk terminológiáját, ők általában **marginális (vagy határ-) függvényekről**, illetve értékekről beszélnek.
- A **termelési költséget** egy $c(x)$ függvény adja meg; $c(x)$ mutatja, hogy x darab termék előállítása mennyibe kerül.
- A **határköltség** a költségfüggvény x (vagyis az előállított termék mennyisége) szerinti deriváltja, tehát $\frac{dc}{dx}$.
- A **marginális adó** a jövedelem szerinti derivált, azaz $\frac{dt}{dI}$, ahol I a jövedelem, $t = t(I)$ pedig a fizetendő jövedelemadó.

Deriváltak a gazdaságban

- A mozgást leíró függvények első és második deriváltját a mérnökök sebességnek és gyorsulásnak nevezik.
- A változási sebességre a közgazdászok is kidolgozták a maguk terminológiáját, ők általában **marginális (vagy határ-) függvényekről**, illetve értékekről beszélnek.
- A **termelési költséget** egy $c(x)$ függvény adja meg; $c(x)$ mutatja, hogy x darab termék előállítása mennyibe kerül.
- A **határköltség** a költségfüggvény x (vagyis az előállított termék mennyisége) szerinti deriváltja, tehát $\frac{dc}{dx}$.
- A **marginális adó** a jövedelem szerinti derivált, azaz $\frac{dt}{dI}$, ahol I a jövedelem, $t = t(I)$ pedig a fizetendő jövedelemadó.

Deriváltak a gazdaságban

- A mozgást leíró függvények első és második deriváltját a mérnökök sebességnek és gyorsulásnak nevezik.
- A változási sebességre a közgazdászok is kidolgozták a maguk terminológiáját, ők általában **marginális (vagy határ-) függvényekről**, illetve értékekről beszélnek.
- A **termelési költséget** egy $c(x)$ függvény adja meg; $c(x)$ mutatja, hogy x darab termék előállítása mennyibe kerül.
- A **határköltség** a költségfüggvény x (vagyis az előállított termék mennyisége) szerinti deriváltja, tehát $\frac{dc}{dx}$.
- A **marginális adó** a jövedelem szerinti derivált, azaz $\frac{dt}{dI}$, ahol I a jövedelem, $t = t(I)$ pedig a fizetendő jövedelemadó.

Deriváltak a gazdaságban

- A mozgást leíró függvények első és második deriváltját a mérnökök sebességnek és gyorsulásnak nevezik.
- A változási sebességre a közgazdászok is kidolgozták a maguk terminológiáját, ők általában **marginális (vagy határ-) függvényekről**, illetve értékekről beszélnek.
- A **termelési költséget** egy $c(x)$ függvény adja meg; $c(x)$ mutatja, hogy x darab termék előállítása mennyibe kerül.
- A **határköltség** a költségfüggvény x (vagyis az előállított termék mennyisége) szerinti deriváltja, tehát $\frac{dc}{dx}$.
- A **marginális adó** a jövedelem szerinti derivált, azaz $\frac{dt}{dI}$, ahol I a jövedelem, $t = t(I)$ pedig a fizetendő jövedelemadó.

Deriváltak a gazdaságban

- A mozgást leíró függvények első és második deriváltját a mérnökök sebességnek és gyorsulásnak nevezik.
- A változási sebességre a közgazdászok is kidolgozták a maguk terminológiáját, ők általában **marginális (vagy határ-) függvényekről**, illetve értékekről beszélnek.
- A **termelési költséget** egy $c(x)$ függvény adja meg; $c(x)$ mutatja, hogy x darab termék előállítása mennyibe kerül.
- A **határköltség** a költségfüggvény x (vagyis az előállított termék mennyisége) szerinti deriváltja, tehát $\frac{dc}{dx}$.
- A **marginális adó** a jövedelem szerinti derivált, azaz $\frac{dt}{dI}$, ahol I a jövedelem, $t = t(I)$ pedig a fizetendő jövedelemadó.

Tagolás

- 1 A deriváltfüggvény
- 2 Deriválási szabályok
- 3 A derivált mint változási sebesség
- 4 A trigonometrikus függvények deriváltja**
- 5 A láncszabály
- 6 Az exponenciális függvény és a logaritmus deriváltja
- 7 Paraméteres görbék, részecske mozgása
- 8 Implicit függvény deriváltja
- 9 Linearizáció és differenciálok

A szinuszfüggvény deriváltja

- **Addíciós képlet:** $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.
- Fontos határérték: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.
- Következmény: $\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\left(\frac{\sin^2 h}{h^2}\right) \cdot \frac{h}{\cos h + 1} \rightarrow 0 = -1^2 \cdot \frac{0}{2}$.

Tétel: $\sin'(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} && \text{(addíciós képlet)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) && \text{(számolás)} \\
 &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x && \text{(határértékek)}
 \end{aligned}$$

A szinuszfüggvény deriváltja

- **Addíciós képlet:** $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.
- **Fontos határérték:** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.
- **Következmény:** $\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\left(\frac{\sin^2 h}{h^2}\right) \cdot \frac{h}{\cos h + 1} \rightarrow 0 = -1^2 \cdot \frac{0}{2}$.

Tétel: $\sin'(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} && \text{(addíciós képlet)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) && \text{(számolás)} \\
 &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x && \text{(határértékek)}
 \end{aligned}$$

A szinuszfüggvény deriváltja

- **Addíciós képlet:** $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.
- **Fontos határérték:** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.
- **Következmény:** $\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\left(\frac{\sin^2 h}{h^2}\right) \cdot \frac{h}{\cos h + 1} \rightarrow 0 = -1^2 \cdot \frac{0}{2}$.

Tétel: $\sin'(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} && \text{(addíciós képlet)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) && \text{(számolás)} \\
 &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x && \text{(határértékek)}
 \end{aligned}$$

A szinuszfüggvény deriváltja

- **Addíciós képlet:** $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.
- **Fontos határérték:** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.
- **Következmény:** $\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\left(\frac{\sin^2 h}{h^2}\right) \cdot \frac{h}{\cos h + 1} \rightarrow 0 = -1^2 \cdot \frac{0}{2}$.

Tétel: $\sin'(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} && \text{(addíciós képlet)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) && \text{(számolás)} \\
 &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x && \text{(határértékek)}
 \end{aligned}$$

A koszinuszfüggvény deriváltja

Tétel: $\cos'(x) = -\sin x$

- Az addíciós képletekből:

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x.\end{aligned}$$

- A koszinusz x -ben vett meredeksége a szinusz $x + \frac{\pi}{2}$ -ben vett meredekségével egyenlő:

$$\cos'(x) = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Példa: $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ deriváltja

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\sin x \cdot \cos x)' &&= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) \\ &= (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' &&= \cos^2 x - \sin^2 x.\end{aligned}$$

A koszinuszfüggvény deriváltja

Tétel: $\cos'(x) = -\sin x$

- Az addíciós képletekből:

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x.\end{aligned}$$

- A koszinusz x -ben vett meredeksége a szinusz $x + \frac{\pi}{2}$ -ben vett meredekségével egyenlő:

$$\cos'(x) = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Példa: $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ deriváltja

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\sin x \cdot \cos x)' &&= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) \\ &= (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' &&= \cos^2 x - \sin^2 x.\end{aligned}$$

A koszinuszfüggvény deriváltja

Tétel: $\cos'(x) = -\sin x$

- Az addíciós képletekből:

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x.\end{aligned}$$

- A koszinusz x -ben vett meredeksége a szinusz $x + \frac{\pi}{2}$ -ben vett meredekségével egyenlő:

$$\cos'(x) = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Példa: $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ deriváltja

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\sin x \cdot \cos x)' &&= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) \\ &= (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' &&= \cos^2 x - \sin^2 x.\end{aligned}$$

A koszinuszfüggvény deriváltja

Tétel: $\cos'(x) = -\sin x$

- Az addíciós képletekből:

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x.\end{aligned}$$

- A koszinusz x -ben vett meredeksége a szinusz $x + \frac{\pi}{2}$ -ben vett meredekségével egyenlő:

$$\cos'(x) = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Példa: $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ deriváltja

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\sin x \cdot \cos x)' &&= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) \\ &= (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' &&= \cos^2 x - \sin^2 x.\end{aligned}$$

A többi trigonometrikus függvény deriváltja

- A szinusz és koszinusz deriváltjai segítségével kiszámíthatjuk a többi trigonometrikus függvény deriváltját is.

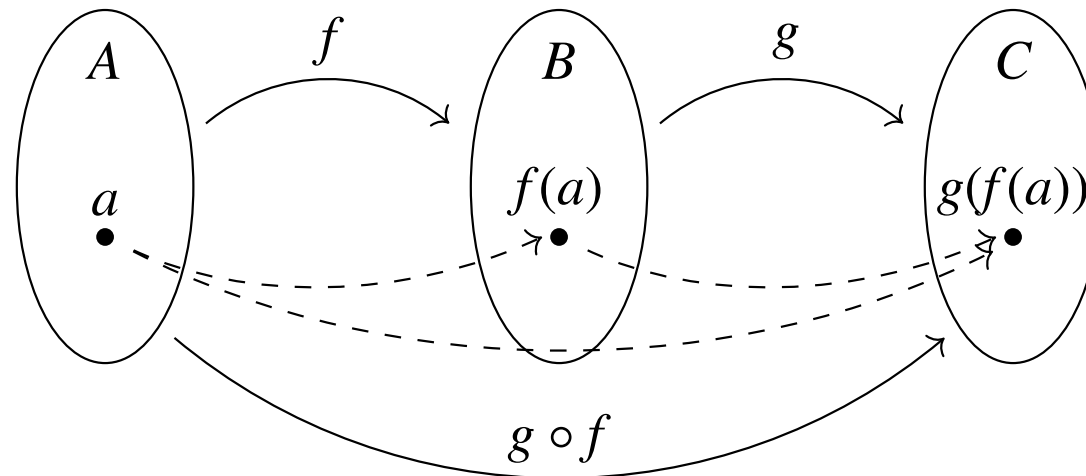
Megnevezés	Jelölés	Definíció	Derivált
tangens	$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sin x}{\cos x}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
kotangens	$\operatorname{ctg} x$	$\frac{\cos x}{\sin x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{csc}^2 x$
szekáns	$\sec x$	$\frac{1}{\cos x}$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$
kosekáns	$\operatorname{csc} x$	$\frac{1}{\sin x}$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{csc} x \cot x$

Tagolás

- 1 A deriváltfüggvény
- 2 Deriválási szabályok
- 3 A derivált mint változási sebesség
- 4 A trigonometrikus függvények deriváltja
- 5 A láncszabály**
- 6 Az exponenciális függvény és a logaritmus deriváltja
- 7 Paraméteres görbék, részecske mozgása
- 8 Implicit függvény deriváltja
- 9 Linearizáció és differenciálok

Elsőfokú (lineáris) függvények kompozíciója

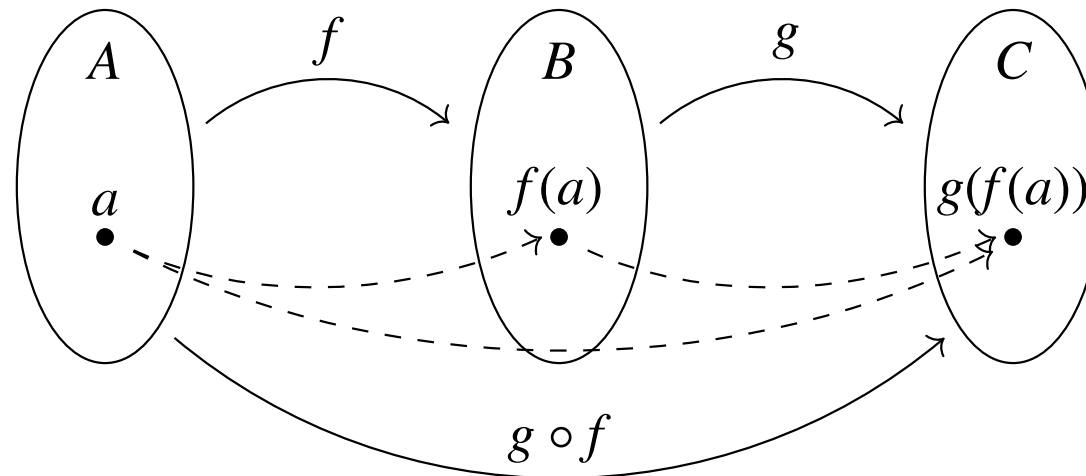
- **Emlékeztető:** Az $f : A \rightarrow B$ és $g : B \rightarrow C$ függvények kompozíciója a $g \circ f : A \rightarrow C$ függvény, amely minden $a \in A$ ponthoz hozzárendeli a $g(f(a))$ értékét.



- Azokat a függvényeket, amelyek két vagy több függvény kompozíciójából állnak, **összetett függvényeknek** nevezzük.
- Ha $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ egy összetett függvény, akkor f -et a **belső függvénynek**, g -t pedig a **külső függvénynek** nevezzük.

Elsőfokú (lineáris) függvények kompozíciója

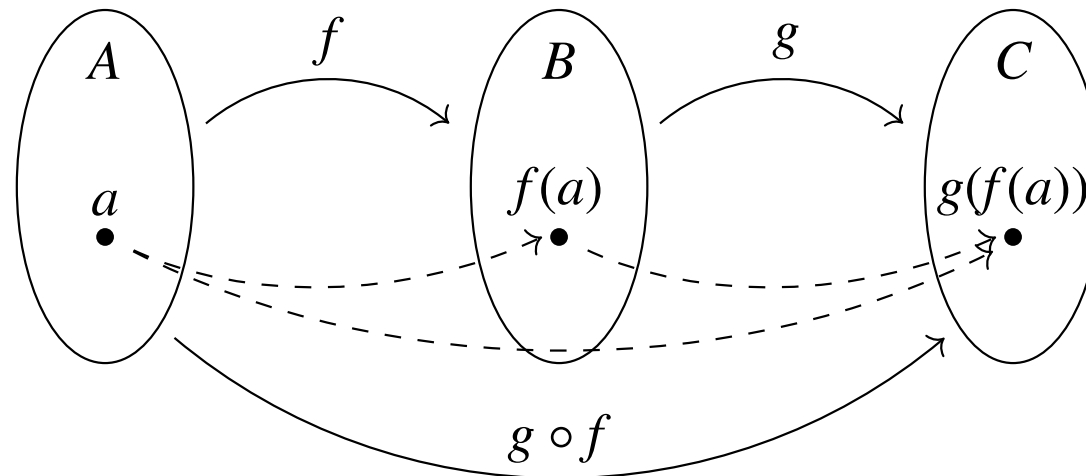
- **Emlékeztető:** Az $f : A \rightarrow B$ és $g : B \rightarrow C$ függvények kompozíciója a $g \circ f : A \rightarrow C$ függvény, amely minden $a \in A$ ponthoz hozzárendeli a $g(f(a))$ értékét.



- Azokat a függvényeket, amelyek két vagy több függvény kompozíciójából állnak, **összetett függvényeknek** nevezzük.
- Ha $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ egy összetett függvény, akkor f -et a **belső függvénynek**, g -t pedig a **külső függvénynek** nevezzük.

Elsőfokú (lineáris) függvények kompozíciója

- **Emlékeztető:** Az $f : A \rightarrow B$ és $g : B \rightarrow C$ függvények kompozíciója a $g \circ f : A \rightarrow C$ függvény, amely minden $a \in A$ ponthoz hozzárendeli a $g(f(a))$ értékét.



- Azokat a függvényeket, amelyek két vagy több függvény kompozíciójából állnak, **összetett függvényeknek** nevezzük.
- Ha $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ egy összetett függvény, akkor f -et a **belső függvénynek**, g -t pedig a **külső függvénynek** nevezzük.

Összetett függvények deriváltja: a láncszabály motivációja

- Az elsőfokú függvények $f(x) = mx + b$ alakúak, ahol m a függvény meredeksége.
- Az elsőfokú függvények kompozíciója is elsőfokú függvény:

$$f(x) = mx + b,$$

$$g(x) = nx + c$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= n(mx + b) + c \\ &= (nm)x + (nb + c)\end{aligned}$$

- Azt kapjuk, hogy az összetett függvény meredeksége a belső és a külső függvény meredekségének szorzata, azaz nm .

Feladat

Mutassuk meg, hogy ha $g = nx + c$ elsőfokú, akkor $(g \circ f)'(x) = n \cdot f'(x)$.

Összetett függvények deriváltja: a láncszabály motivációja

- Az elsőfokú függvények $f(x) = mx + b$ alakúak, ahol m a függvény meredeksége.
- Az elsőfokú függvények kompozíciója is elsőfokú függvény:

$$f(x) = mx + b,$$

$$g(x) = nx + c$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= n(mx + b) + c \\ &= (nm)x + (nb + c)\end{aligned}$$

- Azt kapjuk, hogy az összetett függvény meredeksége a belső és a külső függvény meredekségének szorzata, azaz nm .

Feladat

Mutassuk meg, hogy ha $g = nx + c$ elsőfokú, akkor $(g \circ f)'(x) = n \cdot f'(x)$.

Összetett függvények deriváltja: a láncszabály motivációja

- Az elsőfokú függvények $f(x) = mx + b$ alakúak, ahol m a függvény meredeksége.
- Az elsőfokú függvények kompozíciója is elsőfokú függvény:

$$f(x) = mx + b,$$

$$g(x) = nx + c$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= n(mx + b) + c \\ &= (nm)x + (nb + c)\end{aligned}$$

- Azt kapjuk, hogy **az összetett függvény meredeksége a belső és a külső függvény meredekségének szorzata**, azaz nm .

Feladat

Mutassuk meg, hogy ha $g = nx + c$ elsőfokú, akkor $(g \circ f)'(x) = n \cdot f'(x)$.

Összetett függvények deriváltja: a láncszabály motivációja

- Az elsőfokú függvények $f(x) = mx + b$ alakúak, ahol m a függvény meredeksége.
- Az elsőfokú függvények kompozíciója is elsőfokú függvény:

$$f(x) = mx + b,$$

$$g(x) = nx + c$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= n(mx + b) + c \\ &= (nm)x + (nb + c)\end{aligned}$$

- Azt kapjuk, hogy **az összetett függvény meredeksége a belső és a külső függvény meredekségének szorzata**, azaz nm .

Feladat

Mutassuk meg, hogy ha $g = nx + c$ elsőfokú, akkor $(g \circ f)'(x) = n \cdot f'(x)$.

A láncszabály

Tétel: A láncszabály

Ha f differenciálható x -ben, és g differenciálható $f(x)$ -ben, akkor

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Összefoglalva: az összetett függvény deriváltja a külső függvény deriváltja szorozva a belső függvény deriváltjával.

Példa

Ha $f(x) = x^3 - 3x$ és $g(x) = \sin x$, akkor $(g \circ f)'(x) = \cos(x^3 - 3x) \cdot (3x^2 - 3)$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= \sin(x^3 - 3x)' && \text{(összetett függvény)} \\ &= \cos(x^3 - 3x) \cdot (x^3 - 3x)' && \text{(láncszabály)} \\ &= \cos(x^3 - 3x) \cdot (3x^2 - 3) && \text{(hatványfüggvény deriváltja)}\end{aligned}$$

A láncszabály

Tétel: A láncszabály

Ha f differenciálható x -ben, és g differenciálható $f(x)$ -ben, akkor

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Összefoglalva: az összetett függvény deriváltja a külső függvény deriváltja szorozva a belső függvény deriváltjával.

Példa

Ha $f(x) = x^3 - 3x$ és $g(x) = \sin x$, akkor $(g \circ f)'(x) = \cos(x^3 - 3x) \cdot (3x^2 - 3)$.

$$(g \circ f)'(x) = \sin(x^3 - 3x)'$$

(összetett függvény)

$$= \cos(x^3 - 3x) \cdot (x^3 - 3x)'$$

(láncszabály)

$$= \cos(x^3 - 3x) \cdot (3x^2 - 3)$$

(hatványfüggvény deriváltja)

A láncszabály

Tétel: A láncszabály

Ha f differenciálható x -ben, és g differenciálható $f(x)$ -ben, akkor

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Összefoglalva: **az összetett függvény deriváltja a külső függvény deriváltja szorozva a belső függvény deriváltjával.**

Példa

Ha $f(x) = x^3 - 3x$ és $g(x) = \sin x$, akkor $(g \circ f)'(x) = \cos(x^3 - 3x) \cdot (3x^2 - 3)$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= \sin(x^3 - 3x)' && \text{(összetett függvény)} \\ &= \cos(x^3 - 3x) \cdot (x^3 - 3x)' && \text{(láncszabály)} \\ &= \cos(x^3 - 3x) \cdot (3x^2 - 3) && \text{(hatványfüggvény deriváltja)}\end{aligned}$$

Láncszabály bizonyítása polinomokra

- Csak arra az esetre bizonyítjuk, amikor a külső függvény egy polinom:

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- Ekkor az összetett függvény

$$h(x) = (g \circ f)(x) = a_n f(x)^n + a_{n-1} f(x)^{n-1} + \dots + a_1 f(x) + a_0.$$

- A deriválás és az alpműveletek felcserélhetősége miatt elég megmutatni, hogy a láncszabály igaz minden hatványfüggvényre, azaz $f(x) = x^n$ feltehető.

$$\begin{aligned} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} &= \frac{f(x+h)^n - f(x)^n}{h} \\ &= \frac{(f(x+h) - f(x)) \cdot (f(x+h)^{n-1} + f(x+h)^{n-2}f(x) + \dots + f(x)^{n-1})}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot (f(x+h)^{n-1} + f(x+h)^{n-2}f(x) + \dots + f(x)^{n-1}) \\ &\rightarrow f'(x) \cdot n f(x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Láncszabály bizonyítása polinomokra

- Csak arra az esetre bizonyítjuk, amikor a külső függvény egy polinom:

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- Ekkor az összetett függvény

$$h(x) = (g \circ f)(x) = a_n f(x)^n + a_{n-1} f(x)^{n-1} + \cdots + a_1 f(x) + a_0.$$

- A deriválás és az alpműveletek felcserélhetősége miatt elég megmutatni, hogy a láncszabály igaz minden hatványfüggvényre, azaz $f(x) = x^n$ feltehető.

$$\begin{aligned} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} &= \frac{f(x+h)^n - f(x)^n}{h} \\ &= \frac{(f(x+h) - f(x)) \cdot (f(x+h)^{n-1} + f(x+h)^{n-2}f(x) + \cdots + f(x)^{n-1})}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot (f(x+h)^{n-1} + f(x+h)^{n-2}f(x) + \cdots + f(x)^{n-1}) \\ &\rightarrow f'(x) \cdot n f(x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Láncszabály bizonyítása polinomokra

- Csak arra az esetre bizonyítjuk, amikor a külső függvény egy polinom:

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- Ekkor az összetett függvény

$$h(x) = (g \circ f)(x) = a_n f(x)^n + a_{n-1} f(x)^{n-1} + \dots + a_1 f(x) + a_0.$$

- A deriválás és az alpműveletek felcserélhetősége miatt elég megmutatni, hogy a láncszabály igaz minden hatványfüggvényre, azaz $f(x) = x^n$ feltehető.

$$\begin{aligned} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} &= \frac{f(x+h)^n - f(x)^n}{h} \\ &= \frac{(f(x+h) - f(x)) \cdot (f(x+h)^{n-1} + f(x+h)^{n-2}f(x) + \dots + f(x)^{n-1})}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot (f(x+h)^{n-1} + f(x+h)^{n-2}f(x) + \dots + f(x)^{n-1}) \\ &\rightarrow f'(x) \cdot n f(x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Alkalmazás: Az inverz függvény deriváltja

- Az inverz függvény deriváltját a láncszabály segítségével vezetjük ki.
- Ha $f(x)$ és $f^{-1}(x)$ egymás inverzei, akkor minden x -re

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

- Deriválva mindkét oldalt a láncszabályt alkalmazva:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1.$$

- Innen következik, hogy

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- Ha pl. $f(x) = x^n$, akkor $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, és

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Alkalmazás: Az inverz függvény deriváltja

- Az inverz függvény deriváltját a láncszabály segítségével vezetjük ki.
- Ha $f(x)$ és $f^{-1}(x)$ **egymás inverzei**, akkor minden x -re

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

- Deriválva mindkét oldalt a láncszabályt alkalmazva:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1.$$

- Innen következik, hogy

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- Ha pl. $f(x) = x^n$, akkor $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, és

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Alkalmazás: Az inverz függvény deriváltja

- Az inverz függvény deriváltját a láncszabály segítségével vezetjük ki.
- Ha $f(x)$ és $f^{-1}(x)$ **egymás inverzei**, akkor minden x -re

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

- Deriválva mindkét oldalt a láncszabályt alkalmazva:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1.$$

- Innen következik, hogy

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- Ha pl. $f(x) = x^n$, akkor $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, és

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Alkalmazás: Az inverz függvény deriváltja

- Az inverz függvény deriváltját a láncszabály segítségével vezetjük ki.
- Ha $f(x)$ és $f^{-1}(x)$ **egymás inverzei**, akkor minden x -re

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

- Deriválva mindkét oldalt a láncszabályt alkalmazva:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1.$$

- Innen következik, hogy

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- Ha pl. $f(x) = x^n$, akkor $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, és

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Alkalmazás: Az inverz függvény deriváltja

- Az inverz függvény deriváltját a láncszabály segítségével vezetjük ki.
- Ha $f(x)$ és $f^{-1}(x)$ **egymás inverzei**, akkor minden x -re

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

- Deriválva mindkét oldalt a láncszabályt alkalmazva:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1.$$

- Innen következik, hogy

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- Ha pl. $f(x) = x^n$, akkor $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, és

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Tagolás

- 1 A deriváltfüggvény
- 2 Deriválási szabályok
- 3 A derivált mint változási sebesség
- 4 A trigonometrikus függvények deriváltja
- 5 A láncszabály
- 6 Az exponenciális függvény és a logaritmus deriváltja**
- 7 Paraméteres görbék, részecske mozgása
- 8 Implicit függvény deriváltja
- 9 Linearizáció és differenciálok

Az exponenciális függvény: emlékeztető

- Legyen $a > 0$ és $a \neq 1$. Az $f(x) = a^x$ valós függvényt a hatványozás, a gyökvonás és a határértékek segítségével értelmezzük.
- Ha $a > 1$, akkor $f(x) = a^x$ szigorúan monoton növvő, pozitív értékű függvény.
- Mindkét esetben létezik f^{-1} **inverz függvény**, amelyet a **alapú logaritmusnak** nevezünk, és $\log_a x$ -szal jelölünk.
- Az **Euler-szám** $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Az e számhoz tartozó **exponenciális függvény**

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

és a **természetes alapú logaritmus függvény** $g(x) = \ln x$.

Lemma (viszonylag nehéz)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Az exponenciális függvény: emlékeztető

- Legyen $a > 0$ és $a \neq 1$. Az $f(x) = a^x$ valós függvényt a hatványozás, a gyökvonás és a határértékek segítségével értelmezzük.
- Ha $a > 1$, akkor $f(x) = a^x$ szigorúan monoton növvő, pozitív értékű függvény.
- Mindkét esetben létezik f^{-1} inverz függvény, amelyet a alapú logaritmusnak nevezünk, és $\log_a x$ -szal jelölünk.
- Az Euler-szám $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Az e számhoz tartozó exponenciális függvény

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

és a természetes alapú logaritmus függvény $g(x) = \ln x$.

Lemma (viszonylag nehéz)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Az exponenciális függvény: emlékeztető

- Legyen $a > 0$ és $a \neq 1$. Az $f(x) = a^x$ valós függvényt a hatványozás, a gyökvonás és a határértékek segítségével értelmezzük.
- Ha $a > 1$, akkor $f(x) = a^x$ szigorúan monoton növvő, pozitív értékű függvény.
- Mindkét esetben létezik f^{-1} **inverz függvény**, amelyet a **alapú logaritmusnak** nevezünk, és $\log_a x$ -szal jelölünk.
- Az **Euler-szám** $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Az e számhoz tartozó **exponenciális függvény**

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

és a **természetes alapú logaritmus függvény** $g(x) = \ln x$.

Lemma (viszonylag nehéz)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Az exponenciális függvény: emlékeztető

- Legyen $a > 0$ és $a \neq 1$. Az $f(x) = a^x$ valós függvényt a hatványozás, a gyökvonás és a határértékek segítségével értelmezzük.
- Ha $a > 1$, akkor $f(x) = a^x$ szigorúan monoton növvő, pozitív értékű függvény.
- Mindkét esetben létezik f^{-1} **inverz függvény**, amelyet a **alapú logaritmusnak** nevezünk, és $\log_a x$ -szal jelölünk.
- Az **Euler-szám** $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Az e számhoz tartozó **exponenciális függvény**

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

és a **természetes alapú logaritmus függvény** $g(x) = \ln x$.

Lemma (viszonylag nehéz)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Az exponenciális függvény: emlékeztető

- Legyen $a > 0$ és $a \neq 1$. Az $f(x) = a^x$ valós függvényt a hatványozás, a gyökvonás és a határértékek segítségével értelmezzük.
- Ha $a > 1$, akkor $f(x) = a^x$ szigorúan monoton növvő, pozitív értékű függvény.
- Mindkét esetben létezik f^{-1} **inverz függvény**, amelyet a **alapú logaritmusnak** nevezünk, és $\log_a x$ -szal jelölünk.
- Az **Euler-szám** $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Az e számhoz tartozó **exponenciális függvény**

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

és a **természetes alapú logaritmus függvény** $g(x) = \ln x$.

Lemma (viszonylag nehéz)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Az exponenciális függvény: emlékeztető

- Legyen $a > 0$ és $a \neq 1$. Az $f(x) = a^x$ valós függvényt a hatványozás, a gyökvonás és a határértékek segítségével értelmezzük.
- Ha $a > 1$, akkor $f(x) = a^x$ szigorúan monoton növvő, pozitív értékű függvény.
- Mindkét esetben létezik f^{-1} **inverz függvény**, amelyet a **alapú logaritmusnak** nevezünk, és $\log_a x$ -szal jelölünk.
- Az **Euler-szám** $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Az e számhoz tartozó **exponenciális függvény**

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

és a **természetes alapú logaritmus függvény** $g(x) = \ln x$.

Lemma (viszonylag nehéz)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Az exponenciális függvény deriváltja

Tétel: Az exponenciális függvény deriváltja

$$(e^x)' = e^x.$$

Bizonyítás.

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x. \quad \square$$

Tétel: Az a alapú exponenciális függvény deriváltja

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Bizonyítás.

Definíció szerint $a = e^{\ln a}$, így $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$. Ez egy összetett függvény, ahol a külső függvény e^x , a belső függvény pedig $x \ln a$. A láncszabályt alkalmazva kapjuk a tételt. □

Az exponenciális függvény deriváltja

Tétel: Az exponenciális függvény deriváltja

$$(e^x)' = e^x.$$

Bizonyítás.

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x. \quad \square$$

Tétel: Az a alapú exponenciális függvény deriváltja

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Bizonyítás.

Definíció szerint $a = e^{\ln a}$, így $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$. Ez egy összetett függvény, ahol a külső függvény e^x , a belső függvény pedig $x \ln a$. A láncszabályt alkalmazva kapjuk a tételt. □

Az exponenciális függvény deriváltja

Tétel: Az exponenciális függvény deriváltja

$$(e^x)' = e^x.$$

Bizonyítás.

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x. \quad \square$$

Tétel: Az a alapú exponenciális függvény deriváltja

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Bizonyítás.

Definíció szerint $a = e^{\ln a}$, így $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$. Ez egy összetett függvény, ahol a külső függvény e^x , a belső függvény pedig $x \ln a$. A láncszabályt alkalmazva kapjuk a tételt. □

Az exponenciális függvény deriváltja

Tétel: Az exponenciális függvény deriváltja

$$(e^x)' = e^x.$$

Bizonyítás.

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x. \quad \square$$

Tétel: Az a alapú exponenciális függvény deriváltja

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Bizonyítás.

Definíció szerint $a = e^{\ln a}$, így $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$. Ez egy összetett függvény, ahol a külső függvény e^x , a belső függvény pedig $x \ln a$. A láncszabályt alkalmazva kapjuk a tételt. □

A logaritmikus függvény deriváltja

- **Emlékeztő:** Az inverz függvény deriváltja:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Tétel: A logaritmikus függvény deriváltja

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Bizonyítás.

Mivel $\ln x$ az $f(x) = e^x$ inverze, és $f'(x) = e^x$, az inverzfüggvény deriváltjának képlete alapján

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

□

A logaritmikus függvény deriváltja

- **Emlékeztő:** Az inverz függvény deriváltja:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Tétel: A logaritmikus függvény deriváltja

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Bizonyítás.

Mivel $\ln x$ az $f(x) = e^x$ inverze, és $f'(x) = e^x$, az inverzfüggvény deriváltjának képlete alapján

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

□

A logaritmikus függvény deriváltja

- **Emlékeztető:** Az inverz függvény deriváltja:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Tétel: A logaritmikus függvény deriváltja

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Bizonyítás.

Mivel $\ln x$ az $f(x) = e^x$ inverze, és $f'(x) = e^x$, az inverzfüggvény deriváltjának képlete alapján

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

□

Fontosabb függvények deriváltjai

Függvény	Derivált	Megjegyzés
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	reciprok függvény
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	gyökvonás
$\sin x$	$\cos x$	szinuszfüggvény
$\cos x$	$-\sin x$	koszinuszfüggvény
e^x	e^x	exponenciális függvény
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	logaritmus függvény
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$

Tagolás

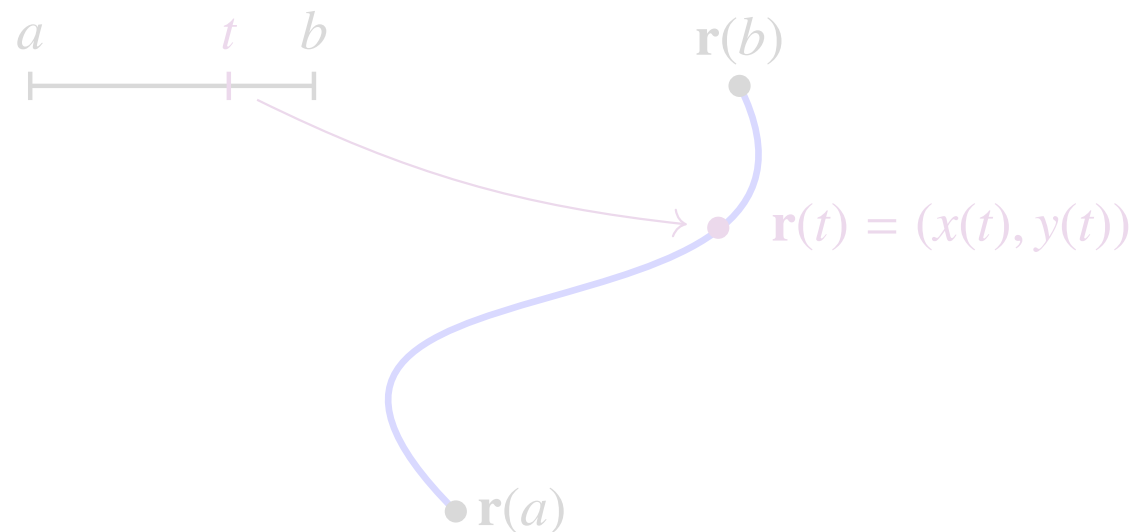
- 1 A deriváltfüggvény
- 2 Deriválási szabályok
- 3 A derivált mint változási sebesség
- 4 A trigonometrikus függvények deriváltja
- 5 A láncszabály
- 6 Az exponenciális függvény és a logaritmus deriváltja
- 7 Paraméteres görbék, részecske mozgása**
- 8 Implicit függvény deriváltja
- 9 Linearizáció és differenciálok

Paraméteres görbék a síkban

- A sík egy P pontját két valós számmal, az x és y **koordinátáival** adhatjuk meg: $P = (x, y)$.
- A síkban mozgó részecske helyét időben változó koordinátákkal adhatjuk meg:

$$P(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b],$$

- ahol $a \leq t \leq b$, és $x(t)$ és $y(t)$ a részecske t időpontban vett x és y koordinátái.



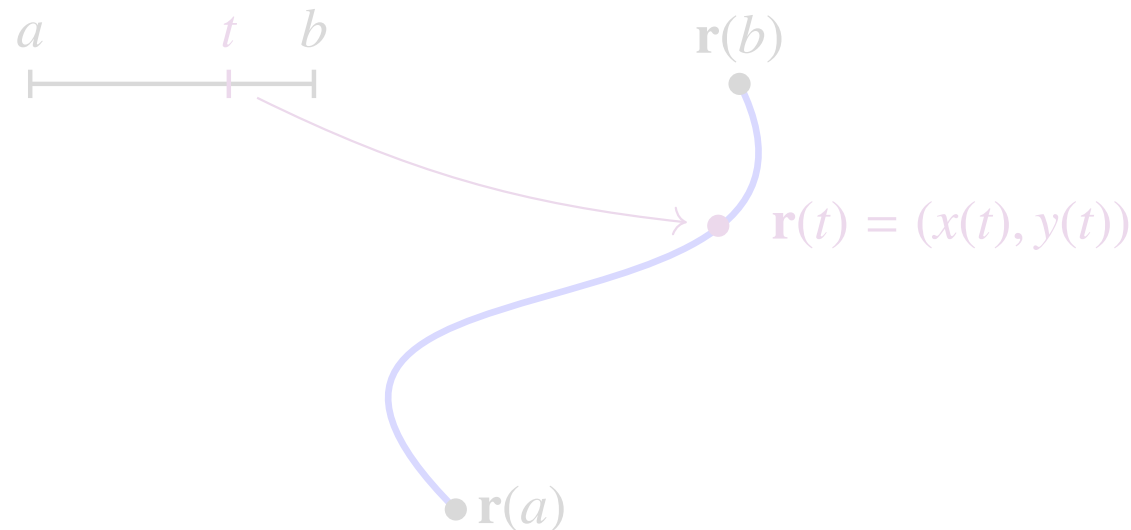
- Az $r(t) = (x(t), y(t))$ függvény a síkban mozgó részecske **helyvektora**.

Paraméteres görbék a síkban

- A sík egy P pontját két valós számmal, az x és y **koordinátaival** adhatjuk meg: $P = (x, y)$.
- A **síkban mozgó részecske** helyét időben változó koordinátákkal adhatjuk meg:

$$P(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b],$$

- ahol $a \leq t \leq b$, és $x(t)$ és $y(t)$ a részecske t időpontban vett x és y koordinátái.



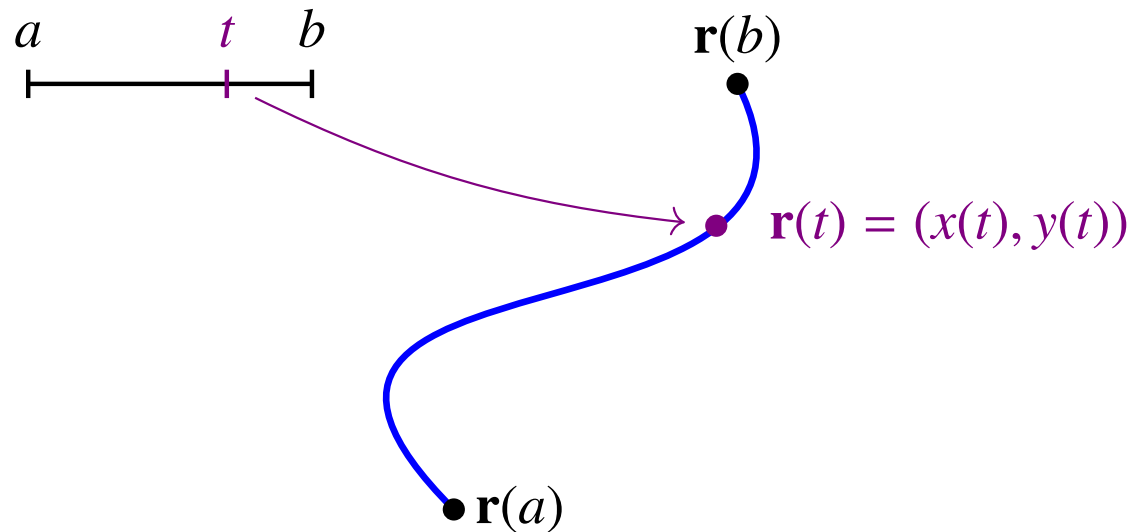
- Az $r(t) = (x(t), y(t))$ függvény a síkban mozgó részecske **helyvektora**.

Paraméteres görbék a síkban

- A sík egy P pontját két valós számmal, az x és y **koordinátáival** adhatjuk meg: $P = (x, y)$.
- A **síkban mozgó részecske** helyét időben változó koordinátákkal adhatjuk meg:

$$P(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b],$$

- ahol $a \leq t \leq b$, és $x(t)$ és $y(t)$ a részecske t **időpontban vett** x és y **koordinátái**.



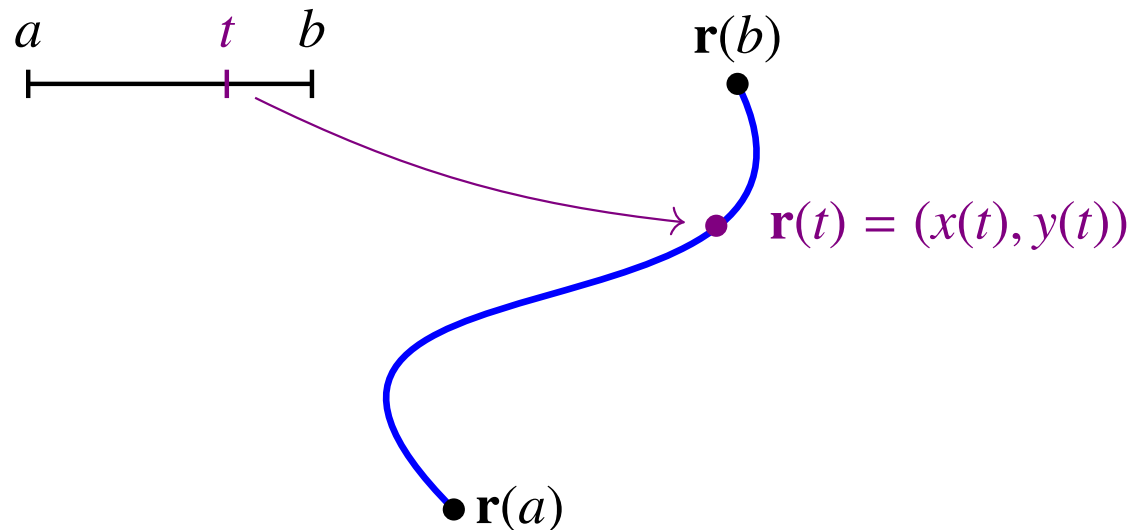
- Az $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ függvény a síkban mozgó részecske **helyvektora**.

Paraméteres görbék a síkban

- A sík egy P pontját két valós számmal, az x és y **koordinátáival** adhatjuk meg: $P = (x, y)$.
- A **síkban mozgó részecske** helyét időben változó koordinátákkal adhatjuk meg:

$$P(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b],$$

- ahol $a \leq t \leq b$, és $x(t)$ és $y(t)$ a részecske t **időpontban vett** x és y **koordinátái**.



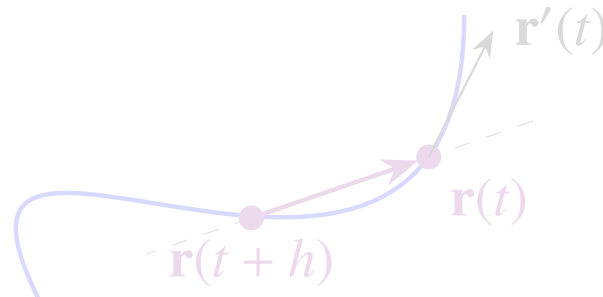
- Az $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ függvény a síkban mozgó részecske **helyvektora**.

A helyvektor és a sebességvektor

- A helyvektor egy t időpontban megmutatja a részecske helyét a síkban.
- A helyvektor időbeli változását a **sebességvektor** adja meg:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \\
 &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \\
 &= (x'(t), y'(t))
 \end{aligned}$$

- A sebességvektor iránya megmutatja, hogy a részecske merre halad, nagysága pedig a sebességét adja meg.

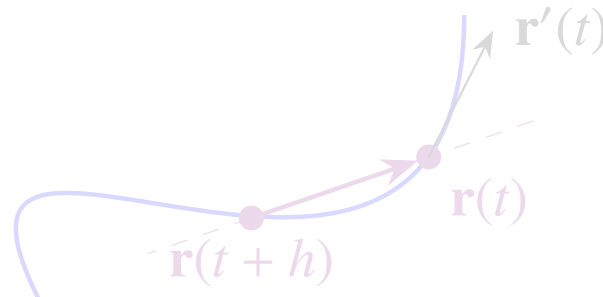


A helyvektor és a sebességvektor

- A helyvektor egy t időpontban megmutatja a részecske helyét a síkban.
- A helyvektor időbeli változását a **sebességvektor** adja meg:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \\
 &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \\
 &= (x'(t), y'(t))
 \end{aligned}$$

- A sebességvektor iránya megmutatja, hogy a részecske merre halad, nagysága pedig a sebességet adja meg.

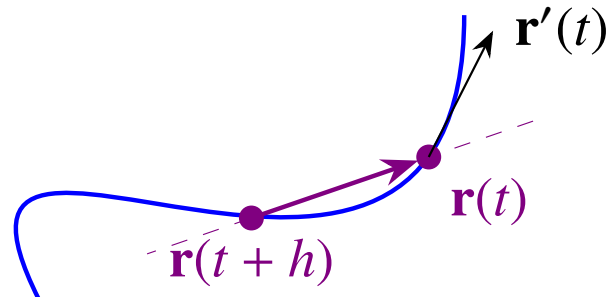


A helyvektor és a sebességvektor

- A helyvektor egy t időpontban megmutatja a részecske helyét a síkban.
- A helyvektor időbeli változását a **sebességvektor** adja meg:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \\
 &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \\
 &= (x'(t), y'(t))
 \end{aligned}$$

- A sebességvektor iránya megmutatja, hogy a részecske merre halad, nagysága pedig a sebességét adja meg.



Egyenes szakasz paraméteres egyenlete

- Az A és B pontokat összekötő egyenes szakasz paraméteres egyenlete:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2))\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ az A és B pontok helyvektorai.

- Ez a paraméteres egyenlet azt jelenti, hogy a részecske az A pontból indulva egyenletesen halad az B pont felé, és $t = 1$ -nél éri el azt.
- A koordináták t elsőfokú függvényei:

$$x(t) = a_1 + t(b_1 - a_1), \quad y(t) = a_2 + t(b_2 - a_2).$$

- A sebességvektor állandó:

$$\mathbf{r}'(t) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Egyenes szakasz paraméteres egyenlete

- Az A és B pontokat összekötő egyenes szakasz paraméteres egyenlete:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2))\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ az A és B pontok helyvektorai.

- Ez a paraméteres egyenlet azt jelenti, hogy **a részecske az A pontból indulva egyenletesen halad az B pont felé, és $t = 1$ -nél éri el azt.**
- A koordináták t elsőfokú függvényei:

$$x(t) = a_1 + t(b_1 - a_1), \quad y(t) = a_2 + t(b_2 - a_2).$$

- A sebességvektor állandó:

$$\mathbf{r}'(t) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Egyenes szakasz paraméteres egyenlete

- Az A és B pontokat összekötő egyenes szakasz paraméteres egyenlete:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2))\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ az A és B pontok helyvektorai.

- Ez a paraméteres egyenlet azt jelenti, hogy **a részecske az A pontból indulva egyenletesen halad az B pont felé**, és $t = 1$ -nél éri el azt.
- A koordináták t elsőfokú függvényei:

$$x(t) = a_1 + t(b_1 - a_1), \quad y(t) = a_2 + t(b_2 - a_2).$$

- A sebességvektor állandó:

$$\mathbf{r}'(t) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Egyenes szakasz paraméteres egyenlete

- Az A és B pontokat összekötő egyenes szakasz paraméteres egyenlete:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2))\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ az A és B pontok helyvektorai.

- Ez a paraméteres egyenlet azt jelenti, hogy **a részecske az A pontból indulva egyenletesen halad az B pont felé**, és $t = 1$ -nél éri el azt.
- A koordináták t elsőfokú függvényei:

$$x(t) = a_1 + t(b_1 - a_1), \quad y(t) = a_2 + t(b_2 - a_2).$$

- A sebességvektor állandó:

$$\mathbf{r}'(t) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

A kör paraméteres egyenlete

- Az O középpontú, r sugarú kör paraméteres egyenlete:

$$\mathbf{r}(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- Ez azt jelenti, hogy a részecske az O középpontból indulva egyenletesen halad a körvonalon, és $t = 2\pi$ -nál éri el újra a kiindulási pontot.
- A sebességvektor:

$$\mathbf{r}'(t) = (-r \sin t, r \cos t).$$

- A sebességvektor iránya mindig merőleges a helyvektorra, ami azt jelenti, hogy a részecske mindig érintő irányban halad a körvonalon.
- A sebesség nagysága állandó:

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r.$$

A kör paraméteres egyenlete

- Az O középpontú, r sugarú kör paraméteres egyenlete:

$$\mathbf{r}(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- Ez azt jelenti, hogy a részecske az O középpontból indulva egyenletesen halad a körvonalon, és $t = 2\pi$ -nál éri el újra a kiindulási pontot.

- A sebességvektor:

$$\mathbf{r}'(t) = (-r \sin t, r \cos t).$$

- A sebességvektor iránya mindig merőleges a helyvektorra, ami azt jelenti, hogy a részecske mindig érintő irányban halad a körvonalon.
- A sebesség nagysága állandó:

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r.$$

A kör paraméteres egyenlete

- Az O középpontú, r sugarú kör paraméteres egyenlete:

$$\mathbf{r}(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- Ez azt jelenti, hogy a részecske az O középpontból indulva egyenletesen halad a körvonalon, és $t = 2\pi$ -nál éri el újra a kiindulási pontot.
- A sebességvektor:

$$\mathbf{r}'(t) = (-r \sin t, r \cos t).$$

- A sebességvektor iránya mindig merőleges a helyvektorra, ami azt jelenti, hogy a részecske mindig érintő irányban halad a körvonalon.
- A sebesség nagysága állandó:

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r.$$

A kör paraméteres egyenlete

- Az O középpontú, r sugarú kör paraméteres egyenlete:

$$\mathbf{r}(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- Ez azt jelenti, hogy a részecske az O középpontból indulva egyenletesen halad a körvonalon, és $t = 2\pi$ -nál éri el újra a kiindulási pontot.
- A sebességvektor:

$$\mathbf{r}'(t) = (-r \sin t, r \cos t).$$

- A **sebességvektor iránya mindig merőleges a helyvektorra**, ami azt jelenti, hogy a részecske mindig érintő irányban halad a körvonalon.
- A **sebesség nagysága állandó**:

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r.$$

A kör paraméteres egyenlete

- Az O középpontú, r sugarú kör paraméteres egyenlete:

$$\mathbf{r}(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- Ez azt jelenti, hogy a részecske az O középpontból indulva egyenletesen halad a körvonalon, és $t = 2\pi$ -nál éri el újra a kiindulási pontot.
- A sebességvektor:

$$\mathbf{r}'(t) = (-r \sin t, r \cos t).$$

- A **sebességvektor iránya mindig merőleges a helyvektorra**, ami azt jelenti, hogy a részecske mindig érintő irányban halad a körvonalon.
- A **sebesség nagysága állandó**:

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} = r.$$

A szabadon eső test pályája

- Legyen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ egy test helyvektora, amely szabadon esik a földre, azaz csak a gravitáció hat rá.

- A gravitációs gyorsulás g lefelé mutat, így a test gyorsulása

$$\mathbf{a}(t) = (0, -g).$$

- A gyorsulás a sebesség deriváltja, így a sebességvektor:

$$\mathbf{v}(t) = (c_1, -gt + c_2)$$

valamilyen c_1 és c_2 konstansokkal.

- A sebesség a helyvektor deriváltja, így a helyvektor:

$$\mathbf{r}(t) = \left(c_1 t + c_3, -\frac{1}{2}gt^2 + c_2 t + c_4 \right)$$

valamilyen c_3 és c_4 konstansokkal.

- A konstansokat a test kezdeti helye és sebessége határozza meg.
- A test pályája egy lefelé nyíló parabola lesz.

A szabadon eső test pályája

- Legyen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ egy test helyvektora, amely szabadon esik a földre, azaz csak a gravitáció hat rá.
- A gravitációs gyorsulás g lefelé mutat, így a test gyorsulása

$$\mathbf{a}(t) = (0, -g).$$

- A gyorsulás a sebesség deriváltja, így a sebességvektor:

$$\mathbf{v}(t) = (c_1, -gt + c_2)$$

valamilyen c_1 és c_2 konstansokkal.

- A sebesség a helyvektor deriváltja, így a helyvektor:

$$\mathbf{r}(t) = \left(c_1 t + c_3, -\frac{1}{2}gt^2 + c_2 t + c_4 \right)$$

valamilyen c_3 és c_4 konstansokkal.

- A konstansokat a test kezdeti helye és sebessége határozza meg.
- A test pályája egy lefelé nyíló parabola lesz.

A szabadon eső test pályája

- Legyen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ egy test helyvektora, amely szabadon esik a földre, azaz csak a gravitáció hat rá.
- A gravitációs gyorsulás g lefelé mutat, így a test gyorsulása

$$\mathbf{a}(t) = (0, -g).$$

- A gyorsulás a sebesség deriváltja, így a sebességvektor:

$$\mathbf{v}(t) = (c_1, -gt + c_2)$$

valamilyen c_1 és c_2 konstansokkal.

- A sebesség a helyvektor deriváltja, így a helyvektor:

$$\mathbf{r}(t) = \left(c_1 t + c_3, -\frac{1}{2}gt^2 + c_2 t + c_4 \right)$$

valamilyen c_3 és c_4 konstansokkal.

- A konstansokat a test kezdeti helye és sebessége határozza meg.
- A test pályája egy lefelé nyíló parabola lesz.

A szabadon eső test pályája

- Legyen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ egy test helyvektora, amely szabadon esik a földre, azaz csak a gravitáció hat rá.
- A gravitációs gyorsulás g lefelé mutat, így a test gyorsulása

$$\mathbf{a}(t) = (0, -g).$$

- A gyorsulás a sebesség deriváltja, így a sebességvektor:

$$\mathbf{v}(t) = (c_1, -gt + c_2)$$

valamilyen c_1 és c_2 konstansokkal.

- A sebesség a helyvektor deriváltja, így a helyvektor:

$$\mathbf{r}(t) = \left(c_1 t + c_3, -\frac{1}{2}gt^2 + c_2 t + c_4 \right)$$

valamilyen c_3 és c_4 konstansokkal.

- A konstansokat a test kezdeti helye és sebessége határozza meg.
- A test pályája egy lefelé nyíló parabola lesz.

A szabadon eső test pályája

- Legyen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ egy test helyvektora, amely szabadon esik a földre, azaz csak a gravitáció hat rá.
- A gravitációs gyorsulás g lefelé mutat, így a test gyorsulása

$$\mathbf{a}(t) = (0, -g).$$

- A gyorsulás a sebesség deriváltja, így a sebességvektor:

$$\mathbf{v}(t) = (c_1, -gt + c_2)$$

valamilyen c_1 és c_2 konstansokkal.

- A sebesség a helyvektor deriváltja, így a helyvektor:

$$\mathbf{r}(t) = \left(c_1 t + c_3, -\frac{1}{2}gt^2 + c_2 t + c_4 \right)$$

valamilyen c_3 és c_4 konstansokkal.

- A konstansokat a test kezdeti helye és sebessége határozza meg.
- A test pályája egy lefelé nyíló parabola lesz.

A szabadon eső test pályája

- Legyen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ egy test helyvektora, amely szabadon esik a földre, azaz csak a gravitáció hat rá.
- A gravitációs gyorsulás g lefelé mutat, így a test gyorsulása

$$\mathbf{a}(t) = (0, -g).$$

- A gyorsulás a sebesség deriváltja, így a sebességvektor:

$$\mathbf{v}(t) = (c_1, -gt + c_2)$$

valamilyen c_1 és c_2 konstansokkal.

- A sebesség a helyvektor deriváltja, így a helyvektor:

$$\mathbf{r}(t) = \left(c_1 t + c_3, -\frac{1}{2}gt^2 + c_2 t + c_4 \right)$$

valamilyen c_3 és c_4 konstansokkal.

- A konstansokat a test kezdeti helye és sebessége határozza meg.
- A test pályája egy lefelé nyíló parabola lesz.

Tagolás

- 1 A deriváltfüggvény
- 2 Deriválási szabályok
- 3 A derivált mint változási sebesség
- 4 A trigonometrikus függvények deriváltja
- 5 A láncszabály
- 6 Az exponenciális függvény és a logaritmus deriváltja
- 7 Paraméteres görbék, részecske mozgása
- 8 Implicit függvény deriváltja**
- 9 Linearizáció és differenciálok

Görbe megadása implicit egyenlettel

- Egy görbe megadható **implicit egyenlettel** is.
- Ennek nullára rendezett általános alakja

$$F(x, y) = 0.$$

- Ekkor a görbe azon pontok halmaza a síkban, amelyek kielégítik az $F(x, y) = 0$ egyenletet.
- Például az egyenes implicit egyenlete

$$ax + by + c = 0,$$

ahol $(a, b) \neq (0, 0)$ az egyenes **normálvektora**.

- A kör általános egyenlete szintén implicit egyenlet:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Implicit egyenletű görbe meredeksége

- Tekintsük az alábbi görbét:



- Implicit egyenlet:

$$y^2 - x^3 - x^2 = 0.$$

- Keressük a görbe meredekségét egy (x, y) pontjában!

- **Trükk:** Csináljunk úgy, mintha y egy x -től függő változó lenne:

$$y(x)^2 = x^3 + x^2.$$

- Deriváljuk mindkét oldalt:

$$2y(x)y'(x) = 3x^2 + 2x.$$

- Innen kifejezhetjük $y'(x)$ -et:

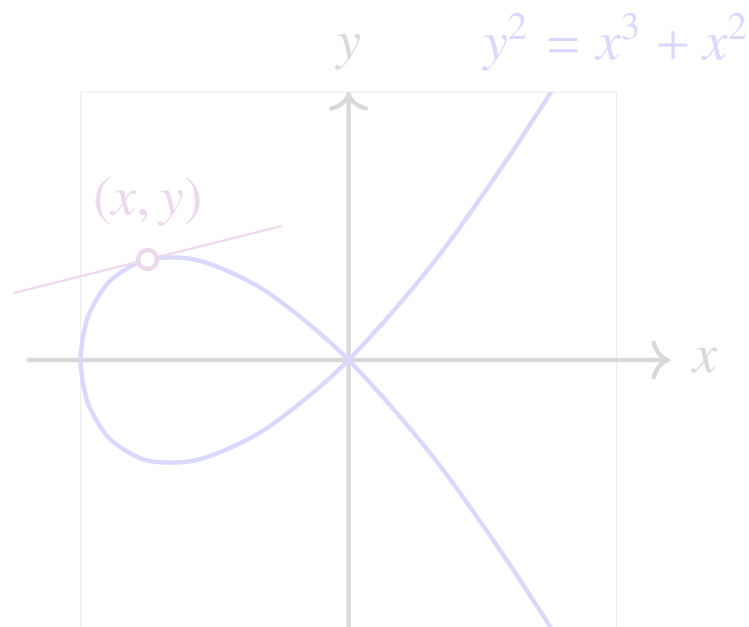
$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}.$$

- A keresett meredekség (x, y) -ben:

$$m = \frac{3x^2 + 2x}{2y}.$$

Implicit egyenletű görbe meredeksége

- Tekintsük az alábbi görbét:



- Implicit egyenlet:

$$y^2 - x^3 - x^2 = 0.$$

- Keressük a görbe meredekségét egy (x, y) pontjában!

- **Trükk:** Csináljunk úgy, mintha y egy x -től függő változó lenne:

$$y(x)^2 = x^3 + x^2.$$

- Deriváljuk mindkét oldalt:

$$2y(x)y'(x) = 3x^2 + 2x.$$

- Innen kifejezhetjük $y'(x)$ -et:

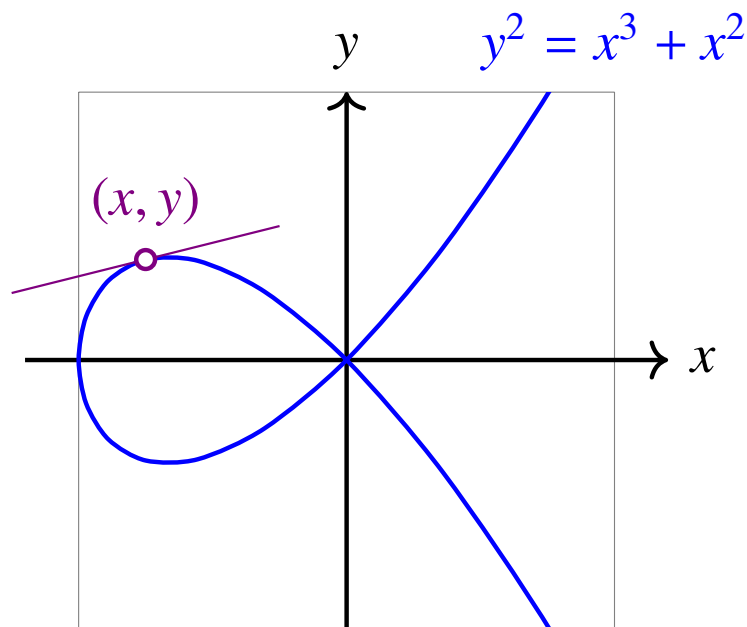
$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}.$$

- A keresett meredekség (x, y) -ben:

$$m = \frac{3x^2 + 2x}{2y}.$$

Implicit egyenletű görbe meredeksége

- Tekintsük az alábbi görbét:



- Implicit egyenlet:

$$y^2 - x^3 - x^2 = 0.$$

- Keressük a görbe meredekségét egy (x, y) pontjában!

- **Trükk:** Csináljunk úgy, mintha y egy x -től függő változó lenne:

$$y(x)^2 = x^3 + x^2.$$

- Deriváljuk mindkét oldalt:

$$2y(x)y'(x) = 3x^2 + 2x.$$

- Innen kifejezhetjük $y'(x)$ -et:

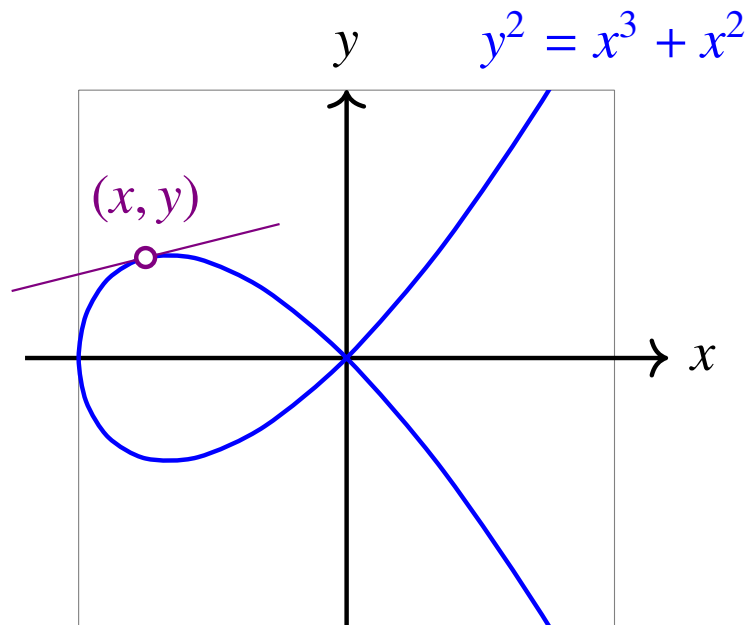
$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}.$$

- A keresett meredekség (x, y) -ben:

$$m = \frac{3x^2 + 2x}{2y}.$$

Implicit egyenletű görbe meredeksége

- Tekintsük az alábbi görbét:



- Implicit egyenlet:

$$y^2 - x^3 - x^2 = 0.$$

- Keressük a görbe meredekségét egy (x, y) pontjában!

- **Trükk:** Csináljunk úgy, mintha y egy x -től függő változó lenne:

$$y(x)^2 = x^3 + x^2.$$

- Deriváljuk mindkét oldalt:

$$2y(x)y'(x) = 3x^2 + 2x.$$

- Innen kifejezhetjük $y'(x)$ -et:

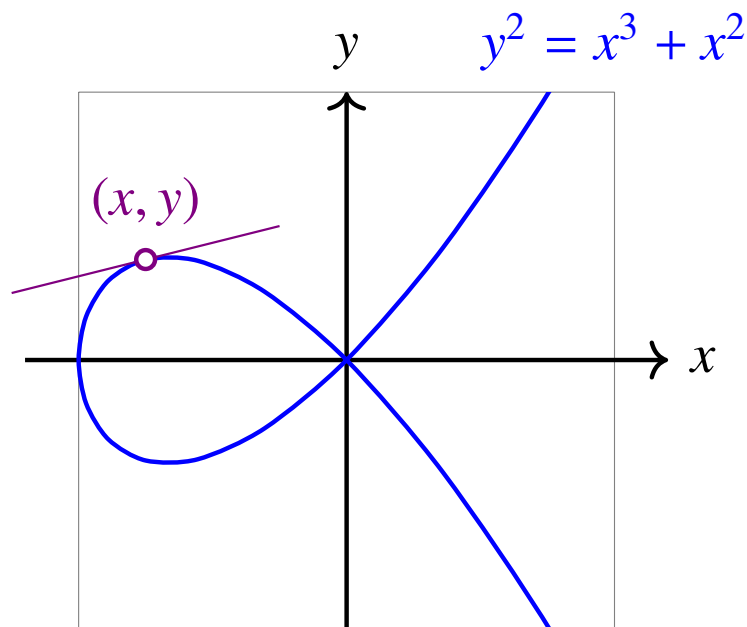
$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}.$$

- A keresett meredekség (x, y) -ben:

$$m = \frac{3x^2 + 2x}{2y}.$$

Implicit egyenletű görbe meredeksége

- Tekintsük az alábbi görbét:



- Implicit egyenlet:

$$y^2 - x^3 - x^2 = 0.$$

- **Keressük a görbe meredekségét egy (x, y) pontjában!**

- **Trükk:** Csináljunk úgy, mintha y egy x -től függő változó lenne:

$$y(x)^2 = x^3 + x^2.$$

- Deriváljuk mindkét oldalt:

$$2y(x)y'(x) = 3x^2 + 2x.$$

- Innen kifejezhetjük $y'(x)$ -et:

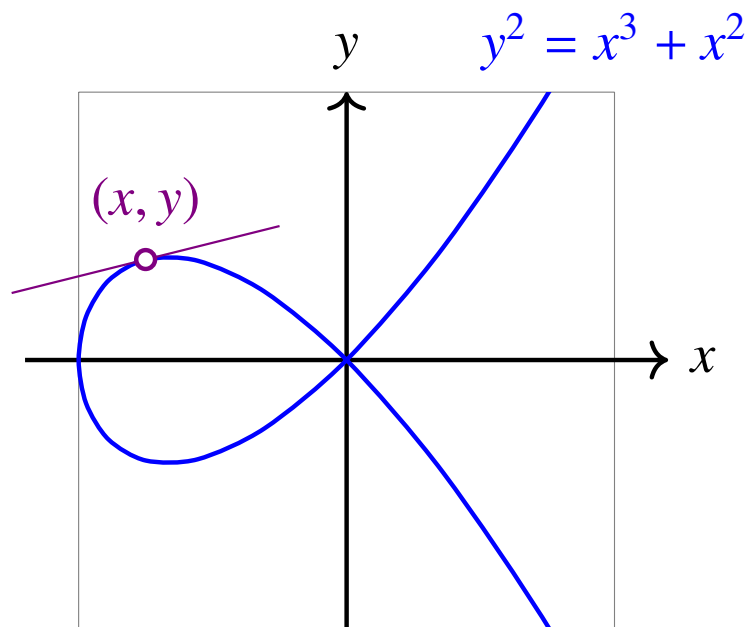
$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}.$$

- A keresett meredekség (x, y) -ben:

$$m = \frac{3x^2 + 2x}{2y}.$$

Implicit egyenletű görbe meredeksége

- Tekintsük az alábbi görbét:



- Implicit egyenlet:

$$y^2 - x^3 - x^2 = 0.$$

- **Keressük a görbe meredekségét egy (x, y) pontjában!**

- **Trükk:** Csináljunk úgy, mintha y egy x -től függő változó lenne:

$$y(x)^2 = x^3 + x^2.$$

- Deriváljuk mindkét oldalt:

$$2y(x)y'(x) = 3x^2 + 2x.$$

- Innen kifejezhetjük $y'(x)$ -et:

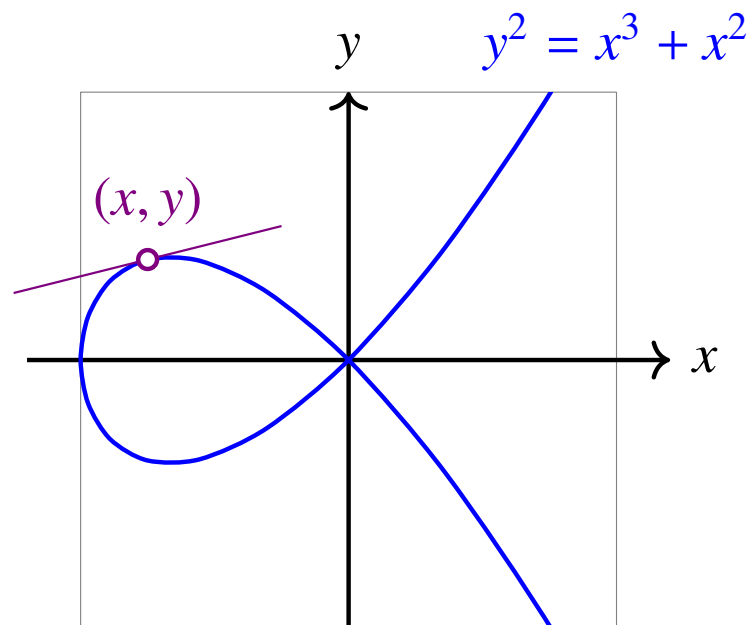
$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}.$$

- A keresett meredekség (x, y) -ben:

$$m = \frac{3x^2 + 2x}{2y}.$$

Implicit egyenletű görbe meredeksége

- Tekintsük az alábbi görbét:



- Implicit egyenlet:

$$y^2 - x^3 - x^2 = 0.$$

- **Keressük a görbe meredekségét egy (x, y) pontjában!**

- **Trükk:** Csináljunk úgy, mintha y egy x -től függő változó lenne:

$$y(x)^2 = x^3 + x^2.$$

- Deriváljuk mindkét oldalt:

$$2y(x)y'(x) = 3x^2 + 2x.$$

- Innen kifejezhetjük $y'(x)$ -et:

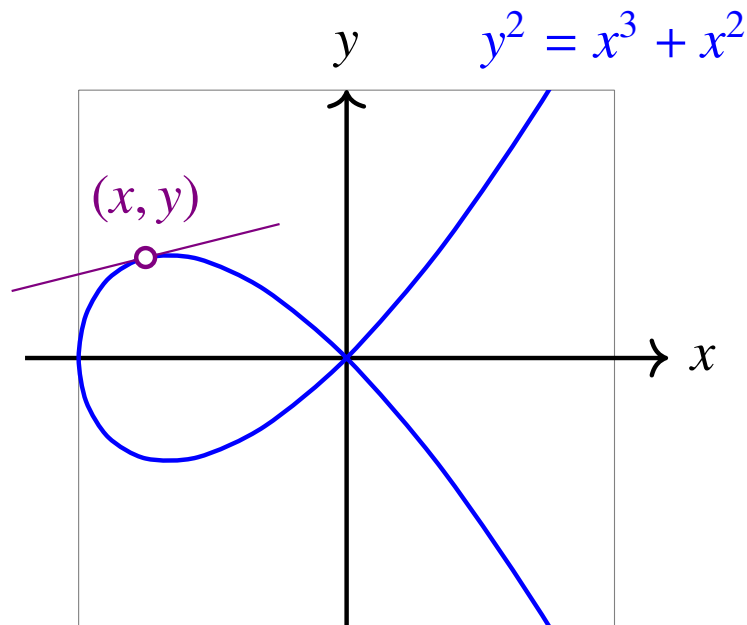
$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}.$$

- A keresett meredekség (x, y) -ben:

$$m = \frac{3x^2 + 2x}{2y}.$$

Implicit egyenletű görbe meredeksége

- Tekintsük az alábbi görbét:



- Implicit egyenlet:

$$y^2 - x^3 - x^2 = 0.$$

- **Keressük a görbe meredekségét egy (x, y) pontjában!**

- **Trükk:** Csináljunk úgy, mintha y egy x -től függő változó lenne:

$$y(x)^2 = x^3 + x^2.$$

- Deriváljuk mindkét oldalt:

$$2y(x)y'(x) = 3x^2 + 2x.$$

- Innen kifejezhetjük $y'(x)$ -et:

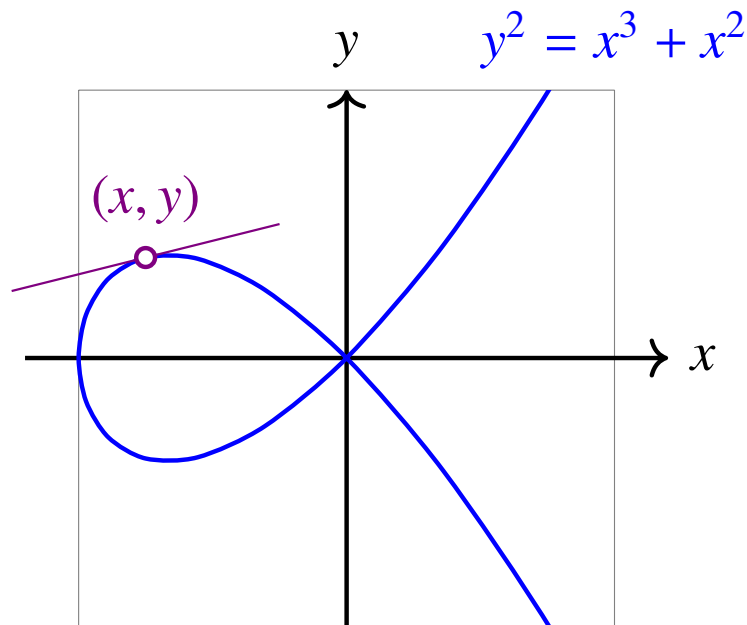
$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}.$$

- A keresett meredekség (x, y) -ben:

$$m = \frac{3x^2 + 2x}{2y}.$$

Implicit egyenletű görbe meredeksége

- Tekintsük az alábbi görbét:



- Implicit egyenlet:

$$y^2 - x^3 - x^2 = 0.$$

- **Keressük a görbe meredekségét egy (x, y) pontjában!**

- **Trükk:** Csináljunk úgy, mintha y egy x -től függő változó lenne:

$$y(x)^2 = x^3 + x^2.$$

- Deriváljuk mindkét oldalt:

$$2y(x)y'(x) = 3x^2 + 2x.$$

- Innen kifejezhetjük $y'(x)$ -et:

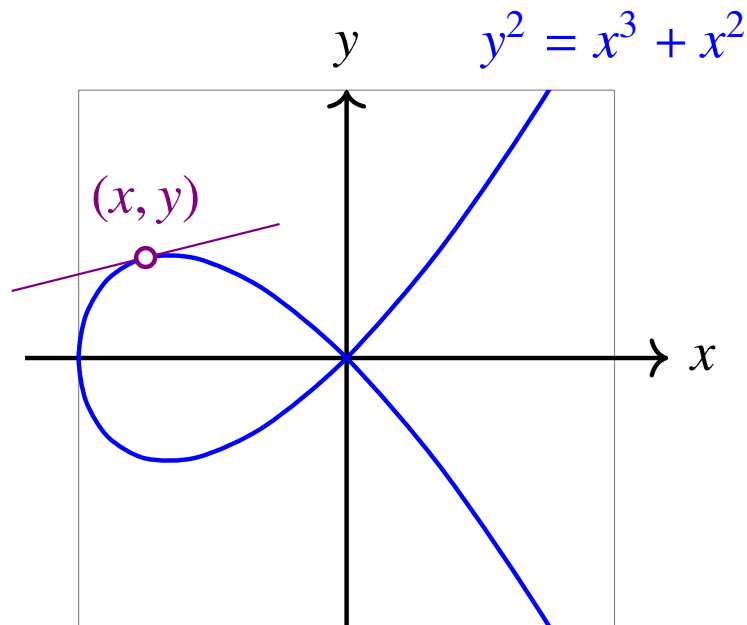
$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}.$$

- A keresett meredekség (x, y) -ben:

$$m = \frac{3x^2 + 2x}{2y}.$$

Implicit egyenletű görbe meredeksége

- Tekintsük az alábbi görbét:



- Implicit egyenlet:

$$y^2 - x^3 - x^2 = 0.$$

- **Keressük a görbe meredekségét egy (x, y) pontjában!**

- **Trükk:** Csináljunk úgy, mintha y egy x -től függő változó lenne:

$$y(x)^2 = x^3 + x^2.$$

- Deriváljuk mindkét oldalt:

$$2y(x)y'(x) = 3x^2 + 2x.$$

- Innen kifejezhetjük $y'(x)$ -et:

$$y'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2y(x)}.$$

- A keresett meredekség (x, y) -ben:

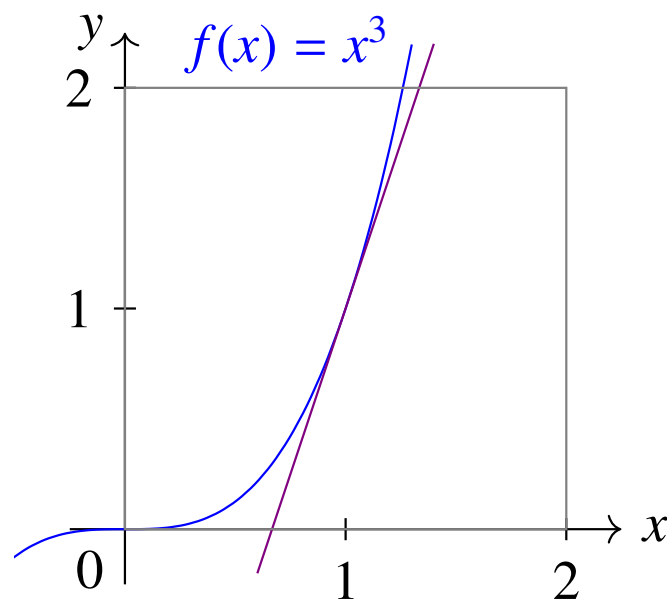
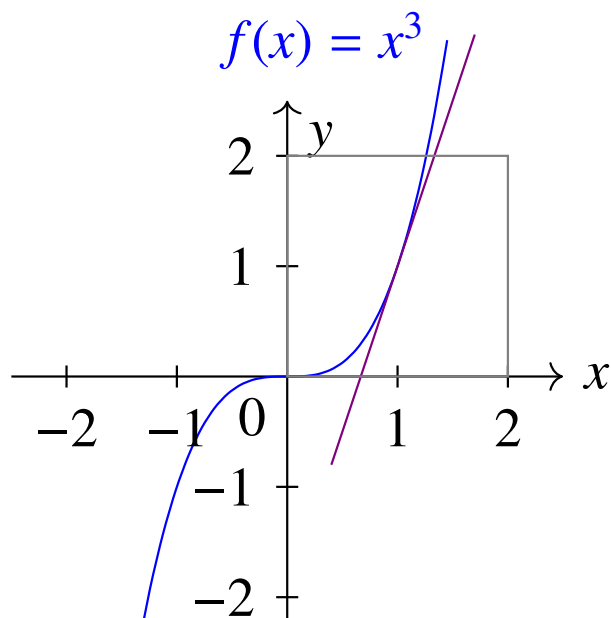
$$m = \frac{3x^2 + 2x}{2y}.$$

Tagolás

- 1 A deriváltfüggvény
- 2 Deriválási szabályok
- 3 A derivált mint változási sebesség
- 4 A trigonometrikus függvények deriváltja
- 5 A láncszabály
- 6 Az exponenciális függvény és a logaritmus deriváltja
- 7 Paraméteres görbék, részecske mozgása
- 8 Implicit függvény deriváltja
- 9 **Linearizáció és differenciálok**

Linearizáció

- Ha a függvény grafikonját egyre jobban **kinagyítjuk**, azt látjuk, hogy a görbe egyre inkább kisimul, egyre jobban **közelít érintőjéhez**.



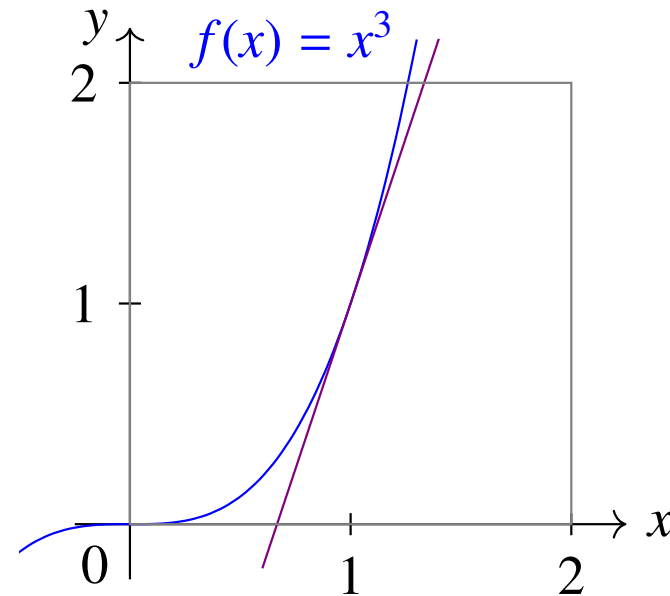
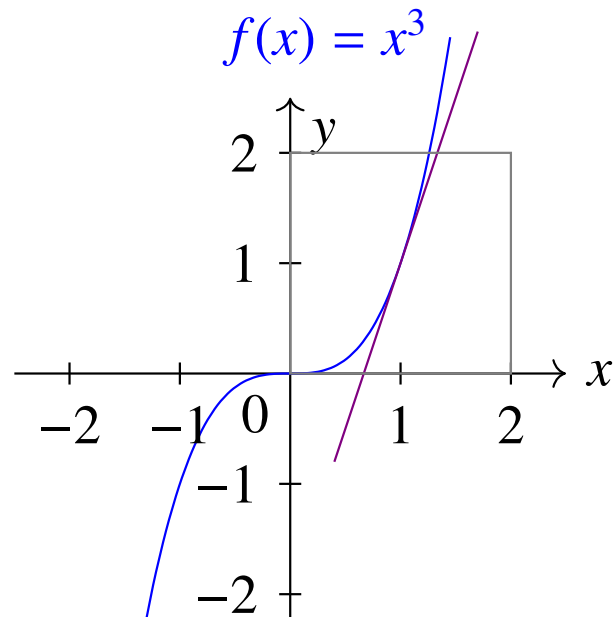
Definíció: Linearizáció, lineáris közelítés

Az f differenciálható függvény **linearizációja** az a pontban:

$$L_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \quad [\text{Jelölés: } L_a(x) \approx f(x)]$$

Linearizáció

- Ha a függvény grafikonját egyre jobban **kinagyítjuk**, azt látjuk, hogy a görbe egyre inkább kisimul, egyre jobban **közelít érintőjéhez**.



Definíció: Linearizáció, lineáris közelítés

Az f differenciálható függvény **linearizációja** az a pontban:

$$L_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \quad [\text{Jelölés: } L_a(x) \approx f(x)]$$

Linearizáció példa: $(1 + x)^n$

- Legyen $n \neq 0$ egész és

$$f(x) = (1 + x)^n.$$

- Közelítsük $f(x)$ -et lineáris függvénnyel 0-hoz közeli x értékekre.
- Más szóval, keressük $L_0(x)$ -t, azaz a linearizációt az $a = 0$ pontban.
- Nyilván $f(0) = (1 + 0)^n = 1$, és $f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$, így $f'(0) = n$.
- Tehát a linearizáció az $a = 0$ pontban:

$$L_0(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + nx.$$

- Nem csak egész n -re működik:

x	$(1 + x)^3$	$1 + 3x$	$\sqrt{1 + x}$	$1 + \frac{1}{2}x$
0.005	1.015075	1.015	1.002497	1.0025
0.010	1.030301	1.030	1.004988	1.0050
0.015	1.045678	1.045	1.007472	1.0075
0.200	1.728000	1.600	1.095445	1.1000
0.250	1.953125	1.750	1.118034	1.1250

Linearizáció példa: $(1 + x)^n$

- Legyen $n \neq 0$ egész és

$$f(x) = (1 + x)^n.$$

- Közelítsük $f(x)$ -et **lineáris függvény** **0-hoz közeli x értékekre**.
- Más szóval, keressük $L_0(x)$ -t, azaz a linearizációt az $a = 0$ pontban.
- Nyilván $f(0) = (1 + 0)^n = 1$, és $f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$, így $f'(0) = n$.
- Tehát a linearizáció az $a = 0$ pontban:

$$L_0(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + nx.$$

- Nem csak egész n -re működik:

x	$(1 + x)^3$	$1 + 3x$	$\sqrt{1 + x}$	$1 + \frac{1}{2}x$
0.005	1.015075	1.015	1.002497	1.0025
0.010	1.030301	1.030	1.004988	1.0050
0.015	1.045678	1.045	1.007472	1.0075
0.200	1.728000	1.600	1.095445	1.1000
0.250	1.953125	1.750	1.118034	1.1250

Linearizáció példa: $(1 + x)^n$

- Legyen $n \neq 0$ egész és

$$f(x) = (1 + x)^n.$$

- Közelítsük $f(x)$ -et **lineáris függvénnyel 0-hoz közeli x értékekre.**
- Más szóval, keressük $L_0(x)$ -t, azaz a linearizációt az $a = 0$ pontban.
- Nyilván $f(0) = (1 + 0)^n = 1$, és $f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$, így $f'(0) = n$.
- Tehát a linearizáció az $a = 0$ pontban:

$$L_0(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + nx.$$

- Nem csak egész n -re működik:

x	$(1 + x)^3$	$1 + 3x$	$\sqrt{1 + x}$	$1 + \frac{1}{2}x$
0.005	1.015075	1.015	1.002497	1.0025
0.010	1.030301	1.030	1.004988	1.0050
0.015	1.045678	1.045	1.007472	1.0075
0.200	1.728000	1.600	1.095445	1.1000
0.250	1.953125	1.750	1.118034	1.1250

Linearizáció példa: $(1 + x)^n$

- Legyen $n \neq 0$ egész és

$$f(x) = (1 + x)^n.$$

- Közelítsük $f(x)$ -et **lineáris függvénnyel 0-hoz közeli x értékekre.**
- Más szóval, keressük $L_0(x)$ -t, azaz a linearizációt az $a = 0$ pontban.
- Nyilván $f(0) = (1 + 0)^n = 1$, és $f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$, így $f'(0) = n$.
- Tehát a linearizáció az $a = 0$ pontban:

$$L_0(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + nx.$$

- Nem csak egész n -re működik:

x	$(1 + x)^3$	$1 + 3x$	$\sqrt{1 + x}$	$1 + \frac{1}{2}x$
0.005	1.015075	1.015	1.002497	1.0025
0.010	1.030301	1.030	1.004988	1.0050
0.015	1.045678	1.045	1.007472	1.0075
0.200	1.728000	1.600	1.095445	1.1000
0.250	1.953125	1.750	1.118034	1.1250

Linearizáció példa: $(1 + x)^n$

- Legyen $n \neq 0$ egész és

$$f(x) = (1 + x)^n.$$

- Közelítsük $f(x)$ -et **lineáris függvénnyel 0-hoz közeli x értékekre.**
- Más szóval, keressük $L_0(x)$ -t, azaz a linearizációt az $a = 0$ pontban.
- Nyilván $f(0) = (1 + 0)^n = 1$, és $f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$, így $f'(0) = n$.
- Tehát a linearizáció az $a = 0$ pontban:

$$L_0(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + nx.$$

- Nem csak egész n -re működik:

x	$(1 + x)^3$	$1 + 3x$	$\sqrt{1 + x}$	$1 + \frac{1}{2}x$
0.005	1.015075	1.015	1.002497	1.0025
0.010	1.030301	1.030	1.004988	1.0050
0.015	1.045678	1.045	1.007472	1.0075
0.200	1.728000	1.600	1.095445	1.1000
0.250	1.953125	1.750	1.118034	1.1250

Linearizáció példa: $(1 + x)^n$

- Legyen $n \neq 0$ egész és

$$f(x) = (1 + x)^n.$$

- Közelítsük $f(x)$ -et **lineáris függvénnyel 0-hoz közeli x értékekre.**
- Más szóval, keressük $L_0(x)$ -t, azaz a linearizációt az $a = 0$ pontban.
- Nyilván $f(0) = (1 + 0)^n = 1$, és $f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$, így $f'(0) = n$.
- Tehát a linearizáció az $a = 0$ pontban:

$$L_0(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + nx.$$

- Nem csak egész n -re működik:

x	$(1 + x)^3$	$1 + 3x$	$\sqrt{1 + x}$	$1 + \frac{1}{2}x$
0.005	1.015075	1.015	1.002497	1.0025
0.010	1.030301	1.030	1.004988	1.0050
0.015	1.045678	1.045	1.007472	1.0075
0.200	1.728000	1.600	1.095445	1.1000
0.250	1.953125	1.750	1.118034	1.1250

Differenciálok

- Az $y = y(x)$ függvény x szerinti deriváltjára szokás néha a Leibniz-féle

$$\frac{dy}{dx}$$

jelölést is használni.

- A látszattal ellentétben dy/dx nem igazi tört.
- Most bevezetünk **két új változót**, dx -et és dy -t, azzal a tulajdonsággal, hogy létezik a hányadosuk és az egyenlő y deriváltjával.

Definíció: Differenciál

Legyen $y = f(x)$ egy differenciálható függvény. A dx differenciál egy **független változó**, a dy differenciál pedig

$$dy = f'(x)dx.$$

Példa: Keressük meg dy -t, ha $y = x^5 + 37x$

$$dy = f'(x)dx = (5x^4 + 37)dx.$$

Differenciálok

- Az $y = y(x)$ függvény x szerinti deriváltjára szokás néha a Leibniz-féle

$$\frac{dy}{dx}$$

jelölést is használni.

- A látszattal ellentétben dy/dx nem igazi tört.
- Most bevezetünk két új változót, dx -et és dy -t, azzal a tulajdonsággal, hogy létezik a hányadosuk és az egyenlő y deriváltjával.

Definíció: Differenciál

Legyen $y = f(x)$ egy differenciálható függvény. A dx differenciál egy független változó, a dy differenciál pedig

$$dy = f'(x)dx.$$

Példa: Keressük meg dy -t, ha $y = x^5 + 37x$

$$dy = f'(x)dx = (5x^4 + 37)dx.$$

Differenciálok

- Az $y = y(x)$ függvény x szerinti deriváltjára szokás néha a Leibniz-féle

$$\frac{dy}{dx}$$

jelölést is használni.

- A látszattal ellentétben dy/dx nem igazi tört.
- Most bevezetünk **két új változót**, dx -et és dy -t, azzal a tulajdonsággal, hogy létezik a hányadosuk és az egyenlő y deriváltjával.

Definíció: Differenciál

Legyen $y = f(x)$ egy differenciálható függvény. A dx differenciál egy független változó, a dy differenciál pedig

$$dy = f'(x)dx.$$

Példa: Keressük meg dy -t, ha $y = x^5 + 37x$

$$dy = f'(x)dx = (5x^4 + 37)dx.$$

Differenciálok

- Az $y = y(x)$ függvény x szerinti deriváltjára szokás néha a Leibniz-féle

$$\frac{dy}{dx}$$

jelölést is használni.

- A látszattal ellentétben dy/dx nem igazi tört.
- Most bevezetünk **két új változót**, dx -et és dy -t, azzal a tulajdonsággal, hogy létezik a hányadosuk és az egyenlő y deriváltjával.

Definíció: Differenciál

Legyen $y = f(x)$ egy differenciálható függvény. A **dx differenciál egy független változó**, a **dy differenciál** pedig

$$dy = f'(x)dx.$$

Példa: Keressük meg dy -t, ha $y = x^5 + 37x$

$$dy = f'(x)dx = (5x^4 + 37)dx.$$

Differenciálok

- Az $y = y(x)$ függvény x szerinti deriváltjára szokás néha a Leibniz-féle

$$\frac{dy}{dx}$$

jelölést is használni.

- A látszattal ellentétben dy/dx nem igazi tört.
- Most bevezetünk **két új változót**, dx -et és dy -t, azzal a tulajdonsággal, hogy létezik a hányadosuk és az egyenlő y deriváltjával.

Definíció: Differenciál

Legyen $y = f(x)$ egy differenciálható függvény. A dx differenciál egy **független változó**, a dy differenciál pedig

$$dy = f'(x)dx.$$

Példa: Keressük meg dy -t, ha $y = x^5 + 37x$

$$dy = f'(x)dx = (5x^4 + 37)dx.$$

Függvény differenciálja

- A dy differenciál értelmezhető úgy is, mint a y függvény **változása** egy dx változás hatására.
- Ez a változás megközelítőleg egyenlő a f függvény linearizációjának változásával, azaz

$$dy = f'(x)dx \approx L_a(x + dx) - L_a(x) = f'(a)dx.$$

Definíció: Függvény differenciálja

Legyen $y = f(x)$ egy differenciálható függvény. A **függvény differenciálja** a dy -vel vagy df -fel jelölt y változás:

$$df = f'(x)dx.$$

Példa: Keressük meg df -et, ha $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$

$$df = f'(x)dx = \sec^2(2x) d(2x) dx = 2 \sec^2(2x) dx.$$

Függvény differenciálja

- A dy differenciál értelmezhető úgy is, mint a y függvény **változása** egy dx változás hatására.
- Ez a változás megközelítőleg egyenlő a f függvény linearizációjának változásával, azaz

$$dy = f'(x)dx \approx L_a(x + dx) - L_a(x) = f'(a)dx.$$

Definíció: Függvény differenciálja

Legyen $y = f(x)$ egy differenciálható függvény. A **függvény differenciálja** a dy -vel vagy df -fel jelölt y változás:

$$df = f'(x)dx.$$

Példa: Keressük meg df -et, ha $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$

$$df = f'(x)dx = \sec^2(2x) d(2x) dx = 2 \sec^2(2x) dx.$$

Függvény differenciálja

- A dy differenciál értelmezhető úgy is, mint a y függvény **változása** egy dx változás hatására.
- Ez a változás megközelítőleg egyenlő a f függvény linearizációjának változásával, azaz

$$dy = f'(x)dx \approx L_a(x + dx) - L_a(x) = f'(a)dx.$$

Definíció: Függvény differenciálja

Legyen $y = f(x)$ egy differenciálható függvény. A **függvény differenciálja** a dy -vel vagy df -fel jelölt y változás:

$$df = f'(x)dx.$$

Példa: Keressük meg df -et, ha $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$

$$df = f'(x)dx = \sec^2(2x) d(2x) dx = 2 \sec^2(2x) dx.$$

Függvény differenciálja

- A dy differenciál értelmezhető úgy is, mint a y függvény **változása** egy dx változás hatására.
- Ez a változás megközelítőleg egyenlő a f függvény linearizációjának változásával, azaz

$$dy = f'(x)dx \approx L_a(x + dx) - L_a(x) = f'(a)dx.$$

Definíció: Függvény differenciálja

Legyen $y = f(x)$ egy differenciálható függvény. A **függvény differenciálja** a dy -vel vagy df -fel jelölt y változás:

$$df = f'(x)dx.$$

Példa: Keressük meg df -et, ha $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$

$$df = f'(x)dx = \sec^2(2x) d(2x) dx = 2 \sec^2(2x) dx.$$

Köszönöm a figyelmet!