

Határérték és folytonosság (2. hét)

Matematika informatikusoknak 2

Nagy Gábor Péter

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

2025/2026-os tanév II. féléve

Tagolás

- 1 A végtelen és a nulla
- 2 Sorozatok
- 3 Sorozatok határértéke
- 4 Függvények folytonossága
- 5 Függvények határértéke
- 6 Görbe érintője

Tagolás

- 1 A végtelen és a nulla
- 2 Sorozatok
- 3 Sorozatok határértéke
- 4 Függvények folytonossága
- 5 Függvények határértéke
- 6 Görbe érintője

A végtelen

A **GALAXIS Útikalauz** stopposoknak a következő értelemben használja a „végtelen” szót.

Definíció: Végtelen

Nagyobb, mint a valaha létezett legnagyobb dolog, továbbá nagyobb sok egyéb dolognál: Nevezetesen, sokkal nagyobb, mint az elképesztően óriási, a baromi nagy és a „Hű, ezt nézd meg, mekkora!”.

A végtelen olyan nagy, hogy hozzá képest a nagyság maga is eltörpül.

Olyasmiről van szó, amit leginkább a gigantikusszor kolosszálszor lélegzetelállítóan hatalmas képzetével tudnánk rzeékelteni.

A kerekítés

Legyenek a, b valós számok, ℓ pedig egy pozitív egész.

- Ha a és b egészrészei megegyeznek, akkor a különbségük legfeljebb 1:

$$|a - b| < 1.$$

- Fordítva, ha a és b különbsége legfeljebb 1, akkor az egészrészeik különbsége is legfeljebb 1.

Tétel

Ha a és b számoknak a tizedesvessző utáni ℓ számjegye megegyezik, akkor különbségük legfeljebb $10^{-\ell}$:

$$|a - b| < \frac{1}{10^\ell}.$$

Fordítva, ha a különbség kisebb, mint $10^{-\ell}$, akkor

- $\ell - 1$ tizedesjegyük megegyezik,
- és az ℓ -dik tizedesjegyek legfeljebb 1-el különböznek.

A kerekítés

Legyenek a, b valós számok, ℓ pedig egy pozitív egész.

- Ha a és b egészrészei megegyeznek, akkor a különbségük legfeljebb 1:

$$|a - b| < 1.$$

- Fordítva, ha a és b különbsége legfeljebb 1, akkor az egészrészeik különbsége is legfeljebb 1.

Tétel

Ha a és b számoknak a tizedesvessző utáni ℓ számjegye megegyezik, akkor különbségük legfeljebb $10^{-\ell}$:

$$|a - b| < \frac{1}{10^{\ell}}.$$

Fordítva, ha a különbség kisebb, mint $10^{-\ell}$, akkor

- $\ell - 1$ tizedesjegyük megegyezik,
- és az ℓ -dik tizedesjegyek legfeljebb 1-el különböznek.

A kerekítés

Legyenek a, b valós számok, ℓ pedig egy pozitív egész.

- Ha a és b egészrészei megegyeznek, akkor a különbségük legfeljebb 1:

$$|a - b| < 1.$$

- Fordítva, ha a és b különbsége legfeljebb 1, akkor az egészrészeik különbsége is legfeljebb 1.

Tétel

Ha a és b számoknak a tizedesvessző utáni ℓ számjegye megegyezik, akkor különbségük legfeljebb $10^{-\ell}$:

$$|a - b| < \frac{1}{10^{\ell}}.$$

Fordítva, ha a különbség kisebb, mint $10^{-\ell}$, akkor

- $\ell - 1$ tizedesjegyük megegyezik,
- és az ℓ -dik tizedesjegyek legfeljebb 1-el különböznek.

A kerekítés

Legyenek a, b valós számok, ℓ pedig egy pozitív egész.

- Ha a és b egészrészei megegyeznek, akkor a különbségük legfeljebb 1:

$$|a - b| < 1.$$

- Fordítva, ha a és b különbsége legfeljebb 1, akkor az egészrészeik különbsége is legfeljebb 1.

Tétel

Ha a és b számoknak a tizedesvessző utáni ℓ számjegye megegyezik, akkor különbségük legfeljebb $10^{-\ell}$:

$$|a - b| < \frac{1}{10^{\ell}}.$$

Fordítva, ha a különbség kisebb, mint $10^{-\ell}$, akkor

- $\ell - 1$ tizedesjegyük megegyezik,
- és az ℓ -dik tizedesjegyek legfeljebb 1-el különböznek.

A kerekítés

Legyenek a, b valós számok, ℓ pedig egy pozitív egész.

- Ha a és b egészrészei megegyeznek, akkor a különbségük legfeljebb 1:

$$|a - b| < 1.$$

- Fordítva, ha a és b különbsége legfeljebb 1, akkor az egészrészeik különbsége is legfeljebb 1.

Tétel

Ha a és b számoknak a tizedesvessző utáni ℓ számjegye megegyezik, akkor különbségük legfeljebb $10^{-\ell}$:

$$|a - b| < \frac{1}{10^{\ell}}.$$

Fordítva, ha a különbség kisebb, mint $10^{-\ell}$, akkor

- $\ell - 1$ tizedesjegyük megegyezik,
- és az ℓ -dik tizedesjegyek legfeljebb 1-el különböznek.

Az epszilon

- A kalkulusban az ε érték mindig egy kicsi, **nullához közeli pozitív értéket** jelöl.

- Gondolhatunk rá, mint

$$\varepsilon = \frac{1}{10^\ell},$$

ahol ℓ nagy pozitív egész.

- Ekkor a

$$|a - b| < \varepsilon$$

azt jelenti, hogy a és b megegyeznek $\ell - 1$ tizedesjegyig, és az ℓ -dik tizedesjegyük is legfeljebb 1-el tér el.

- A "rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot" jelentése: rögzítsünk egy ℓ tizedesjegyes pontosságot.

Az epszilon

- A kalkulusban az ε érték mindig egy kicsi, **nullához közeli pozitív értéket** jelöl.
- Gondolhatunk rá, mint

$$\varepsilon = \frac{1}{10^\ell},$$

ahol ℓ nagy pozitív egész.

- Ekkor a

$$|a - b| < \varepsilon$$

azt jelenti, hogy a és b megegyeznek $\ell - 1$ tizedesjegyig, és az ℓ -dik tizedesjegyük is legfeljebb 1-el tér el.

- A "rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot" jelentése: rögzítsünk egy ℓ tizedesjegyes pontosságot.

Az epszilon

- A kalkulusban az ε érték mindig egy kicsi, **nullához közeli pozitív értéket** jelöl.
- Gondolhatunk rá, mint

$$\varepsilon = \frac{1}{10^\ell},$$

ahol ℓ nagy pozitív egész.

- Ekkor a

$$|a - b| < \varepsilon$$

azt jelenti, hogy a és b megegyeznek $\ell - 1$ tizedesjegyig, és az ℓ -dik tizedesjegyük is legfeljebb 1-el tér el.

- A "rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot" jelentése: rögzítsünk egy ℓ tizedesjegyes pontosságot.

Az epszilon

- A kalkulusban az ε érték mindig egy kicsi, **nullához közeli pozitív értéket** jelöl.
- Gondolhatunk rá, mint

$$\varepsilon = \frac{1}{10^\ell},$$

ahol ℓ nagy pozitív egész.

- Ekkor a

$$|a - b| < \varepsilon$$

azt jelenti, hogy a és b megegyeznek $\ell - 1$ tizedesjegyig, és az ℓ -dik tizedesjegyük is legfeljebb 1-el tér el.

- A "rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot" jelentése: rögzítsünk egy ℓ tizedesjegyes pontosságot.

Tagolás

- 1 A végtelen és a nulla
- 2 Sorozatok**
- 3 Sorozatok határértéke
- 4 Függvények folytonossága
- 5 Függvények határértéke
- 6 Görbe érintője

Sorozatok

Definíció: Sorozat

A kalkulusban **sorozat** alatt valós számok

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

végtelen sorozatát értjük. Jelölés: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, vagy röviden csak (x_n) .

Példák

Megnevezés	Képlet	Kezdő értékek
Konstans sorozat	$x_n = c$	4.2, 4.2, 4.2, ...
Számtani sorozat	$x_n = dn + b$	-1, 1, 3, 5, ...
Mértani sorozat	$x_n = cq^n$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$
Egy-per-en	$x_n = \frac{1}{n}$	1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
Alternáló sorozat	$x_n = (-1)^n$	-1, 1, -1, 1, -1, 1, ...

Sorozatok

Definíció: Sorozat

A kalkulusban **sorozat** alatt valós számok

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

végtelen sorozatát értjük. Jelölés: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, vagy röviden csak (x_n) .

Példák

Megnevezés	Képlet	Kezdő értékek
Konstans sorozat	$x_n = c$	4.2, 4.2, 4.2, ...
Számtani sorozat	$x_n = dn + b$	-1, 1, 3, 5, ...
Mértani sorozat	$x_n = cq^n$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$
Egy-per-en	$x_n = \frac{1}{n}$	1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
Alternáló sorozat	$x_n = (-1)^n$	-1, 1, -1, 1, -1, 1, ...

Műveletek sorozatokkal

Definíció: Műveletek sorozatokkal

Legyenek (x_n) és (y_n) sorozatok, valamint c egy valós szám.

Összeadás: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) = x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots$

Szorzás: $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n) = x_1 y_1, x_2 y_2, \dots$

Skalárral való szorzás: $c \cdot (x_n) = (c \cdot x_n) = cx_1, cx_2, \dots$

Osztás: $\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots$ (ha $y_n \neq 0$ minden n -re)

Példa

Ha $x_n = \frac{1}{n}$ és $y_n = \frac{2}{n}$, akkor

- $x_n + y_n = \frac{3}{n}$
- $x_n \cdot y_n = \frac{2}{n^2}$
- $2 \cdot x_n = \frac{2}{n}$
- $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{2}$ (konstans sorozat)

Műveletek sorozatokkal

Definíció: Műveletek sorozatokkal

Legyenek (x_n) és (y_n) sorozatok, valamint c egy valós szám.

Összeadás: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) = x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots$

Szorzás: $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n) = x_1 y_1, x_2 y_2, \dots$

Skalárral való szorzás: $c \cdot (x_n) = (c \cdot x_n) = cx_1, cx_2, \dots$

Osztás: $\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots$ (ha $y_n \neq 0$ minden n -re)

Példa

Ha $x_n = \frac{1}{n}$ és $y_n = \frac{2}{n}$, akkor

- $x_n + y_n = \frac{3}{n}$
- $x_n \cdot y_n = \frac{2}{n^2}$
- $2 \cdot x_n = \frac{2}{n}$
- $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{2}$ (konstans sorozat)

Műveletek sorozatokkal

Definíció: Műveletek sorozatokkal

Legyenek (x_n) és (y_n) sorozatok, valamint c egy valós szám.

Összeadás: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) = x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots$

Szorzás: $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n) = x_1 y_1, x_2 y_2, \dots$

Skalárral való szorzás: $c \cdot (x_n) = (c \cdot x_n) = cx_1, cx_2, \dots$

Osztás: $\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots$ (ha $y_n \neq 0$ minden n -re)

Példa

Ha $x_n = \frac{1}{n}$ és $y_n = \frac{2}{n}$, akkor

- $x_n + y_n = \frac{3}{n}$
- $x_n \cdot y_n = \frac{2}{n^2}$
- $2 \cdot x_n = \frac{2}{n}$
- $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{2}$ (konstans sorozat)

Műveletek sorozatokkal

Definíció: Műveletek sorozatokkal

Legyenek (x_n) és (y_n) sorozatok, valamint c egy valós szám.

Összeadás: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) = x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots$

Szorzás: $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n) = x_1 y_1, x_2 y_2, \dots$

Skalárral való szorzás: $c \cdot (x_n) = (c \cdot x_n) = cx_1, cx_2, \dots$

Osztás: $\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots$ (ha $y_n \neq 0$ minden n -re)

Példa

Ha $x_n = \frac{1}{n}$ és $y_n = \frac{2}{n}$, akkor

- $x_n + y_n = \frac{3}{n}$
- $x_n \cdot y_n = \frac{2}{n^2}$
- $2 \cdot x_n = \frac{2}{n}$
- $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{2}$ (konstans sorozat)

Műveletek sorozatokkal

Definíció: Műveletek sorozatokkal

Legyenek (x_n) és (y_n) sorozatok, valamint c egy valós szám.

Összeadás: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) = x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots$

Szorzás: $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n) = x_1 y_1, x_2 y_2, \dots$

Skalárral való szorzás: $c \cdot (x_n) = (c \cdot x_n) = cx_1, cx_2, \dots$

Osztás: $\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots$ (ha $y_n \neq 0$ minden n -re)

Példa

Ha $x_n = \frac{1}{n}$ és $y_n = \frac{2}{n}$, akkor

- $x_n + y_n = \frac{3}{n}$
- $x_n \cdot y_n = \frac{2}{n^2}$
- $2 \cdot x_n = \frac{2}{n}$
- $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{2}$ (konstans sorozat)

Műveletek sorozatokkal

Definíció: Műveletek sorozatokkal

Legyenek (x_n) és (y_n) sorozatok, valamint c egy valós szám.

Összeadás: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) = x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots$

Szorzás: $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n) = x_1 y_1, x_2 y_2, \dots$

Skalárral való szorzás: $c \cdot (x_n) = (c \cdot x_n) = cx_1, cx_2, \dots$

Osztás: $\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots$ (ha $y_n \neq 0$ minden n -re)

Példa

Ha $x_n = \frac{1}{n}$ és $y_n = \frac{2}{n}$, akkor

- $x_n + y_n = \frac{3}{n}$
- $x_n \cdot y_n = \frac{2}{n^2}$
- $2 \cdot x_n = \frac{2}{n}$
- $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{2}$ (konstans sorozat)

Sorozatok korlátossága

Definíció: Korlátosság

- Az (x_n) sorozat **felülről korlátos**, ha létezik olyan K valós szám, hogy $x_n \leq K$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **alulról korlátos**, ha létezik olyan M valós szám, hogy $x_n \geq M$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **korlátos**, ha egyszerre felülről és alulról is korlátos.

Állítás

Az (x_n) sorozat akkor és csak akkor korlátos, ha van olyan K valós szám, hogy $|x_n| \leq K$ minden n -re.

Sorozatok korlátossága

Definíció: Korlátosság

- Az (x_n) sorozat **felülről korlátos**, ha létezik olyan K valós szám, hogy $x_n \leq K$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **alulról korlátos**, ha létezik olyan M valós szám, hogy $x_n \geq M$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **korlátos**, ha egyszerre felülről és alulról is korlátos.

Állítás

Az (x_n) sorozat akkor és csak akkor korlátos, ha van olyan K valós szám, hogy $|x_n| \leq K$ minden n -re.

Sorozatok korlátossága

Definíció: Korlátosság

- Az (x_n) sorozat **felülről korlátos**, ha létezik olyan K valós szám, hogy $x_n \leq K$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **alulról korlátos**, ha létezik olyan M valós szám, hogy $x_n \geq M$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **korlátos**, ha egyszerre felülről és alulról is korlátos.

Állítás

Az (x_n) sorozat akkor és csak akkor korlátos, ha van olyan K valós szám, hogy $|x_n| \leq K$ minden n -re.

Sorozatok korlátossága

Definíció: Korlátosság

- Az (x_n) sorozat **felülről korlátos**, ha létezik olyan K valós szám, hogy $x_n \leq K$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **alulról korlátos**, ha létezik olyan M valós szám, hogy $x_n \geq M$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **korlátos**, ha egyszerre felülről és alulról is korlátos.

Állítás

Az (x_n) sorozat akkor és csak akkor korlátos, ha van olyan K valós szám, hogy $|x_n| \leq K$ minden n -re.

Sorozatok korlátossága

Definíció: Korlátosság

- Az (x_n) sorozat **felülről korlátos**, ha létezik olyan K valós szám, hogy $x_n \leq K$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **alulról korlátos**, ha létezik olyan M valós szám, hogy $x_n \geq M$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **korlátos**, ha egyszerre felülről és alulról is korlátos.

Állítás

Az (x_n) sorozat akkor és csak akkor korlátos, ha van olyan K valós szám, hogy $|x_n| \leq K$ minden n -re.

Monoton sorozatok

Definíció: Monotonitás

- Az (x_n) sorozat **monoton növekvő**, ha $x_n \leq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton növekvő**, ha $x_n < x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **monoton csökkenő**, ha $x_n \geq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha $x_n > x_{n+1}$ minden n -re.

Példák

- $(x_n) = \frac{1}{n}$: korlátos és szigorúan monoton csökkenő
- $(x_n) = n$: alulról korlátos, de nem felülről korlátos; szigorúan monoton növekvő
- $(x_n) = (-1)^n$: korlátos, de nem monoton

Monoton sorozatok

Definíció: Monotonitás

- Az (x_n) sorozat **monoton növekvő**, ha $x_n \leq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton növekvő**, ha $x_n < x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **monoton csökkenő**, ha $x_n \geq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha $x_n > x_{n+1}$ minden n -re.

Példák

- $(x_n) = \frac{1}{n}$: korlátos és szigorúan monoton csökkenő
- $(x_n) = n$: alulról korlátos, de nem felülről korlátos; szigorúan monoton növekvő
- $(x_n) = (-1)^n$: korlátos, de nem monoton

Monoton sorozatok

Definíció: Monotonitás

- Az (x_n) sorozat **monoton növekvő**, ha $x_n \leq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton növekvő**, ha $x_n < x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **monoton csökkenő**, ha $x_n \geq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha $x_n > x_{n+1}$ minden n -re.

Példák

- $(x_n) = \frac{1}{n}$: korlátos és szigorúan monoton csökkenő
- $(x_n) = n$: alulról korlátos, de nem felülről korlátos; szigorúan monoton növekvő
- $(x_n) = (-1)^n$: korlátos, de nem monoton

Monoton sorozatok

Definíció: Monotonitás

- Az (x_n) sorozat **monoton növekvő**, ha $x_n \leq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton növekvő**, ha $x_n < x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **monoton csökkenő**, ha $x_n \geq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha $x_n > x_{n+1}$ minden n -re.

Példák

- $(x_n) = \frac{1}{n}$: korlátos és szigorúan monoton csökkenő
- $(x_n) = n$: alulról korlátos, de nem felülről korlátos; szigorúan monoton növekvő
- $(x_n) = (-1)^n$: korlátos, de nem monoton

Monoton sorozatok

Definíció: Monotonitás

- Az (x_n) sorozat **monoton növekvő**, ha $x_n \leq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton növekvő**, ha $x_n < x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **monoton csökkenő**, ha $x_n \geq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha $x_n > x_{n+1}$ minden n -re.

Példák

- $(x_n) = \frac{1}{n}$: korlátos és szigorúan monoton csökkenő
- $(x_n) = n$: alulról korlátos, de nem felülről korlátos; szigorúan monoton növekvő
- $(x_n) = (-1)^n$: korlátos, de nem monoton

Monoton sorozatok

Definíció: Monotonitás

- Az (x_n) sorozat **monoton növekvő**, ha $x_n \leq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton növekvő**, ha $x_n < x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **monoton csökkenő**, ha $x_n \geq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha $x_n > x_{n+1}$ minden n -re.

Példák

- $(x_n) = \frac{1}{n}$: korlátos és szigorúan monoton csökkenő
- $(x_n) = n$: alulról korlátos, de nem felülről korlátos; szigorúan monoton növekvő
- $(x_n) = (-1)^n$: korlátos, de nem monoton

Monoton sorozatok

Definíció: Monotonitás

- Az (x_n) sorozat **monoton növekvő**, ha $x_n \leq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton növekvő**, ha $x_n < x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **monoton csökkenő**, ha $x_n \geq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha $x_n > x_{n+1}$ minden n -re.

Példák

- $(x_n) = \frac{1}{n}$: korlátos és szigorúan monoton csökkenő
- $(x_n) = n$: alulról korlátos, de nem felülről korlátos; szigorúan monoton növekvő
- $(x_n) = (-1)^n$: korlátos, de nem monoton

Monoton sorozatok

Definíció: Monotonitás

- Az (x_n) sorozat **monoton növekvő**, ha $x_n \leq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton növekvő**, ha $x_n < x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **monoton csökkenő**, ha $x_n \geq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha $x_n > x_{n+1}$ minden n -re.

Példák

- $(x_n) = \frac{1}{n}$: korlátos és szigorúan monoton csökkenő
- $(x_n) = n$: alulról korlátos, de nem felülről korlátos; szigorúan monoton növekvő
- $(x_n) = (-1)^n$: korlátos, de nem monoton

Monoton sorozatok

Definíció: Monotonitás

- Az (x_n) sorozat **monoton növekvő**, ha $x_n \leq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton növekvő**, ha $x_n < x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **monoton csökkenő**, ha $x_n \geq x_{n+1}$ minden n -re.
- Az (x_n) sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha $x_n > x_{n+1}$ minden n -re.

Példák

- $(x_n) = \frac{1}{n}$: korlátos és szigorúan monoton csökkenő
- $(x_n) = n$: alulról korlátos, de nem felülről korlátos; szigorúan monoton növekvő
- $(x_n) = (-1)^n$: korlátos, de nem monoton

Tagolás

- 1 A végtelen és a nulla
- 2 Sorozatok
- 3 Sorozatok határértéke**
- 4 Függvények folytonossága
- 5 Függvények határértéke
- 6 Görbe érintője

Sorozatok határértéke

Definíció: Sorozat konvergenciája és határértéke

Az (x_n) sorozat **konvergens**, és **határértéke** a (a -hoz tart), ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{minden } n > N \text{ esetén.}$$

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ vagy $x_n \rightarrow a$ (ha $n \rightarrow \infty$).

Magyarázat

- Bármely ℓ pozitív egészhez létezik N index, hogy onnantól kezdve a sorozat tagjai ℓ tizedesjegyes kerekítéssel megegyeznek a -val.
- Az N küszöbindex: csak a sorozat vége számít, az első néhány tag irreleváns.
- Ha x_n nem tart semmilyen értékhez, akkor a sorozat divergens.

Sorozatok határértéke

Definíció: Sorozat konvergenciája és határértéke

Az (x_n) sorozat **konvergens**, és **határértéke** a (a -hoz tart), ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{minden } n > N \text{ esetén.}$$

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ vagy $x_n \rightarrow a$ (ha $n \rightarrow \infty$).

Magyarázat

- Bármely ℓ pozitív egészhez létezik N index, hogy onnantól kezdve a sorozat tagjai ℓ tizedesjegyes kerekítéssel megegyeznek a -val.
- Az N küszöbindex: csak a sorozat vége számít, az első néhány tag irreleváns.
- Ha x_n nem tart semmilyen értékhez, akkor a sorozat **divergens**.

Sorozatok határértéke

Definíció: Sorozat konvergenciája és határértéke

Az (x_n) sorozat **konvergens**, és **határértéke** a (a -hoz tart), ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{minden } n > N \text{ esetén.}$$

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ vagy $x_n \rightarrow a$ (ha $n \rightarrow \infty$).

Magyarázat

- Bármely ℓ pozitív egészhez létezik N index, hogy onnantól kezdve a sorozat tagjai ℓ tizedesjegyes kerekítéssel megegyeznek a -val.
- Az N küszöbindex: csak a sorozat vége számít, az első néhány tag irreleváns.
- Ha x_n nem tart semmilyen értékhez, akkor a sorozat **divergens**.

Sorozatok határértéke

Definíció: Sorozat konvergenciája és határértéke

Az (x_n) sorozat **konvergens**, és **határértéke** a (a -hoz tart), ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{minden } n > N \text{ esetén.}$$

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ vagy $x_n \rightarrow a$ (ha $n \rightarrow \infty$).

Magyarázat

- Bármely ℓ pozitív egészhez létezik N index, hogy onnantól kezdve a sorozat tagjai ℓ tizedesjegyes kerekítéssel megegyeznek a -val.
- Az N küszöbindex: csak a sorozat vége számít, az első néhány tag irreleváns.
- Ha x_n nem tart semmilyen értékhez, akkor a sorozat **divergens**.

Sorozatok határértéke

Definíció: Sorozat konvergenciája és határértéke

Az (x_n) sorozat **konvergens**, és **határértéke** a (a -hoz tart), ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{minden } n > N \text{ esetén.}$$

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ vagy $x_n \rightarrow a$ (ha $n \rightarrow \infty$).

Magyarázat

- Bármely ℓ pozitív egészhez létezik N index, hogy onnantól kezdve a sorozat tagjai ℓ tizedesjegyes kerekítéssel megegyeznek a -val.
- Az N küszöbindex: csak a sorozat vége számít, az első néhány tag irreleváns.
- Ha x_n nem tart semmilyen értékhez, akkor a sorozat **divergens**.

Példák sorozatok határértékére

Definíció: Sorozat konvergenciája és határértéke (ism.)

Bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{minden } n > N \text{ esetén.}$$

- 1 $x_n = 100$ **konstans sorozat határértéke 100**: bármely $\varepsilon > 0$ -hoz választhatunk $N = 1$ -et.
- 2 $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, mert bármely $\varepsilon > 0$ -hoz választhatunk $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ -et. Ekkor $n > N$ esetén

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \varepsilon.$$

- 3 $(x_n) = (-1)^n$ **divergens**. Tegyük fel, hogy létezik a határérték. Legyen $\varepsilon = 0.1$ és N tetszőleges egész. Ha $a \geq 0$ és $n > N$ páratlan, akkor

$$|x_n - a| = |-1 - a| > 1 > \varepsilon.$$

Ha $a < 0$ és $n > N$ páros, akkor

$$|x_n - a| = |1 - a| > 1 > \varepsilon.$$

Példák sorozatok határértékére

Definíció: Sorozat konvergenciája és határértéke (ism.)

Bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{minden } n > N \text{ esetén.}$$

- 1 $x_n = 100$ **konstans sorozat határértéke 100**: bármely $\varepsilon > 0$ -hoz választhatunk $N = 1$ -et.
- 2 $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, mert bármely $\varepsilon > 0$ -hoz választhatunk $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ -et. Ekkor $n > N$ esetén

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \varepsilon.$$

- 3 $(x_n) = (-1)^n$ **divergens**. Tegyük fel, hogy létezik a határérték. Legyen $\varepsilon = 0.1$ és N tetszőleges egész. Ha $a \geq 0$ és $n > N$ páratlan, akkor

$$|x_n - a| = |-1 - a| > 1 > \varepsilon.$$

Ha $a < 0$ és $n > N$ páros, akkor

$$|x_n - a| = |1 - a| > 1 > \varepsilon.$$

Példák sorozatok határértékére

Definíció: Sorozat konvergenciája és határértéke (ism.)

Bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{minden } n > N \text{ esetén.}$$

- 1 $x_n = 100$ **konstans sorozat határértéke 100**: bármely $\varepsilon > 0$ -hoz választhatunk $N = 1$ -et.
- 2 $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, mert bármely $\varepsilon > 0$ -hoz választhatunk $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ -et. Ekkor $n > N$ esetén

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \varepsilon.$$

- 3 $(x_n) = (-1)^n$ **divergens**. Tegyük fel, hogy létezik a határérték. Legyen $\varepsilon = 0.1$ és N tetszőleges egész. Ha $a \geq 0$ és $n > N$ páratlan, akkor

$$|x_n - a| = |-1 - a| > 1 > \varepsilon.$$

Ha $a < 0$ és $n > N$ páros, akkor

$$|x_n - a| = |1 - a| > 1 > \varepsilon.$$

Példák sorozatok határértékére

Definíció: Sorozat konvergenciája és határértéke (ism.)

Bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{minden } n > N \text{ esetén.}$$

- 1 $x_n = 100$ **konstans sorozat határértéke 100**: bármely $\varepsilon > 0$ -hoz választhatunk $N = 1$ -et.
- 2 $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, mert bármely $\varepsilon > 0$ -hoz választhatunk $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ -et. Ekkor $n > N$ esetén

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \varepsilon.$$

- 3 $(x_n) = (-1)^n$ **divergens**. Tegyük fel, hogy létezik a határérték. Legyen $\varepsilon = 0.1$ és N tetszőleges egész. Ha $a \geq 0$ és $n > N$ páratlan, akkor

$$|x_n - a| = |-1 - a| > 1 > \varepsilon.$$

Ha $a < 0$ és $n > N$ páros, akkor

$$|x_n - a| = |1 - a| > 1 > \varepsilon.$$

Sorozatok numerikus értéke

n	$x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$
1	1.0000000000000000
201	0.00497512437810945
401	0.00249376558603491
601	0.00166389351081531
801	0.00124843945068664
1001	0.000999000999000999
1201	0.000832639467110741
1401	0.000713775874375446
1601	0.000624609618988132
1801	0.000555247084952804
2001	0.000499750124937531

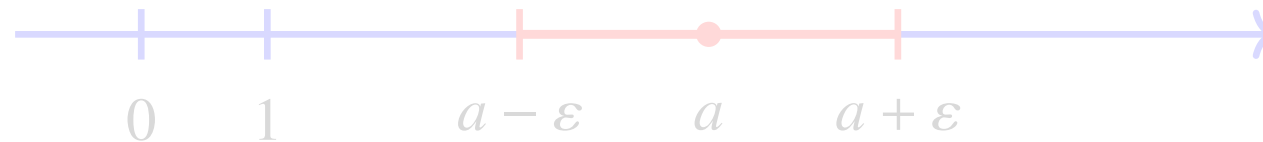
n	$x_n = (-1)^n$
1	-1.0000000000000000
2	1.0000000000000000
3	-1.0000000000000000
4	1.0000000000000000
5	-1.0000000000000000
6	1.0000000000000000
7	-1.0000000000000000
8	1.0000000000000000
9	-1.0000000000000000
10	1.0000000000000000
11	-1.0000000000000000

Monoton és korlátos sorozatok konvergenciája

Tétel: Konvergens sorozat korlátos

Minden konvergens sorozat korlátos.

- A sorozat tagjai egy bizonyos N index után mindig a piros $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ intervallumban helyezkednek el.



- Csak véges sok tag eshet a kék félegyenésekre, ezek lefedhetők egy $[-K, K]$ intervallummal.

Tétel: Monoton sorozatok konvergenciája

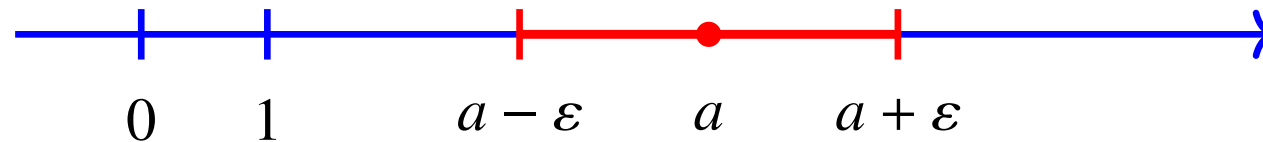
- Ha egy sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens.
- Ha egy sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.

Monoton és korlátos sorozatok konvergenciája

Tétel: Konvergens sorozat korlátos

Minden konvergens sorozat korlátos.

- A sorozat tagjai egy bizonyos N index után mindig a piros $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ intervallumban helyezkednek el.



- Csak véges sok tag eshet a kék félegyenésekre, ezek lefedhetők egy $[-K, K]$ intervallummal.

Tétel: Monoton sorozatok konvergenciája

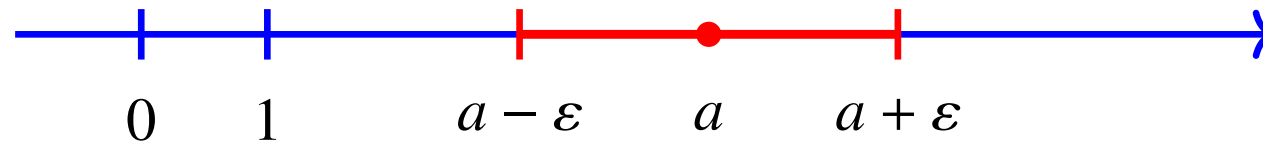
- Ha egy sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens.
- Ha egy sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.

Monoton és korlátos sorozatok konvergenciája

Tétel: Konvergens sorozat korlátos

Minden konvergens sorozat korlátos.

- A sorozat tagjai egy bizonyos N index után mindig a piros $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ intervallumban helyezkednek el.



- Csak véges sok tag eshet a kék félegyenésekre, ezek lefedhetők egy $[-K, K]$ intervallummal.

Tétel: Monoton sorozatok konvergenciája

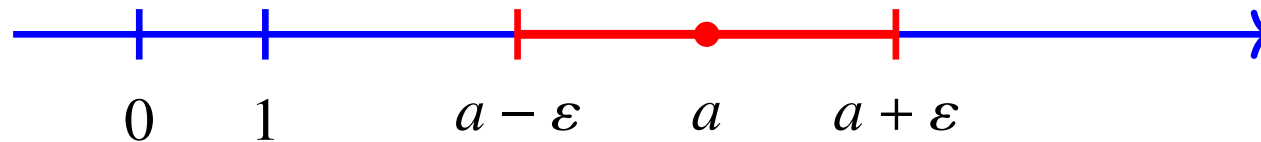
- Ha egy sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens.
- Ha egy sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.

Monoton és korlátos sorozatok konvergenciája

Tétel: Konvergens sorozat korlátos

Minden konvergens sorozat korlátos.

- A sorozat tagjai egy bizonyos N index után mindig a piros $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ intervallumban helyezkednek el.



- Csak véges sok tag eshet a kék félegyenésekre, ezek lefedhetők egy $[-K, K]$ intervallummal.

Tétel: Monoton sorozatok konvergenciája

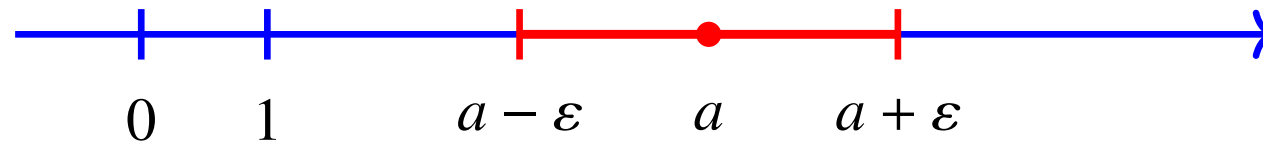
- Ha egy sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens.
- Ha egy sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.

Monoton és korlátos sorozatok konvergenciája

Tétel: Konvergens sorozat korlátos

Minden konvergens sorozat korlátos.

- A sorozat tagjai egy bizonyos N index után mindig a piros $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ intervallumban helyezkednek el.



- Csak véges sok tag eshet a kék félegyenésekre, ezek lefedhetők egy $[-K, K]$ intervallummal.

Tétel: Monoton sorozatok konvergenciája

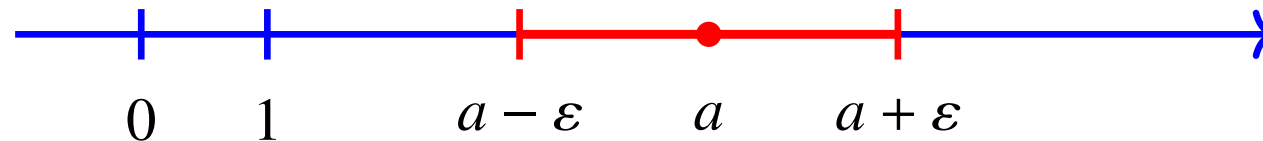
- Ha egy sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens.
- Ha egy sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.

Monoton és korlátos sorozatok konvergenciája

Tétel: Konvergens sorozat korlátos

Minden konvergens sorozat korlátos.

- A sorozat tagjai egy bizonyos N index után mindig a piros $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ intervallumban helyezkednek el.



- Csak véges sok tag eshet a kék félegyenésekre, ezek lefedhetők egy $[-K, K]$ intervallummal.

Tétel: Monoton sorozatok konvergenciája

- Ha egy sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens.
- Ha egy sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.

Alkalmazás: Az Euler-féle számot meghatározó sorozat

Vizsgáljuk az alábbi, racionális számokból álló sorozatot, amely az Euler-féle szám (e) definíciójának alapja:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség (AM-GM) segítségével meg lehet mutatni, hogy a sorozat **szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos**.
- Így a tételünk alapján **konvergens**, a sorozat határértéke az **Euler-féle szám**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828182845905 \dots$$

- A konvergencia **nagyon lassú**, például az $n = 10000$ -hez tartozó

$$a_{10000} = 2.71814592682493 \dots$$

tag értéke csak az első 4 tizedesjegyben egyezik meg e -vel.

Alkalmazás: Az Euler-féle számot meghatározó sorozat

Vizsgáljuk az alábbi, racionális számokból álló sorozatot, amely az Euler-féle szám (e) definíciójának alapja:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség (AM-GM) segítségével meg lehet mutatni, hogy a sorozat **szigorúan monoton növekvő** és **felülről korlátos**.
- Így a tételünk alapján **konvergens**, a sorozat határértéke az **Euler-féle szám**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828182845905 \dots$$

- A konvergencia **nagyon lassú**, például az $n = 10000$ -hez tartozó

$$a_{10000} = 2.71814592682493 \dots$$

tag értéke csak az első 4 tizedesjegyben egyezik meg e -vel.

Alkalmazás: Az Euler-féle számot meghatározó sorozat

Vizsgáljuk az alábbi, racionális számokból álló sorozatot, amely az Euler-féle szám (e) definíciójának alapja:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- A **számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség** (AM-GM) segítségével meg lehet mutatni, hogy a sorozat **szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos**.
- Így a tételünk alapján **konvergens**, a sorozat határértéke az **Euler-féle szám**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828182845905 \dots$$

- A konvergencia **nagyon lassú**, például az $n = 10000$ -hez tartozó

$$a_{10000} = 2.71814592682493 \dots$$

tag értéke csak az első 4 tizedesjegyben egyezik meg e -vel.

Alkalmazás: A $\sqrt{2}$ -t meghatározó sorozat

Vizsgáljuk az alábbi, racionális számokból álló sorozatot:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

- Teljes indukcióval meg lehet mutatni, hogy a sorozat **szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos**.
- Így a tételünk alapján **konvergens**, a sorozat határértéke $\sqrt{2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} \approx 1.41421356237310 \dots$$

- A konvergencia **nagyon gyors**:

n	x_n	n	x_n
1	1.0000000000000000	4	1.41421143847487
2	1.3333333333333333	5	1.41421356237150
3	1.41176470588235	6	1.41421356237310

Alkalmazás: A $\sqrt{2}$ -t meghatározó sorozat

Vizsgáljuk az alábbi, racionális számokból álló sorozatot:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

- Teljes indukcióval meg lehet mutatni, hogy a sorozat **szigorúan monoton növekvő** és **felülről korlátos**.
- Így a tételünk alapján **konvergens**, a sorozat határértéke $\sqrt{2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} \approx 1.41421356237310 \dots$$

- A konvergencia **nagyon gyors**:

n	x_n	n	x_n
1	1.0000000000000000	4	1.41421143847487
2	1.3333333333333333	5	1.41421356237150
3	1.41176470588235	6	1.41421356237310

Alkalmazás: A $\sqrt{2}$ -t meghatározó sorozat

Vizsgáljuk az alábbi, racionális számokból álló sorozatot:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

- Teljes indukcióval meg lehet mutatni, hogy a sorozat **szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos**.
- Így a tételünk alapján **konvergens**, a sorozat határértéke $\sqrt{2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} \approx 1.41421356237310 \dots$$

- A konvergencia **nagyon gyors**:

n	x_n	n	x_n
1	1.0000000000000000	4	1.41421143847487
2	1.3333333333333333	5	1.41421356237150
3	1.41176470588235	6	1.41421356237310

A határérték tulajdonságai

Tétel: A határérték és a műveletek felcserélhetősége sorozatoknál

Legyenek (x_n) és (y_n) konvergens sorozatok és c egy valós szám. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \quad \text{ha } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0.$$

- Ezek a tulajdonságok nagyon fontosak, mert lehetővé teszik, hogy a határértékeket egyszerűen számoljuk, és hogy a határértékek segítségével bizonyítsunk egyéb állításokat.
- A határérték szemléletes értelmezésében a fentiek maguktól adódnak, de a formális definíció alapján ezek a tulajdonságok nem triviálisak, és bizonyítást igényelnek.

Alkalmazás a határérték tulajdonságaira

Feladat

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét:

$$x_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1}, \quad y_n = \frac{n^3 + 2n}{3n^3 - n + 1}.$$

$$x_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} = \frac{\frac{2n^2+3}{n^2}}{\frac{n^2-1}{n^2}} = \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2 + 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{2 + 3 \cdot 0 \cdot 0}{1 - 0 \cdot 0} = 2.$$

$$y_n = \frac{n^3 + 2n}{3n^3 - n + 1} = \frac{\frac{n^3+2n}{n^3}}{\frac{3n^3-n+1}{n^3}} = \frac{1 + 2 \cdot \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \longrightarrow \frac{1 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{1}{3}.$$

Alkalmazás a határérték tulajdonságaira

Feladat

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét:

$$x_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1}, \quad y_n = \frac{n^3 + 2n}{3n^3 - n + 1}.$$

$$x_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} = \frac{\frac{2n^2+3}{n^2}}{\frac{n^2-1}{n^2}} = \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2 + 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{2 + 3 \cdot 0 \cdot 0}{1 - 0 \cdot 0} = 2.$$

$$y_n = \frac{n^3 + 2n}{3n^3 - n + 1} = \frac{\frac{n^3+2n}{n^3}}{\frac{3n^3-n+1}{n^3}} = \frac{1 + 2 \cdot \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \longrightarrow \frac{1 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{1}{3}.$$

Alkalmazás a határérték tulajdonságaira

Feladat

Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét:

$$x_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1}, \quad y_n = \frac{n^3 + 2n}{3n^3 - n + 1}.$$

$$x_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} = \frac{\frac{2n^2+3}{n^2}}{\frac{n^2-1}{n^2}} = \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2 + 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{2 + 3 \cdot 0 \cdot 0}{1 - 0 \cdot 0} = 2.$$

$$y_n = \frac{n^3 + 2n}{3n^3 - n + 1} = \frac{\frac{n^3+2n}{n^3}}{\frac{3n^3-n+1}{n^3}} = \frac{1 + 2 \cdot \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \longrightarrow \frac{1 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{1}{3}.$$

Egy észrevétel és az alkalmazása

- ❶ Ha egy sorozat határértéke a , akkor bármelyik részsorozatának is a a határértéke.

Feladat

A korábbi példában vizsgált

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

sorozat határértéke $\sqrt{2}$.

- Legyen $y_n = x_{n+1}$. Ekkor (y_n) az (x_n) azon részsorozata, amit az (x_n) első tagjának elhagyásával kapunk.
- Már láttuk, hogy (x_n) konvergens, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

- $a > 0$ és $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right)$ egyenletet megoldva $a = \sqrt{2}$.

Egy észrevétel és az alkalmazása

- 1 Ha egy sorozat határértéke a , akkor bármelyik részsorozatának is a a határértéke.

Feladat

A korábbi példában vizsgált

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

sorozat határértéke $\sqrt{2}$.

- Legyen $y_n = x_{n+1}$. Ekkor (y_n) az (x_n) azon részsorozata, amit az (x_n) első tagjának elhagyásával kapunk.
- Már láttuk, hogy (x_n) konvergens, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

- $a > 0$ és $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right)$ egyenletet megoldva $a = \sqrt{2}$.

Egy észrevétel és az alkalmazása

- ① Ha egy sorozat határértéke a , akkor bármelyik részsorozatának is a a határértéke.

Feladat

A korábbi példában vizsgált

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

sorozat határértéke $\sqrt{2}$.

- Legyen $y_n = x_{n+1}$. Ekkor (y_n) az (x_n) azon részsorozata, amit az (x_n) első tagjának elhagyásával kapunk.
- Már láttuk, hogy (x_n) konvergens, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

- $a > 0$ és $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right)$ egyenletet megoldva $a = \sqrt{2}$.

Egy észrevétel és az alkalmazása

- ① Ha egy sorozat határértéke a , akkor bármelyik részsorozatának is a a határértéke.

Feladat

A korábbi példában vizsgált

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

sorozat határértéke $\sqrt{2}$.

- Legyen $y_n = x_{n+1}$. Ekkor (y_n) az (x_n) azon részsorozata, amit az (x_n) első tagjának elhagyásával kapunk.
- Már láttuk, hogy (x_n) konvergens, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

- $a > 0$ és $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right)$ egyenletet megoldva $a = \sqrt{2}$.

Egy észrevétel és az alkalmazása

- ① Ha egy sorozat határértéke a , akkor bármelyik részsorozatának is a a határértéke.

Feladat

A korábbi példában vizsgált

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

sorozat határértéke $\sqrt{2}$.

- Legyen $y_n = x_{n+1}$. Ekkor (y_n) az (x_n) azon részsorozata, amit az (x_n) első tagjának elhagyásával kapunk.
- Már láttuk, hogy (x_n) konvergens, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

- $a > 0$ és $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right)$ egyenletet megoldva $a = \sqrt{2}$.

A rendőrl-ely

Tétel: Rendőrl-ely (szendvics-tétel)

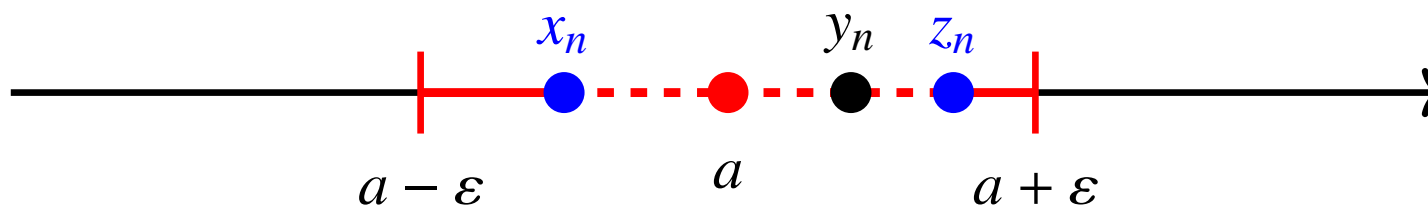
Legyenek (x_n) , (y_n) és (z_n) sorozatok, amelyekre $x_n \leq y_n \leq z_n$ minden n -re. Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L,$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$$

is teljesül.



Feladat

Határozzuk meg az $z_n = \frac{(-1)^n}{n}$ sorozat határértékét a rendőrl-ely segítségével.

A rendőr-elv

Tétel: Rendőr-elv (szendvics-tétel)

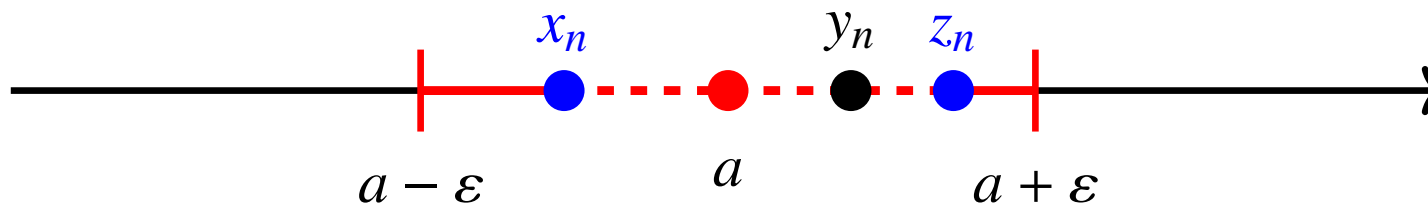
Legyenek (x_n) , (y_n) és (z_n) sorozatok, amelyekre $x_n \leq y_n \leq z_n$ minden n -re. Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L,$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$$

is teljesül.



Feladat

Határozzuk meg az $z_n = \frac{(-1)^n}{n}$ sorozat határértékét a rendőr-elv segítségével.

A végtelen határértékek

- M a szöveggörnyezettől függő "végtelen küszöbérték".

Definíció: Végtelen határértékek

- Azt mondjuk, hogy x_n **határértéke** $+\infty$, ha $n \rightarrow \infty$, ha bármely $M > 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy $x_n > M$ minden $n > N$ esetén. Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
- Azt mondjuk, hogy x_n **határértéke** $-\infty$, ha $n \rightarrow \infty$, ha bármely $M < 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy $x_n < M$ minden $n > N$ esetén. Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

```

1 >>> a=2.0**1024
2 Traceback (most recent call last):
3   File "<stdin>", line 1, in <module>
4 OverflowError: (34, 'Numerical result out of range')
5 >>> a=2.0**1023; a
6 8.98846567431158e+307
7 >>> 2*a
8 inf

```

A végtelen határértékek

- M a szöveggörnyezettől függő "végtelen küszöbérték".

Definíció: Végtelen határértékek

- Azt mondjuk, hogy x_n **határértéke** $+\infty$, ha $n \rightarrow \infty$, ha bármely $M > 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy $x_n > M$ minden $n > N$ esetén. Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
- Azt mondjuk, hogy x_n **határértéke** $-\infty$, ha $n \rightarrow \infty$, ha bármely $M < 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy $x_n < M$ minden $n > N$ esetén. Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

```

1 >>> a=2.0**1024
2 Traceback (most recent call last):
3   File "<stdin>", line 1, in <module>
4 OverflowError: (34, 'Numerical result out of range')
5 >>> a=2.0**1023; a
6 8.98846567431158e+307
7 >>> 2*a
8 inf

```


A végtelen határértékek

- M a szöveggörnyezettől függő "végtelen küszöbérték".

Definíció: Végtelen határértékek

- Azt mondjuk, hogy x_n **határértéke** $+\infty$, ha $n \rightarrow \infty$, ha bármely $M > 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy $x_n > M$ minden $n > N$ esetén. Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
- Azt mondjuk, hogy x_n **határértéke** $-\infty$, ha $n \rightarrow \infty$, ha bármely $M < 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy $x_n < M$ minden $n > N$ esetén. Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

```

1 >>> a=2.0**1024
2 Traceback (most recent call last):
3   File "<stdin>", line 1, in <module>
4 OverflowError: (34, 'Numerical result out of range')
5 >>> a=2.0**1023; a
6 8.98846567431158e+307
7 >>> 2*a
8 inf

```

A végtelen határértékek

- M a szöveggörnyezettől függő "végtelen küszöbérték".

Definíció: Végtelen határértékek

- Azt mondjuk, hogy x_n **határértéke** $+\infty$, ha $n \rightarrow \infty$, ha bármely $M > 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy $x_n > M$ minden $n > N$ esetén. Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
- Azt mondjuk, hogy x_n **határértéke** $-\infty$, ha $n \rightarrow \infty$, ha bármely $M < 0$ számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy $x_n < M$ minden $n > N$ esetén. Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

```

1 >>> a=2.0**1024
2 Traceback (most recent call last):
3   File "<stdin>", line 1, in <module>
4   OverflowError: (34, 'Numerical result out of range')
5 >>> a=2.0**1023; a
6 8.98846567431158e+307
7 >>> 2*a
8 inf

```

Példák végtelen határértékekre

Példák

- $x_n = n^2 \rightarrow +\infty$, mert bármely $M > 0$ -hoz választhatunk $N = \lceil \sqrt{M} \rceil$ -et.
- $x_n = -n \rightarrow -\infty$, mert bármely $M < 0$ -hoz választhatunk $N = \lceil -M \rceil$ -et.
- $x_n = (-1)^n \cdot n$ **divergens**: nincs sem véges, sem pedig végtelen határértéke.

Példák végtelen határértékekre

Példák

- $x_n = n^2 \rightarrow +\infty$, mert bármely $M > 0$ -hoz választhatunk $N = \lceil \sqrt{M} \rceil$ -et.
- $x_n = -n \rightarrow -\infty$, mert bármely $M < 0$ -hoz választhatunk $N = \lceil -M \rceil$ -et.
- $x_n = (-1)^n \cdot n$ **divergens**: nincs sem véges, sem pedig végtelen határértéke.

Példák végtelen határértékekre

Példák

- $x_n = n^2 \rightarrow +\infty$, mert bármely $M > 0$ -hoz választhatunk $N = \lceil \sqrt{M} \rceil$ -et.
- $x_n = -n \rightarrow -\infty$, mert bármely $M < 0$ -hoz választhatunk $N = \lceil -M \rceil$ -et.
- $x_n = (-1)^n \cdot n$ **divergens**: nincs sem véges, sem pedig végtelen határértéke.

Példák végtelen határértékekre

Példák

- $x_n = n^2 \rightarrow +\infty$, mert bármely $M > 0$ -hoz választhatunk $N = \lceil \sqrt{M} \rceil$ -et.
- $x_n = -n \rightarrow -\infty$, mert bármely $M < 0$ -hoz választhatunk $N = \lceil -M \rceil$ -et.
- $x_n = (-1)^n \cdot n$ **divergens**: nincs sem véges, sem pedig végtelen határértéke.

Tagolás

- 1 A végtelen és a nulla
- 2 Sorozatok
- 3 Sorozatok határértéke
- 4 Függvények folytonossága**
- 5 Függvények határértéke
- 6 Görbe érintője

Valós függvények

Valós függvények

Ebben a fejezetben **valós függvényekkel** fogunk foglalkozni, amelyek

- **értelmezési tartománya** a valós számok egy A részhalmaza,
- **értékkészlete** pedig a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza:

$$f : A \rightarrow \mathbb{R},$$

ahol $A \subseteq \mathbb{R}$.

Megegyezünk továbbá abban, hogy ha $f(x)$ -et írunk, akkor $x \in A$ benne van az értelmezési tartományban, és $f(x)$ értelmezve van.

A folytonosság intuitív bevezetése

- *Nagyon szemléletesen:* egy függvény **folytonos**, ha a grafikonját egy lendületes vonallal megrajzolhatjuk anélkül, hogy ceruzát felemelnénk a papírról.
- *Kicsit precízebben:* egy függvény **folytonos**, ha bármely előírt ℓ pontossághoz létezik olyan k pontosság, hogy ha a bemeneti x értékek k tizedesjegyig megegyeznek egy a értékkel, akkor a kimeneti $f(x)$ értékek ℓ tizedesjegyig megegyeznek egy $f(a)$ értékkel.

Definíció: Függvény folytonossága

Az $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **folytonos az $a \in A$ pontban**, ha bármely $x_n \in A$ sorozatra, amely a -hoz tart, az $f(x_n)$ sorozat $f(a)$ -hoz tart:

$$x_n \rightarrow a \quad \implies \quad f(x_n) \rightarrow f(a).$$

Ha f folytonos minden $a \in A$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy f **folytonos az A halmazon**.

A folytonosság intuitív bevezetése

- *Nagyon szemléletesen:* egy függvény **folytonos**, ha a grafikonját egy lendületes vonallal megrajzolhatjuk anélkül, hogy ceruzát felemelnénk a papírról.
- *Kicsit precízebben:* egy függvény **folytonos**, ha bármely előírt ℓ pontossághoz létezik olyan k pontosság, hogy ha a bemeneti x értékek k tizedesjegyig megegyeznek egy a értékkel, akkor a kimeneti $f(x)$ értékek ℓ tizedesjegyig megegyeznek egy $f(a)$ értékkel.

Definíció: Függvény folytonossága

Az $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **folytonos az $a \in A$ pontban**, ha bármely $x_n \in A$ sorozatra, amely a -hoz tart, az $f(x_n)$ sorozat $f(a)$ -hoz tart:

$$x_n \rightarrow a \quad \implies \quad f(x_n) \rightarrow f(a).$$

Ha f folytonos minden $a \in A$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy f **folytonos az A halmazon**.

A folytonosság intuitív bevezetése

- *Nagyon szemléletesen:* egy függvény **folytonos**, ha a grafikonját egy lendületes vonallal megrajzolhatjuk anélkül, hogy ceruzát felemelnénk a papírról.
- *Kicsit precízebben:* egy függvény **folytonos**, ha **bármely előírt ℓ pontossághoz** létezik olyan **k pontosság**, hogy ha a bemeneti **x értékek k tizedesjegyig** megegyeznek egy a értékkel, akkor a kimeneti **$f(x)$ értékek ℓ tizedesjegyig** megegyeznek egy $f(a)$ értékkel.

Definíció: Függvény folytonossága

Az $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **folytonos az $a \in A$ pontban**, ha bármely $x_n \in A$ sorozatra, amely a -hoz tart, az $f(x_n)$ sorozat $f(a)$ -hoz tart:

$$x_n \rightarrow a \quad \implies \quad f(x_n) \rightarrow f(a).$$

Ha f folytonos minden $a \in A$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy f **folytonos az A halmazon**.

Példák és ellenpéldák a folytonosságra

Emlékeztető:

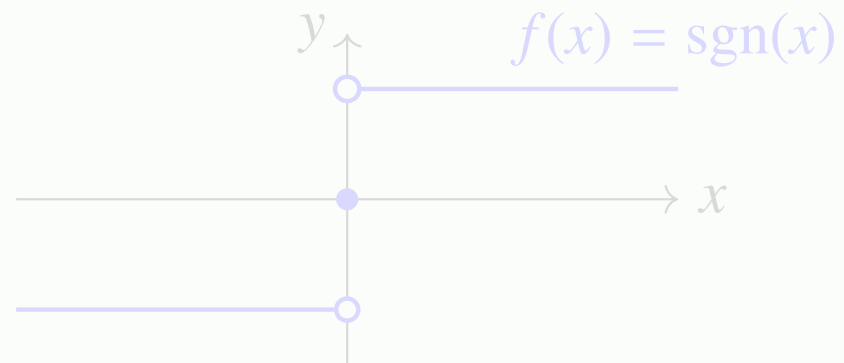
Folytonosság a -ban: $x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a).$

Példák

- A konstans függvény $f(x) = c$ mindenütt folytonos.
- Az identikus függvény $f(x) = x$ mindenütt folytonos.

Ellenpélda: Az előjel függvény $\text{sgn}(x)$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



Nem folytonos az $a = 0$ pontban, de folytonos minden más $a \neq 0$ pontban.

Példák és ellenpéldák a folytonosságra

Emlékeztető:

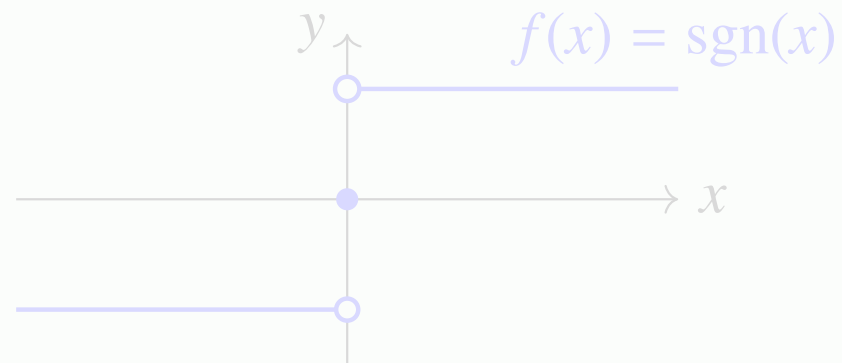
Folytonosság a -ban: $x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a).$

Példák

- A konstans függvény $f(x) = c$ mindenütt folytonos.
- Az identikus függvény $f(x) = x$ mindenütt folytonos.

Ellenpélda: Az előjel függvény $\text{sgn}(x)$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



Nem folytonos az $a = 0$ pontban, de folytonos minden más $a \neq 0$ pontban.

Példák és ellenpéldák a folytonosságra

Emlékeztető:

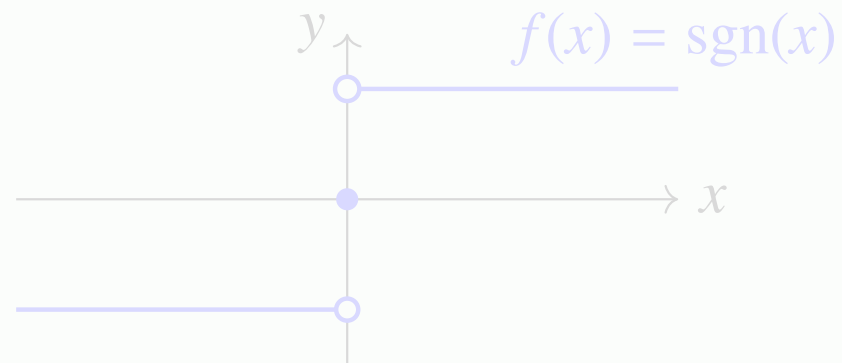
Folytonosság a -ban: $x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a).$

Példák

- A konstans függvény $f(x) = c$ mindenütt folytonos.
- Az identikus függvény $f(x) = x$ mindenütt folytonos.

Ellenpélda: Az előjel függvény $\text{sgn}(x)$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



Nem folytonos az $a = 0$ pontban, de folytonos minden más $a \neq 0$ pontban.

Példák és ellenpéldák a folytonosságra

Emlékeztető:

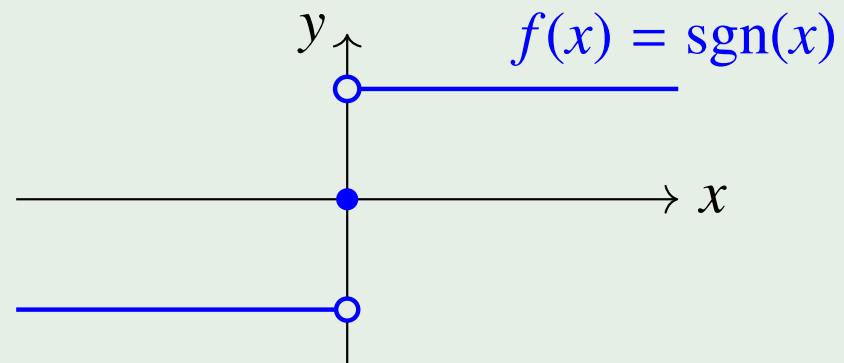
Folytonosság a -ban: $x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a).$

Példák

- A konstans függvény $f(x) = c$ mindenütt folytonos.
- Az identikus függvény $f(x) = x$ mindenütt folytonos.

Ellenpélda: Az előjel függvény $\text{sgn}(x)$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



Nem folytonos az $a = 0$ pontban, de folytonos minden más $a \neq 0$ pontban.

A folytonosság tulajdonságai

Az alábbi tétel megmutatja, hogy a folytonosság egy nagyon jól viselkedő tulajdonság, amely megmarad a függvények alapvető műveletei alatt.

Tétel:

Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ olyan függvények, amelyek folytonosak egy a pontban, c pedig egy valós szám. Ekkor a következő függvények is folytonosak a -ban:

$$(1) \quad f(x) + g(x)$$

$$(2) \quad c \cdot f(x)$$

$$(3) \quad f(x) \cdot g(x)$$

$$(4) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{ha } g(a) \neq 0)$$

Továbbá, ha $h(x)$ folytonos $f(a)$ -ban, akkor a $h(f(x))$ összetett függvény is folytonos a -ban.

- A tétel bizonyítása a sorozatok határértékének műveleteire vonatkozó tételre épül.
- Ha $f(x)$ és $g(x)$ függvény értelmes és folytonos az A halmazon, akkor a műveletek eredményeként kapott függvény is folytonos lesz A -n.

A folytonosság tulajdonságai

Az alábbi tétel megmutatja, hogy a folytonosság egy nagyon jól viselkedő tulajdonság, amely megmarad a függvények alapvető műveletei alatt.

Tétel:

Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ olyan függvények, amelyek folytonosak egy a pontban, c pedig egy valós szám. Ekkor a következő függvények is folytonosak a -ban:

$$(1) \quad f(x) + g(x)$$

$$(2) \quad c \cdot f(x)$$

$$(3) \quad f(x) \cdot g(x)$$

$$(4) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{ha } g(a) \neq 0)$$

Továbbá, ha $h(x)$ folytonos $f(a)$ -ban, akkor a $h(f(x))$ összetett függvény is folytonos a -ban.

- A tétel bizonyítása a sorozatok határértékének műveleteire vonatkozó tételre épül.
- Ha $f(x)$ és $g(x)$ függvény értelmes és folytonos az A halmazon, akkor a műveletek eredményeként kapott függvény is folytonos lesz A -n.

A folytonosság tulajdonságai

Az alábbi tétel megmutatja, hogy a folytonosság egy nagyon jól viselkedő tulajdonság, amely megmarad a függvények alapvető műveletei alatt.

Tétel:

Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ olyan függvények, amelyek folytonosak egy a pontban, c pedig egy valós szám. Ekkor a következő függvények is folytonosak a -ban:

$$(1) \quad f(x) + g(x)$$

$$(2) \quad c \cdot f(x)$$

$$(3) \quad f(x) \cdot g(x)$$

$$(4) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{ha } g(a) \neq 0)$$

Továbbá, ha $h(x)$ folytonos $f(a)$ -ban, akkor a $h(f(x))$ összetett függvény is folytonos a -ban.

- A tétel bizonyítása a sorozatok határértékének műveleteire vonatkozó tételre épül.
- Ha $f(x)$ és $g(x)$ függvény értelmes és folytonos az A halmazon, akkor a műveletek eredményeként kapott függvény is folytonos lesz A -n.

Polinomok és racionális függvények folytonossága

Tétel: Polinomok és racionális függvények folytonossága

- Minden **polinom függvény**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

folytonos minden valós c helyen.

- Minden **racionális törtfüggvény**

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

ahol P és Q polinomok, folytonos minden valós c helyen, ahol $Q(c) \neq 0$.

- Később látni fogjuk, hogy a **trigonometrikus függvények**, az **exponenciális** és a **logaritmus függvények** is folytonosak.

Polinomok és racionális függvények folytonossága

Tétel: Polinomok és racionális függvények folytonossága

- Minden **polinom függvény**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

folytonos minden valós c helyen.

- Minden **racionális törtfüggvény**

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

ahol P és Q polinomok, folytonos minden valós c helyen, ahol $Q(c) \neq 0$.

- Később látni fogjuk, hogy a **trigonometrikus függvények**, az **exponenciális** és a **logaritmus függvények** is folytonosak.

Polinomok és racionális függvények folytonossága

Tétel: Polinomok és racionális függvények folytonossága

- Minden **polinom függvény**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

folytonos minden valós c helyen.

- Minden **racionális törtfüggvény**

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

ahol P és Q polinomok, folytonos minden valós c helyen, ahol $Q(c) \neq 0$.

- Később látni fogjuk, hogy a **trigonometrikus függvények**, az **exponenciális** és a **logaritmus függvények** is folytonosak.

Polinomok és racionális függvények folytonossága

Tétel: Polinomok és racionális függvények folytonossága

- Minden **polinom függvény**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

folytonos minden valós c helyen.

- Minden **racionális törtfüggvény**

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

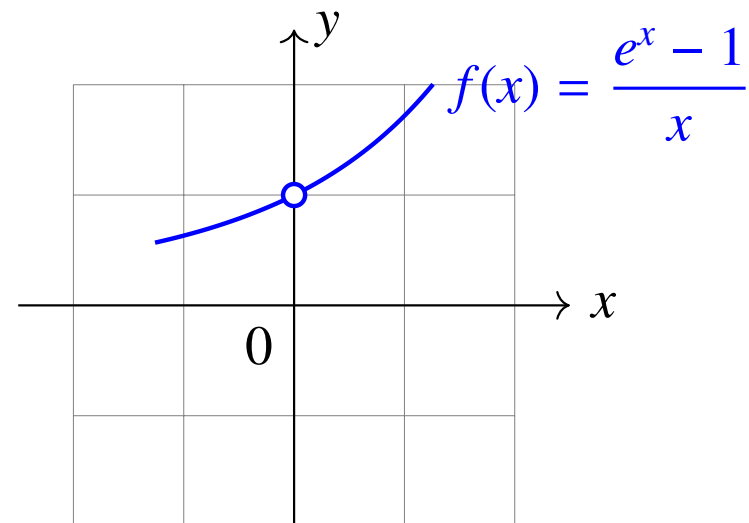
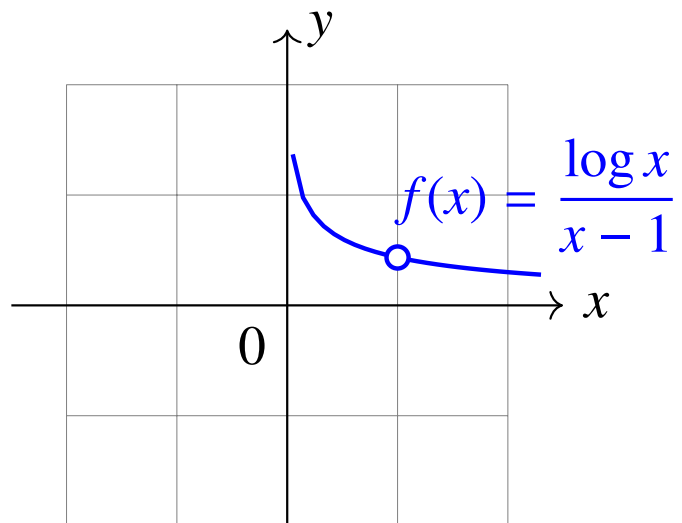
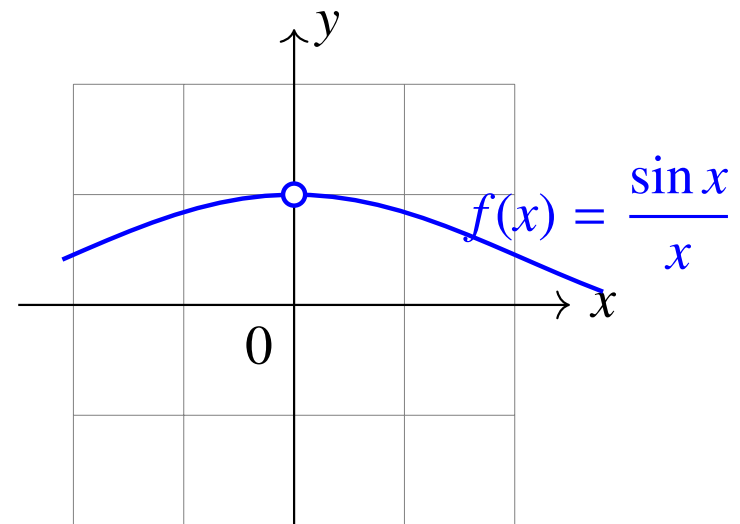
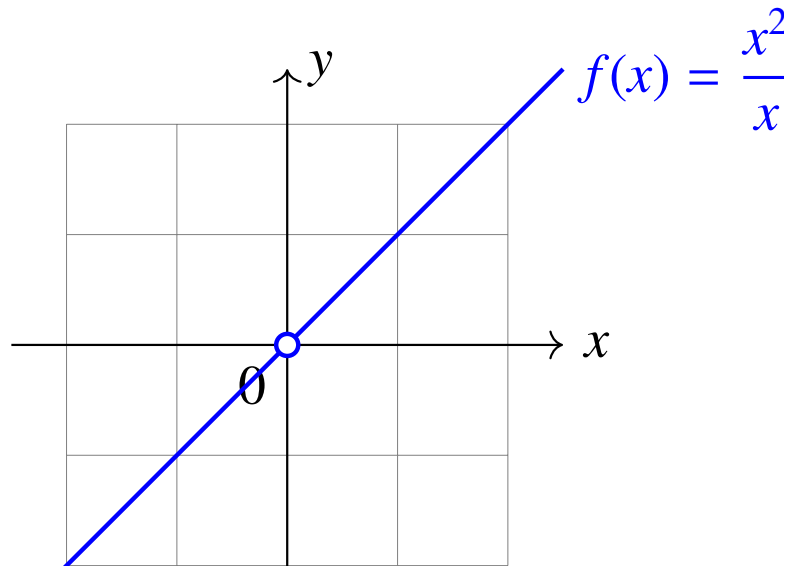
ahol P és Q polinomok, folytonos minden valós c helyen, ahol $Q(c) \neq 0$.

- Később látni fogjuk, hogy a **trigonometrikus függvények**, az **exponenciális** és a **logaritmus függvények** is folytonosak.

Tagolás

- 1 A végtelen és a nulla
- 2 Sorozatok
- 3 Sorozatok határértéke
- 4 Függvények folytonossága
- 5 Függvények határértéke**
- 6 Görbe érintője

Függvényérték 0/0 alakban?



Függvények határértéke

Definíció: Függvény határértéke

Legyen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény, és a, L valós számok. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ **határértéke L az a pontban**, ha bármely $x_n \in A$ sorozatra, amely a -hoz tart, az $f(x_n)$ sorozat L -hez tart:

$$x_n \rightarrow a \quad \implies \quad f(x_n) \rightarrow L.$$

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

- A definíció **nem** azt követeli meg, hogy $f(a)$ értelmezve legyen vagy hogy $f(a) = L$ teljesüljön.
- Csak az a -hoz **közeli** x_n pontok számítanak, az a pont konkrét viselkedése nem.
- A **folytonosság** esetén $L = f(a)$, de a határérték fogalma általánosabb, és lehet $L \neq f(a)$ is.

Függvények határértéke

Definíció: Függvény határértéke

Legyen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény, és a, L valós számok. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ **határértéke L az a pontban**, ha bármely $x_n \in A$ sorozatra, amely a -hoz tart, az $f(x_n)$ sorozat L -hez tart:

$$x_n \rightarrow a \quad \implies \quad f(x_n) \rightarrow L.$$

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

- A definíció **nem azt követeli meg**, hogy $f(a)$ értelmezve legyen vagy hogy $f(a) = L$ teljesüljön.
- Csak az a -hoz **közeli** x_n pontok számítanak, az a pont konkrét viselkedése nem.
- A folytonosság esetén $L = f(a)$, de a határérték fogalma általánosabb, és lehet $L \neq f(a)$ is.

Függvények határértéke

Definíció: Függvény határértéke

Legyen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény, és a, L valós számok. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ **határértéke L az a pontban**, ha bármely $x_n \in A$ sorozatra, amely a -hoz tart, az $f(x_n)$ sorozat L -hez tart:

$$x_n \rightarrow a \quad \implies \quad f(x_n) \rightarrow L.$$

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

- A definíció **nem azt követeli meg**, hogy $f(a)$ értelmezve legyen vagy hogy $f(a) = L$ teljesüljön.
- Csak az **a -hoz közeli** x_n pontok számítanak, az a pont konkrét viselkedése nem.
- A folytonosság esetén $L = f(a)$, de a határérték fogalma általánosabb, és lehet $L \neq f(a)$ is.

Függvények határértéke

Definíció: Függvény határértéke

Legyen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény, és a, L valós számok. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ **határértéke L az a pontban**, ha bármely $x_n \in A$ sorozatra, amely a -hoz tart, az $f(x_n)$ sorozat L -hez tart:

$$x_n \rightarrow a \quad \implies \quad f(x_n) \rightarrow L.$$

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

- A definíció **nem azt követeli meg**, hogy $f(a)$ értelmezve legyen vagy hogy $f(a) = L$ teljesüljön.
- Csak az **a -hoz közeli** x_n pontok számítanak, az a pont konkrét viselkedése nem.
- A **folytonosság** esetén $L = f(a)$, de a határérték fogalma általánosabb, és lehet $L \neq f(a)$ is.

A rendőrlv függvények határértékére

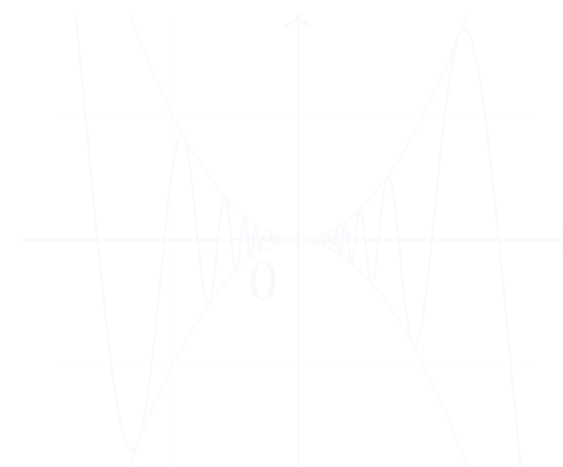
Tétel: Rendőrlv (szendvics-tétel)

Legyenek $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$ olyan függvények, amelyekre $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ minden x -re az a -hoz elég közel. Ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$



A rendőr-elv függvények határértékére

Tétel: Rendőr-elv (szendvics-tétel)

Legyenek $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$ olyan függvények, amelyekre $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ minden x -re az a -hoz elég közel. Ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

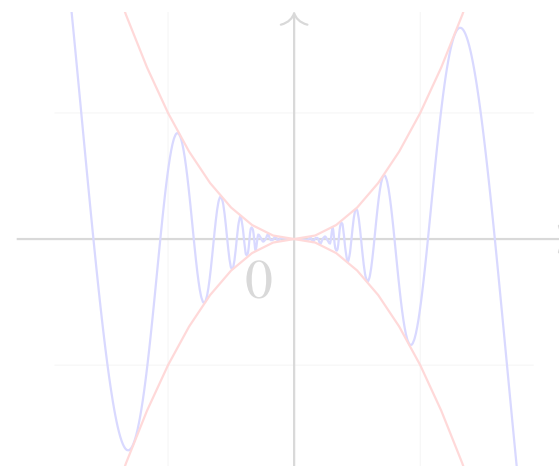
akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Példa

Legyen $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

- Legyen $f(x) = x^2$ és $h(x) = -x^2$.
- Egyrészt $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
- Másrészt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.



A rendőr-elv függvények határértékére

Tétel: Rendőr-elv (szendvics-tétel)

Legyenek $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$ olyan függvények, amelyekre $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ minden x -re az a -hoz elég közel. Ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

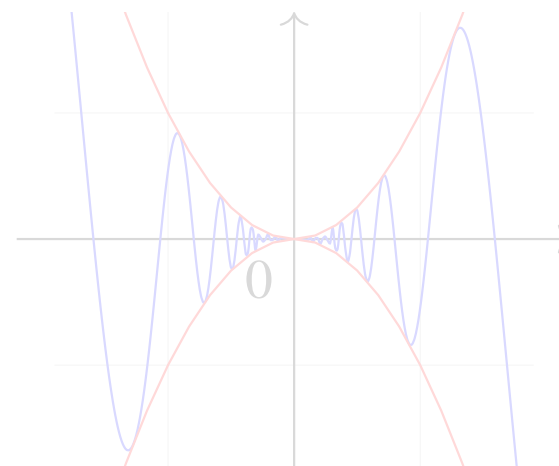
akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Példa

Legyen $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

- Legyen $f(x) = x^2$ és $h(x) = -x^2$.
- Egyrészt $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
- Másrészt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.



A rendőr-elv függvények határértékére

Tétel: Rendőr-elv (szendvics-tétel)

Legyenek $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$ olyan függvények, amelyekre $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ minden x -re az a -hoz elég közel. Ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

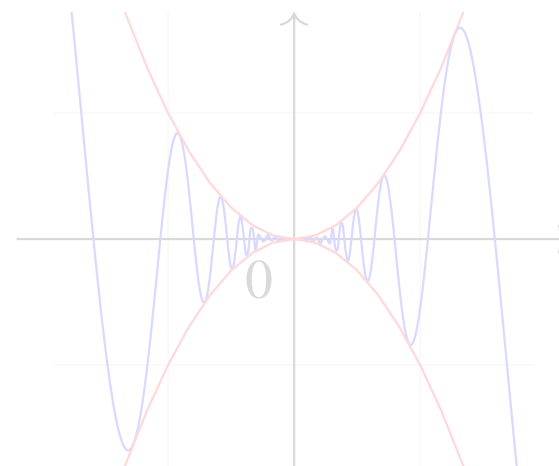
akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Példa

Legyen $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

- Legyen $f(x) = x^2$ és $h(x) = -x^2$.
- Egyrészt $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
- Másrészt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.



A rendőr-elv függvények határértékére

Tétel: Rendőr-elv (szendvics-tétel)

Legyenek $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$ olyan függvények, amelyekre $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ minden x -re az a -hoz elég közel. Ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

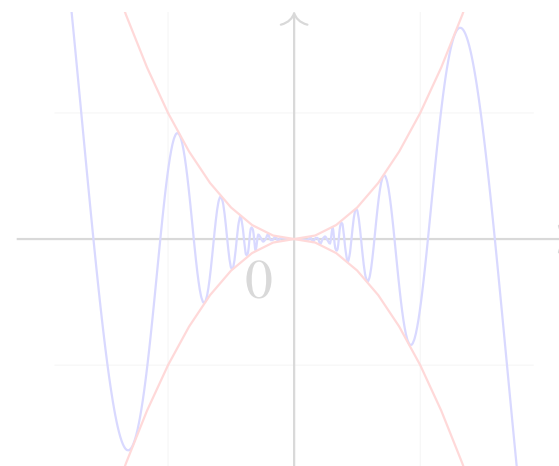
akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Példa

Legyen $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

- Legyen $f(x) = x^2$ és $h(x) = -x^2$.
- Egyrészt $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
- Másrészt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.



A rendőr-elv függvények határértékére

Tétel: Rendőr-elv (szendvics-tétel)

Legyenek $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$ olyan függvények, amelyekre $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ minden x -re az a -hoz elég közel. Ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

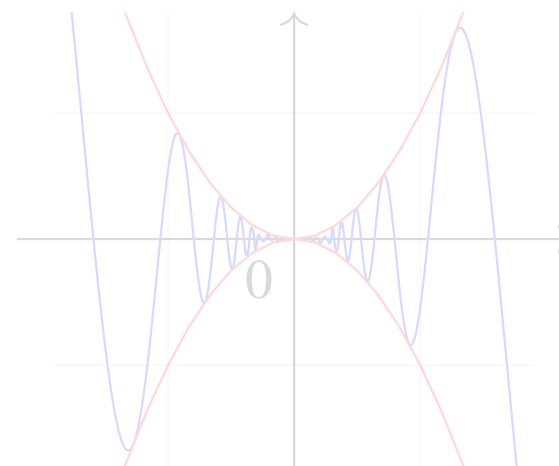
akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Példa

Legyen $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

- Legyen $f(x) = x^2$ és $h(x) = -x^2$.
- Egyrészt $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
- Másrészt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.



A rendőrlv függvények határértékére

Tétel: Rendőrlv (szendvics-tétel)

Legyenek $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$ olyan függvények, amelyekre $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ minden x -re az a -hoz elég közel. Ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

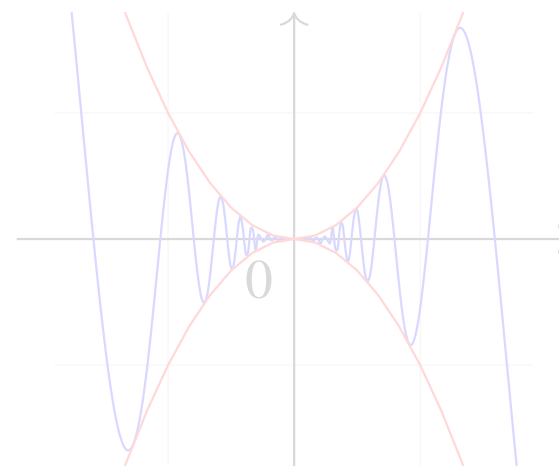
akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Példa

Legyen $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

- Legyen $f(x) = x^2$ és $h(x) = -x^2$.
- Egyrészt $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
- Másrészt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.



A rendőr-elv függvények határértékére

Tétel: Rendőr-elv (szendvics-tétel)

Legyenek $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$ olyan függvények, amelyekre $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ minden x -re az a -hoz elég közel. Ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

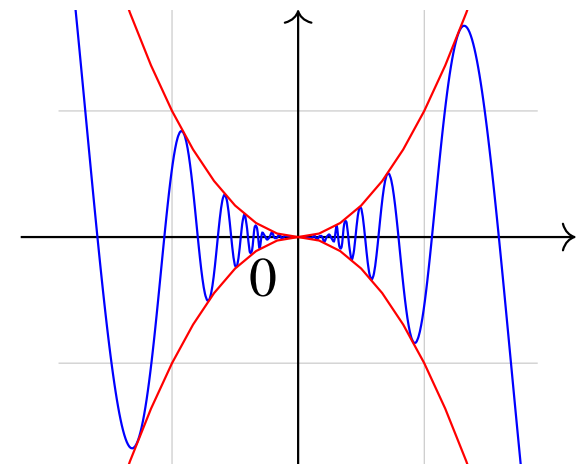
akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Példa

Legyen $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

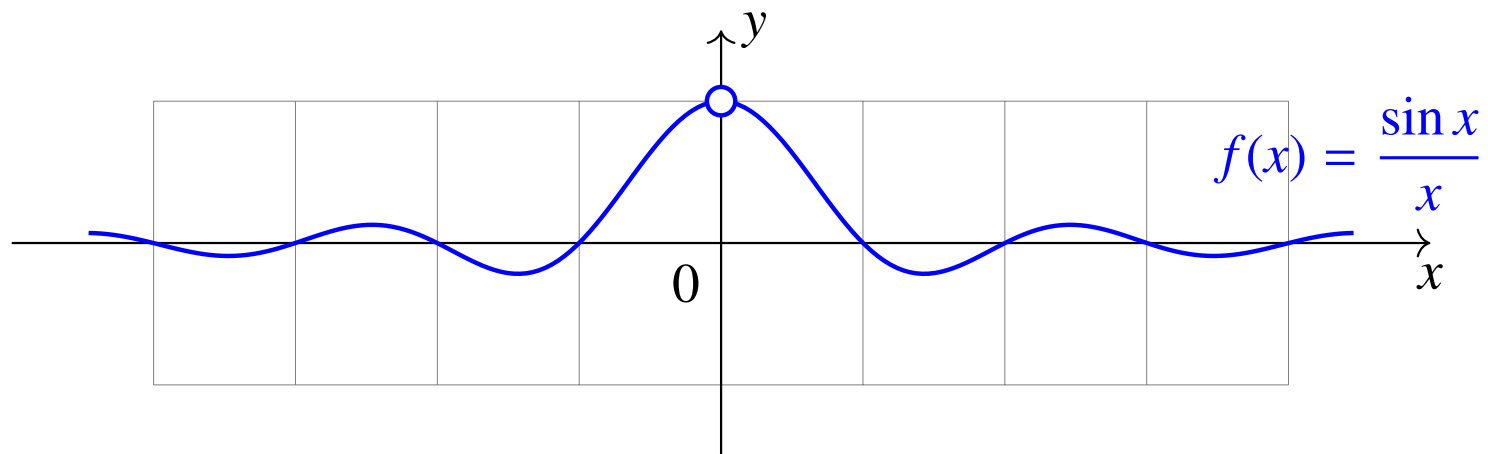
- Legyen $f(x) = x^2$ és $h(x) = -x^2$.
- Egyrészt $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
- Másrészt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.



Egy fontos határérték

Tétel (a kalkulus egyik legfontosabb határértéke)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

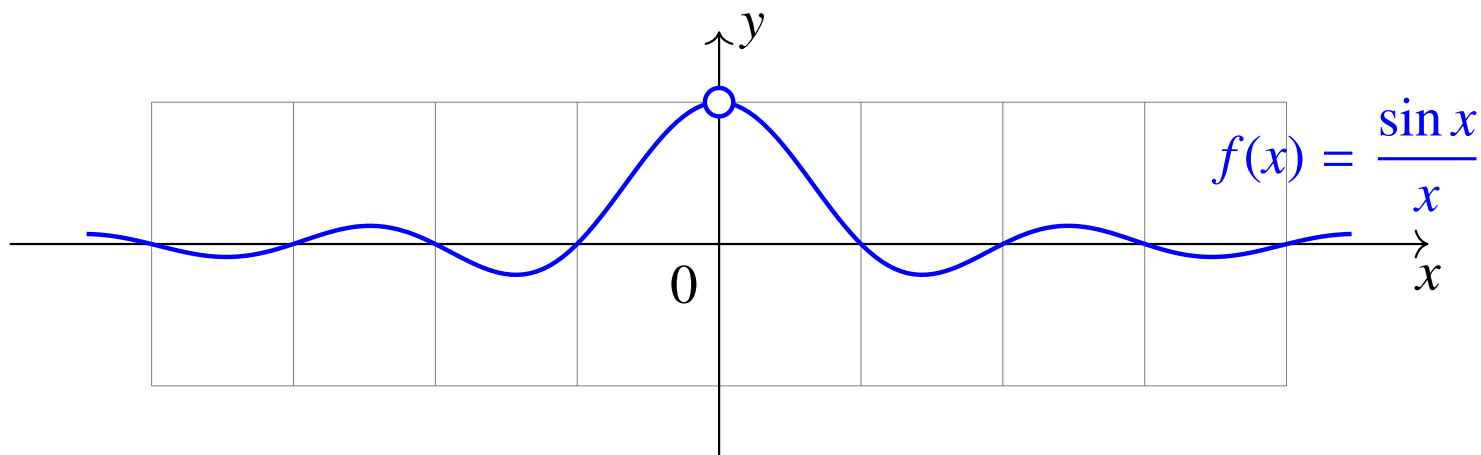


- Mivel $\sin(x)/x$ páros függvény, feltehetjük, hogy $0 < x < \pi/2$.

Egy fontos határérték

Tétel (a kalkulus egyik legfontosabb határértéke)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

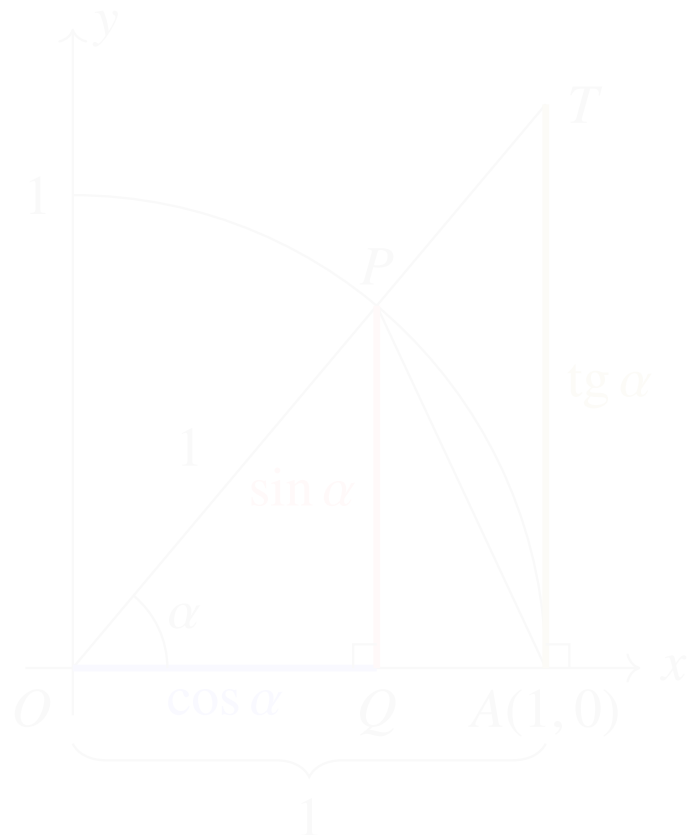


- Mivel $\sin(x)/x$ páros függvény, feltehetjük, hogy $0 < x < \pi/2$.

Egy fontos határérték (bizonyítás)

Tétel (a kalkulus egyik legfontosabb határértéke)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

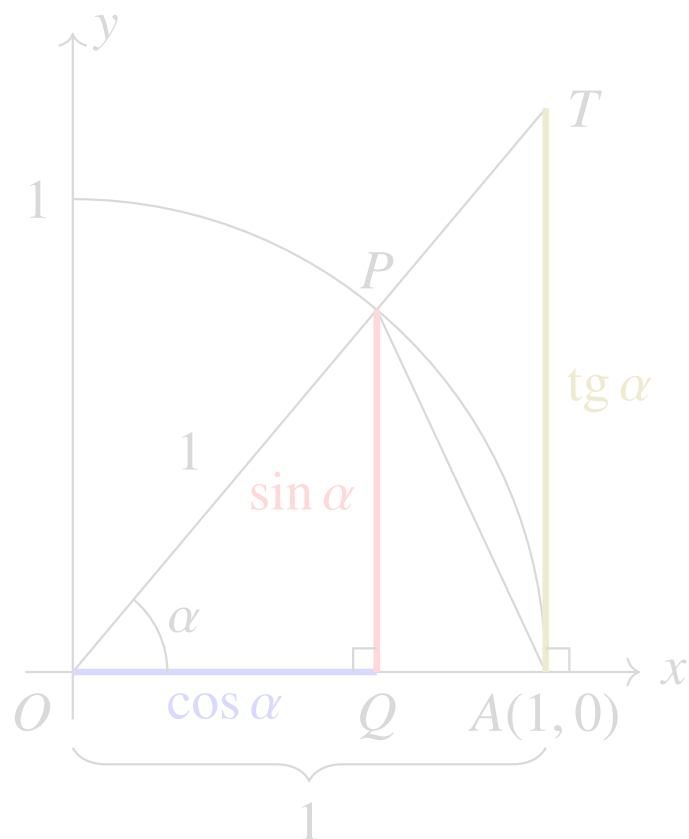


- $T_{\text{ kör }} < T_{\text{ kör ív }} < T_{\text{ érintő }}$
- $T_{\text{ kör }} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$
- $T_{\text{ kör ív }} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \alpha = \frac{1}{2} \alpha$
- $T_{\text{ érintő }} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$
- Viszszahelyettesítve: $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$
- Átrendezve: $\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$
- A tétel adódik a sandor-egyenlőségből.

Egy fontos határérték (bizonyítás)

Tétel (a kalkulus egyik legfontosabb határértéke)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

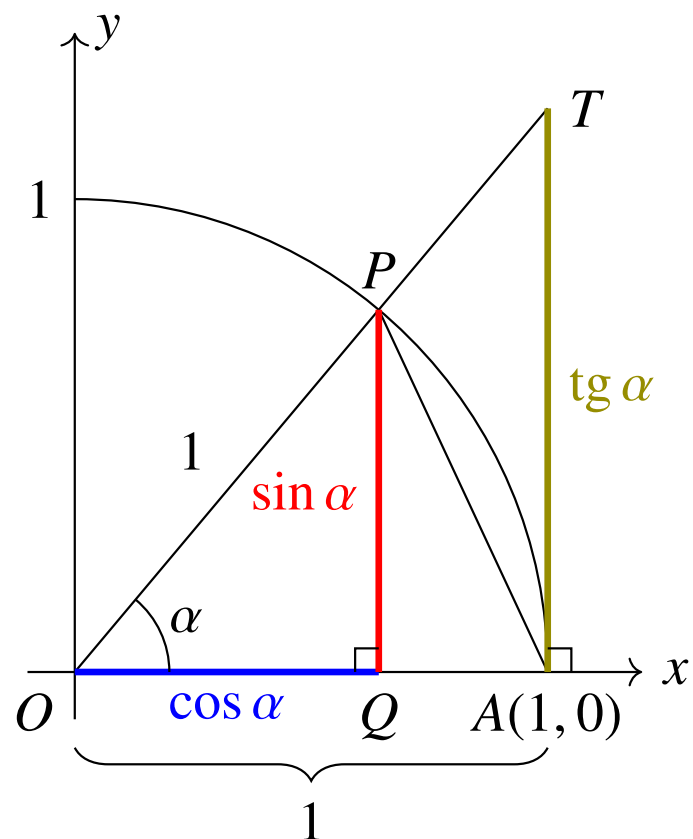


- $T_{OAP\Delta} < T_{OAP \text{ körcikk}} < T_{OAT\Delta}$
- $T_{OAP\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$
- $T_{OAP \text{ körcikk}} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \alpha = \frac{\alpha}{2}$
- $T_{OAT\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$
- Visszahelyettesítve: $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.
- Átrendezve: $\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$.
- A tétel adódik a rendő-elvből.

Egy fontos határérték (bizonyítás)

Tétel (a kalkulus egyik legfontosabb határértéke)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

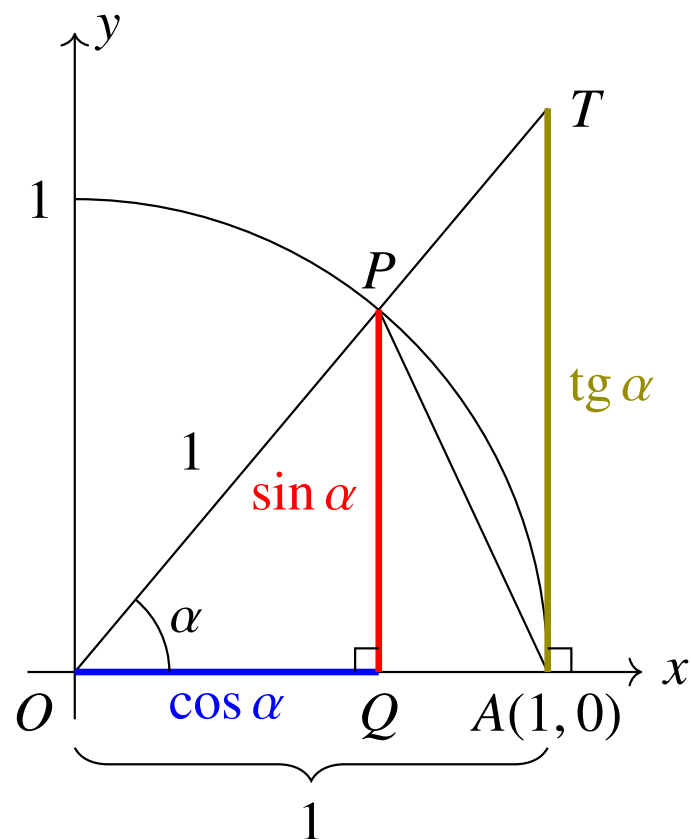


- $T_{OAP\Delta} < T_{OAP} \text{ körcikk} < T_{OAT\Delta}$
- $T_{OAP\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$
- $T_{OAP} \text{ körcikk} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \alpha = \frac{\alpha}{2}$
- $T_{OAT\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$
- Visszahelyettesítve: $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.
- Átrendezve: $\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$.
- A tétel adódik a rendő-elvből.

Egy fontos határérték (bizonyítás)

Tétel (a kalkulus egyik legfontosabb határértéke)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

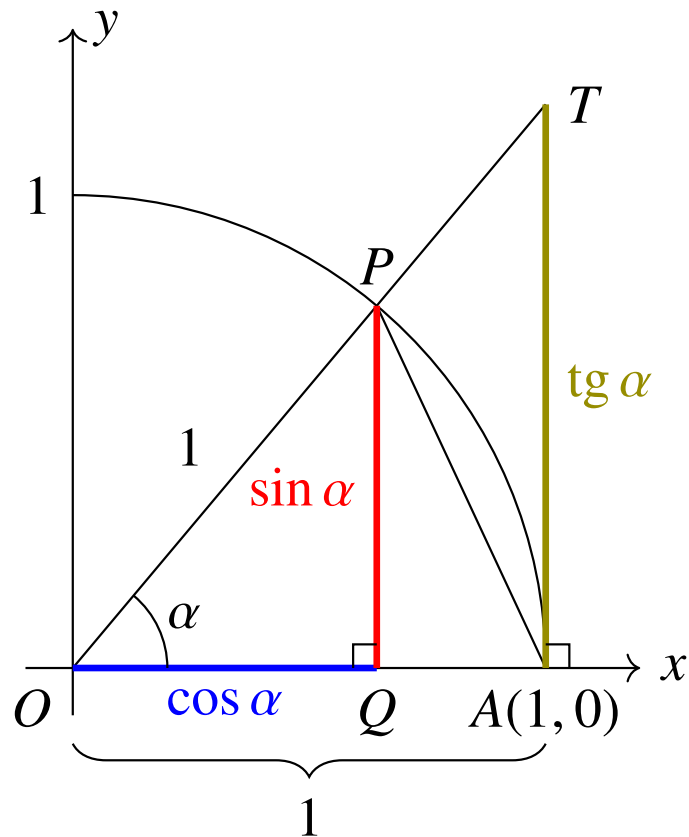


- $T_{OAP\Delta} < T_{OAP} \text{ körcikk} < T_{OAT\Delta}$
- $T_{OAP\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$
- $T_{OAP} \text{ körcikk} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \alpha = \frac{\alpha}{2}$
- $T_{OAT\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$
- Visszahelyettesítve: $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.
- Átrendezve: $\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$.
- A tétel adódik a rendőr-elvből.

Egy fontos határérték (bizonyítás)

Tétel (a kalkulus egyik legfontosabb határértéke)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

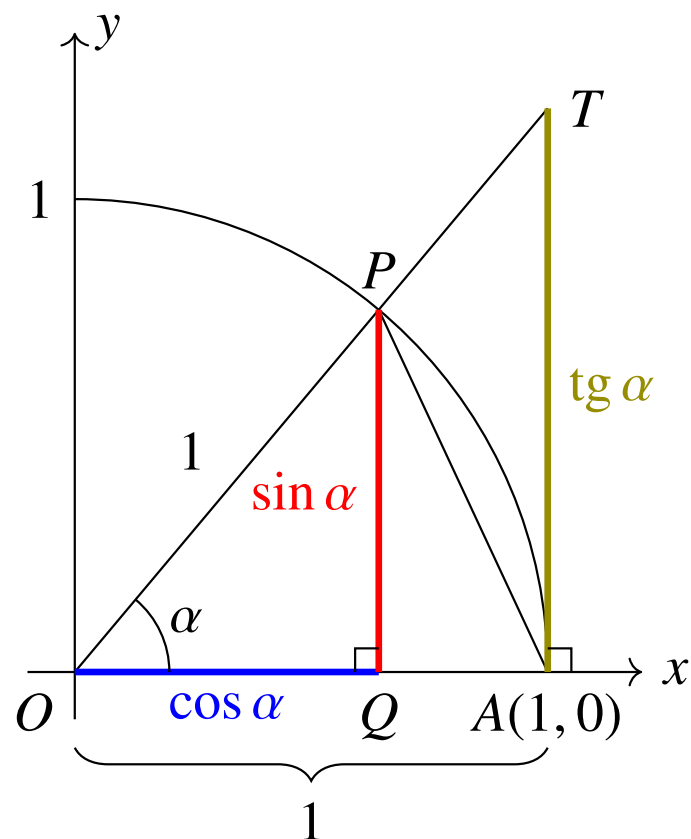


- $T_{OAP\Delta} < T_{OAP} \text{ körcikk} < T_{OAT\Delta}$
- $T_{OAP\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$
- $T_{OAP} \text{ körcikk} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \alpha = \frac{\alpha}{2}$
- $T_{OAT\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$
- Visszahelyettesítve: $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.
- Átrendezve: $\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$.
- A tétel adódik a rendőr-elvből.

Egy fontos határérték (bizonyítás)

Tétel (a kalkulus egyik legfontosabb határértéke)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

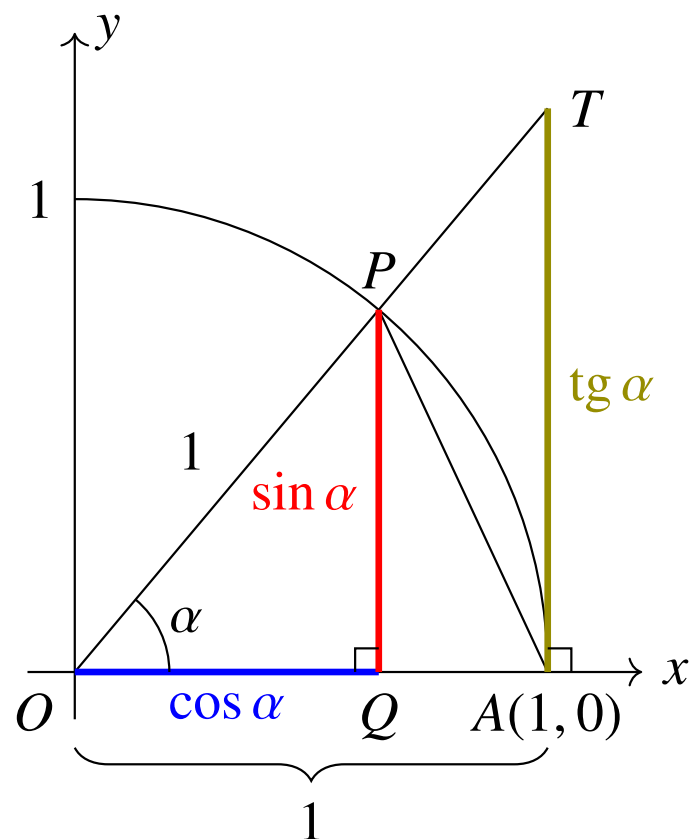


- $T_{OAP\Delta} < T_{OAP} \text{ körcikk} < T_{OAT\Delta}$
- $T_{OAP\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$
- $T_{OAP} \text{ körcikk} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \alpha = \frac{\alpha}{2}$
- $T_{OAT\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$
- Visszahelyettesítve: $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.
- Átrendezve: $\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$.
- A tétel adódik a rendőr-elvből.

Egy fontos határérték (bizonyítás)

Tétel (a kalkulus egyik legfontosabb határértéke)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

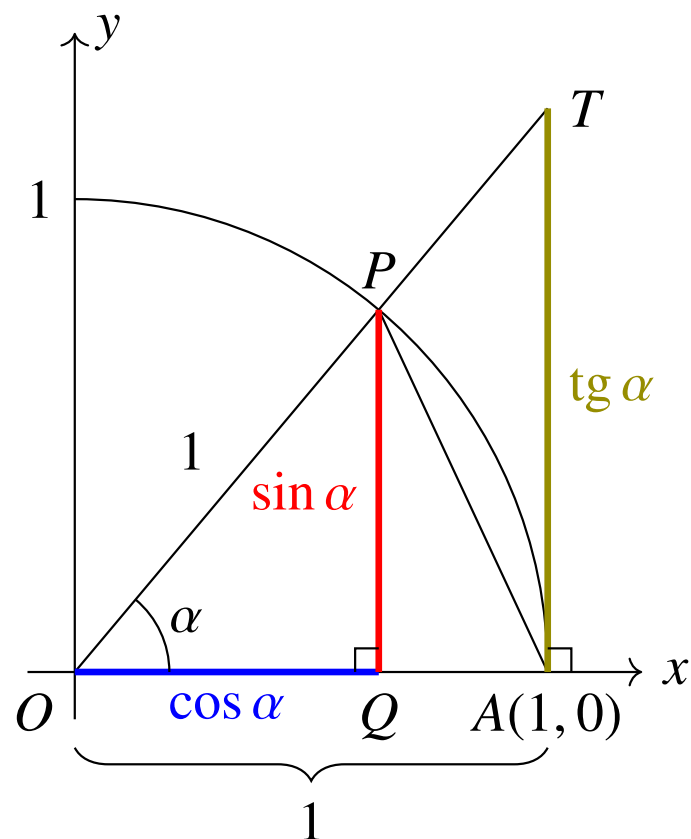


- $T_{OAP\Delta} < T_{OAP} \text{ körcikk} < T_{OAT\Delta}$
- $T_{OAP\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$
- $T_{OAP} \text{ körcikk} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \alpha = \frac{\alpha}{2}$
- $T_{OAT\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$
- Visszahelyettesítve: $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.
- Átrendezve: $\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$.
- A tétel adódik a rendőr-elvből.

Egy fontos határérték (bizonyítás)

Tétel (a kalkulus egyik legfontosabb határértéke)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

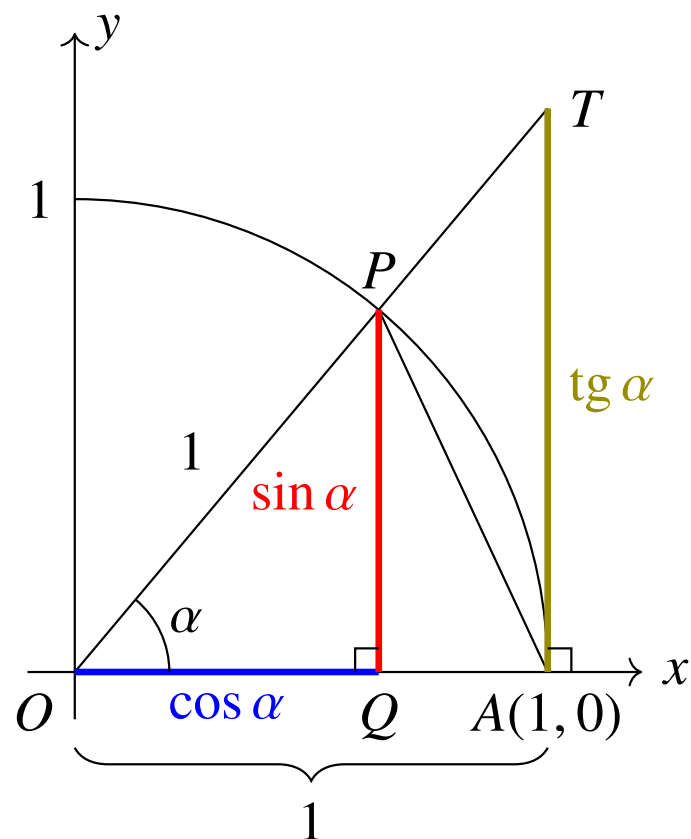


- $T_{OAP\Delta} < T_{OAP} \text{ körcikk} < T_{OAT\Delta}$
- $T_{OAP\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$
- $T_{OAP} \text{ körcikk} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \alpha = \frac{\alpha}{2}$
- $T_{OAT\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$
- Visszahelyettesítve: $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.
- Átrendezve: $\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$.
- A tétel adódik a rendőr-elvből.

Egy fontos határérték (bizonyítás)

Tétel (a kalkulus egyik legfontosabb határértéke)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

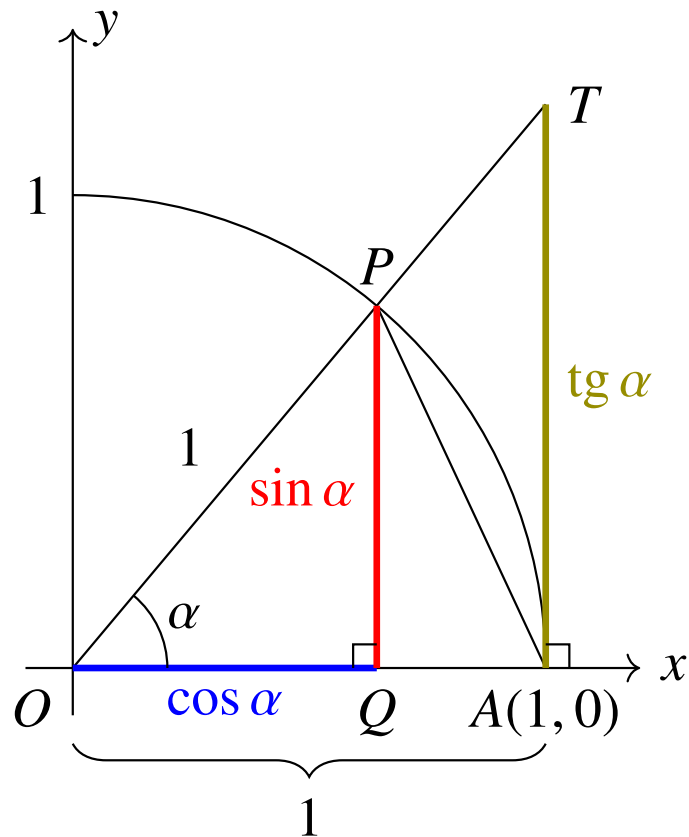


- $T_{OAP\Delta} < T_{OAP \text{ körcikk}} < T_{OAT\Delta}$
- $T_{OAP\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$
- $T_{OAP \text{ körcikk}} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \alpha = \frac{\alpha}{2}$
- $T_{OAT\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$
- Visszahelyettesítve: $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.
- Átrendezve: $\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$.
- A tétel adódik a rendőr-elvből.

Egy fontos határérték (bizonyítás)

Tétel (a kalkulus egyik legfontosabb határértéke)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

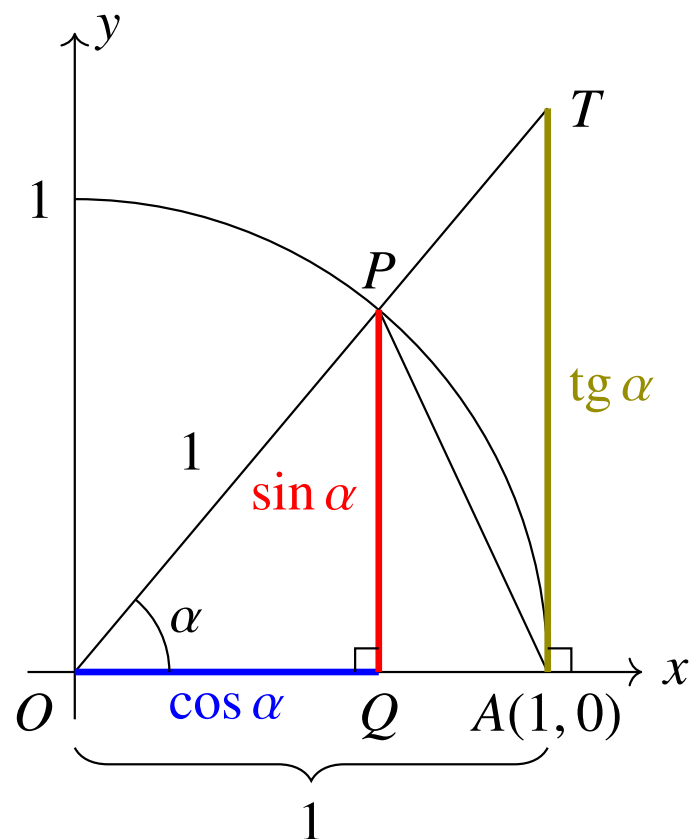


- $T_{OAP\Delta} < T_{OAP} \text{ körcikk} < T_{OAT\Delta}$
- $T_{OAP\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$
- $T_{OAP} \text{ körcikk} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \alpha = \frac{\alpha}{2}$
- $T_{OAT\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$
- Visszahelyettesítve: $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.
- Átrendezve: $\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$.
- A tétel adódik a rendőr-elvből.

Egy fontos határérték (bizonyítás)

Tétel (a kalkulus egyik legfontosabb határértéke)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$



- $T_{OAP\Delta} < T_{OAP} \text{ körcikk} < T_{OAT\Delta}$
- $T_{OAP\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$
- $T_{OAP} \text{ körcikk} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \alpha = \frac{\alpha}{2}$
- $T_{OAT\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$
- Visszahelyettesítve: $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$.
- Átrendezve: $\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$.
- A tétel adódik a rendőrelvből.

A végtelen határérték

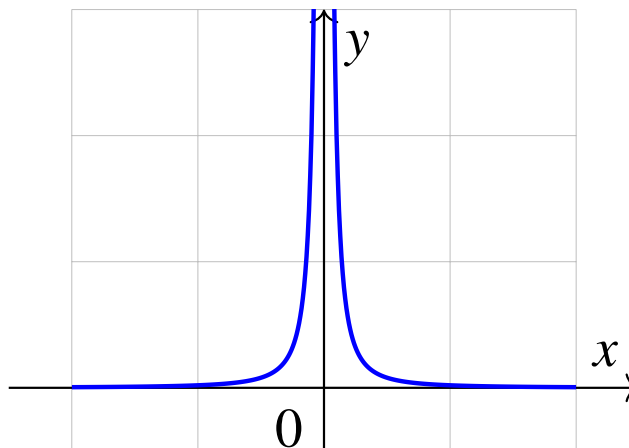
Definíció: Függvény végtelen határértéke

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **határértéke** $+\infty$ **az a pontban**, ha bármely $x_n \rightarrow a$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$. Hasonlóan, az $f(x)$ függvény **határértéke** $-\infty$ **az a pontban**, ha bármely $x_n \rightarrow a$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Példa

Legyen $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$



A végtelen határérték

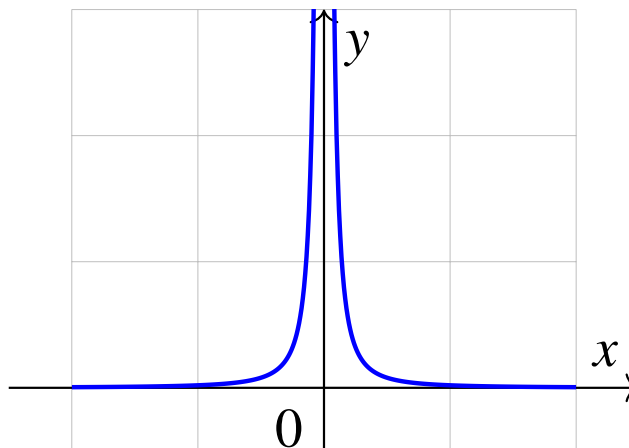
Definíció: Függvény végtelen határértéke

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **határértéke** $+\infty$ **az a pontban**, ha bármely $x_n \rightarrow a$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$. Hasonlóan, az $f(x)$ függvény **határértéke** $-\infty$ **az a pontban**, ha bármely $x_n \rightarrow a$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Példa

Legyen $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$



Jobb és bal oldali határértékek

Definíció: Jobb és bal oldali határértékek

Az $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **jobb oldali határértéke** L az a pontban, ha bármely $x_n \in A$ sorozatra, amely a -hoz jobbról tart (azaz $x_n > a$ és $x_n \rightarrow a$), az $f(x_n)$ sorozat L -hez tart:

$$x_n \rightarrow a^+ \implies f(x_n) \rightarrow L.$$

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$

Az $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **bal oldali határértéke** L az a pontban, ha bármely $x_n \in A$ sorozatra, amely a -hoz balról tart (azaz $x_n < a$ és $x_n \rightarrow a$), az $f(x_n)$ sorozat L -hez tart:

$$x_n \rightarrow a^- \implies f(x_n) \rightarrow L.$$

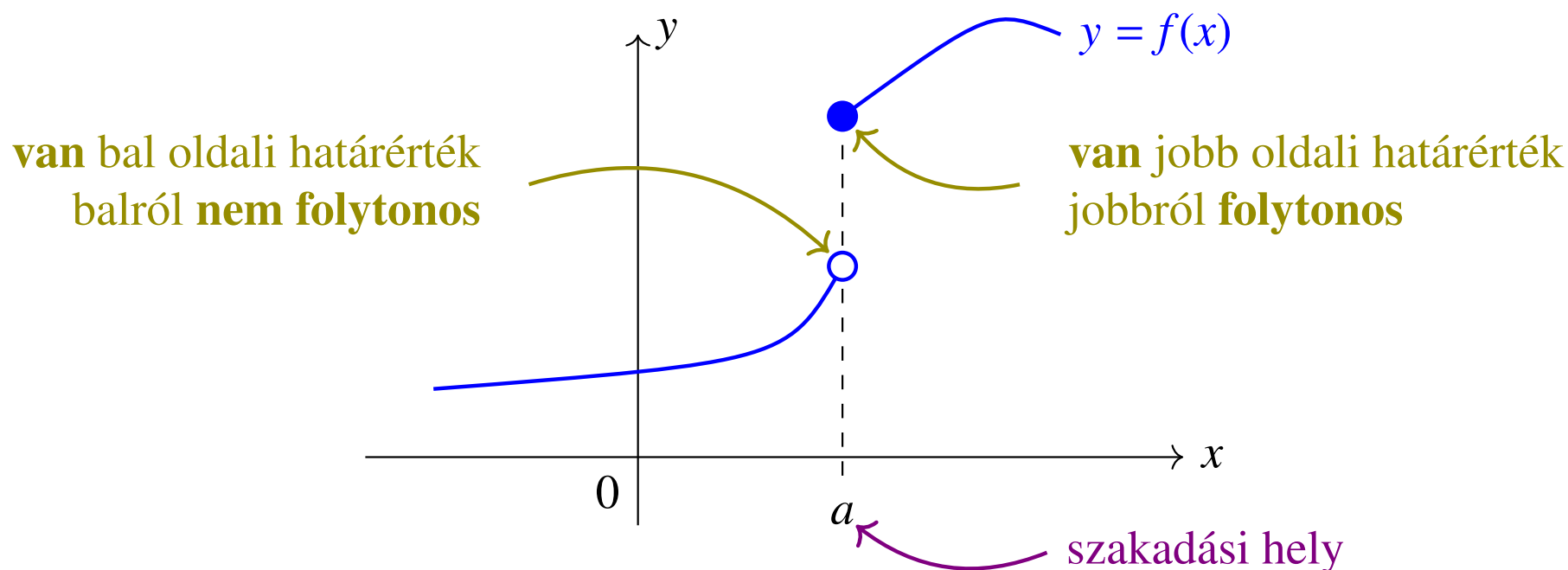
Jelölés: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$

Jobb és bal oldali határértékek (folyt.)

Tétel

Az $f(x)$ függvénynek akkor és csak akkor létezik a határértéke az a pontban, ha a jobb és bal oldali határértékei léteznek és megegyeznek:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$$



Határértékek a végtelenben

Definíció: Határértékek a végtelenben

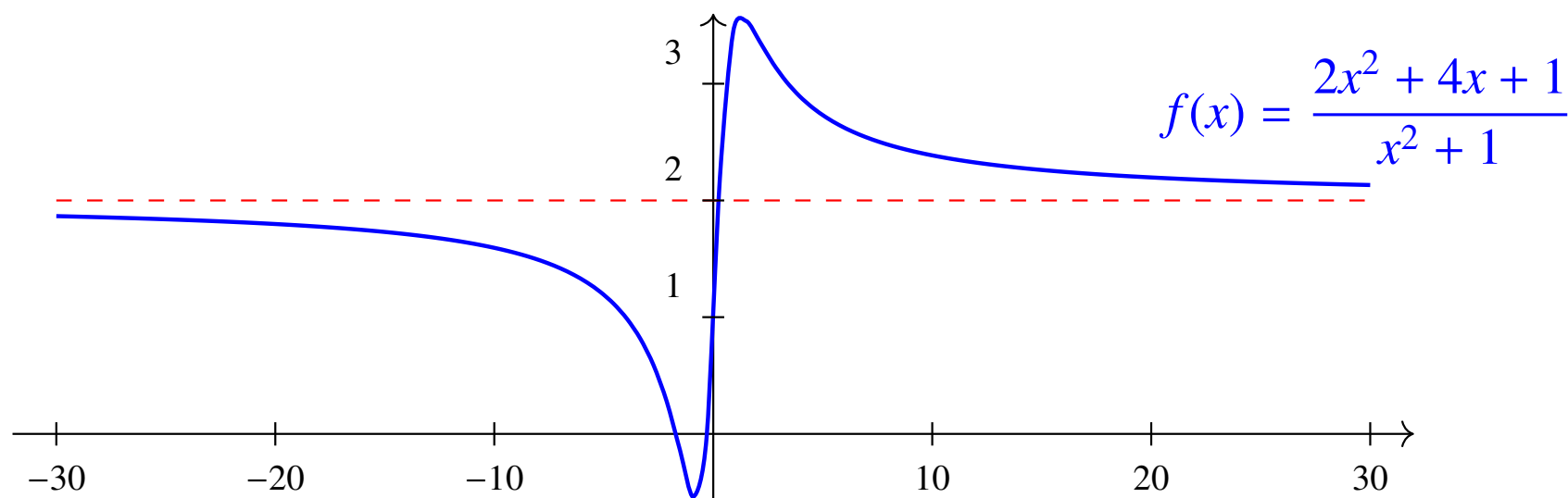
Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **határértéke** L a $\pm\infty$ -ben, ha bármely $x_n \rightarrow \pm\infty$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$.

Példák

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1} = 2$$

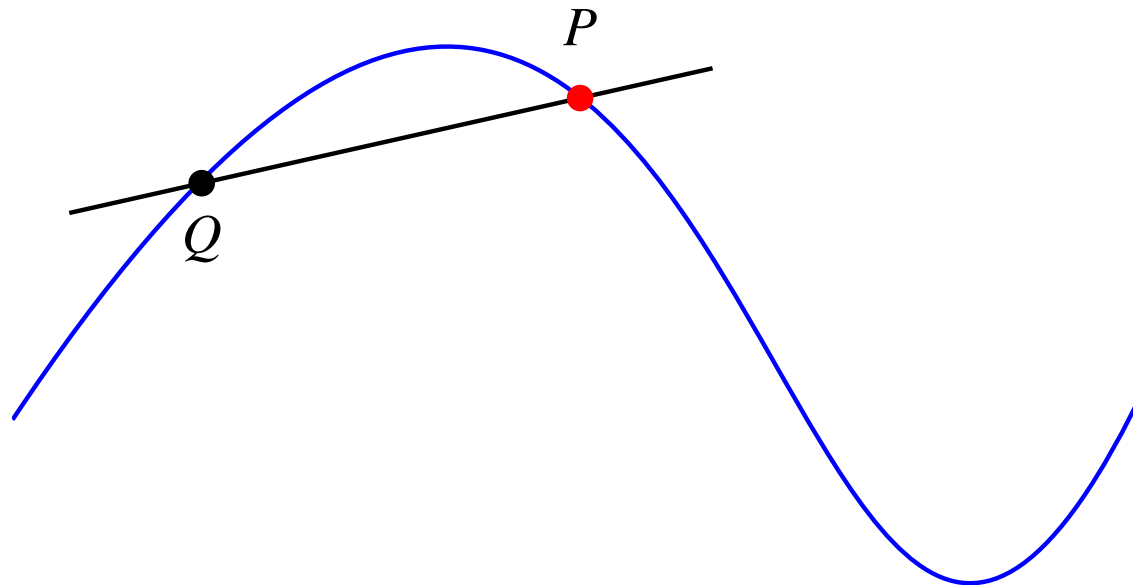


Tagolás

- 1 A végtelen és a nulla
- 2 Sorozatok
- 3 Sorozatok határértéke
- 4 Függvények folytonossága
- 5 Függvények határértéke
- 6 Görbe érintője**

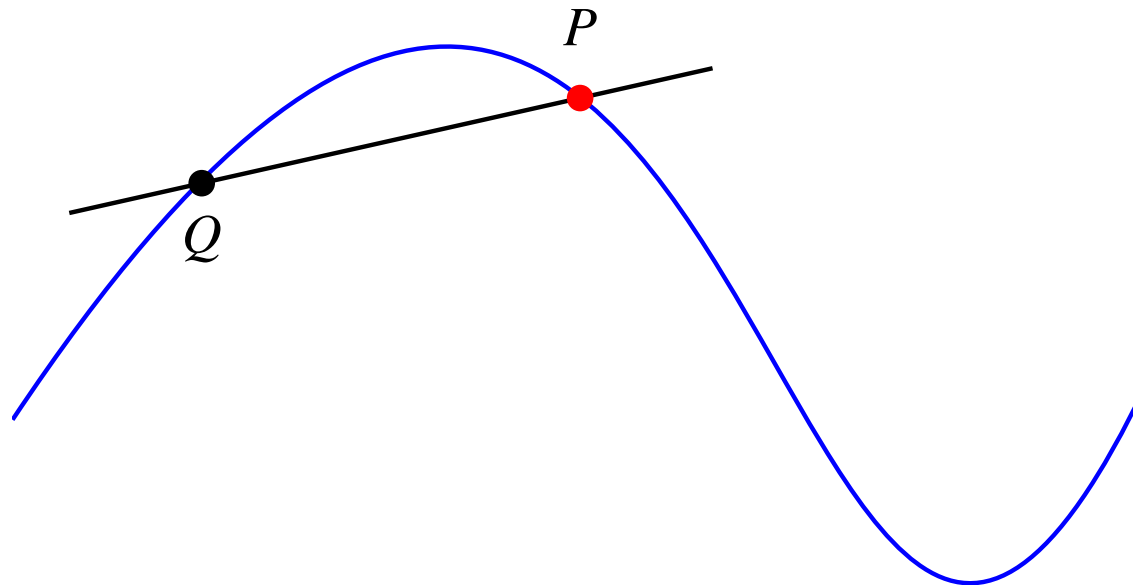
Az érintő a szelő határhelyzete

- Adott egy görbe és rajta egy P pont.
- Vegyünk egy Q pontot a görbén, és húzzunk egy szelőt P és Q között.
- Közelítsenek a $Q, R, \dots$ pontok a P ponthoz a görbén.
- Ekkor a szelő egyenesek közelítenek egy egyeneshez, amit a görbe P -beli érintőjének nevezünk.



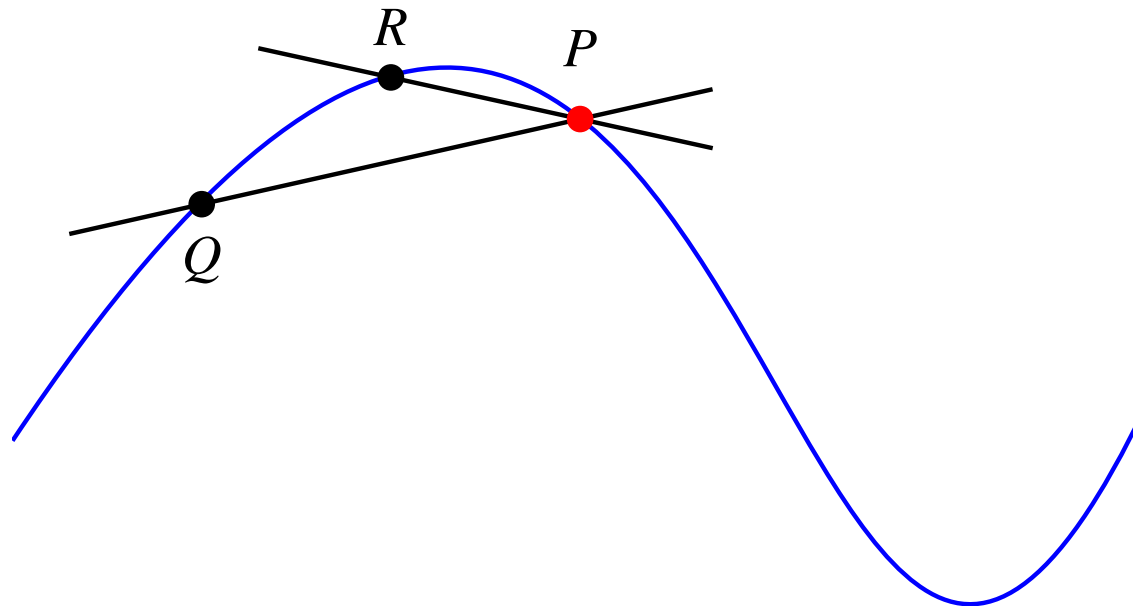
Az érintő a szelő határhelyzete

- Adott egy görbe és rajta egy P pont.
- Vegyünk egy Q pontot a görbén, és húzzunk egy szelőt P és Q között.
- Közelítsenek a $Q, R, \dots$ pontok a P ponthoz a görbén.
- Ekkor a szelő egyenesek közelítenek egy egyeneshez, amit a görbe P -beli érintőjének nevezünk.



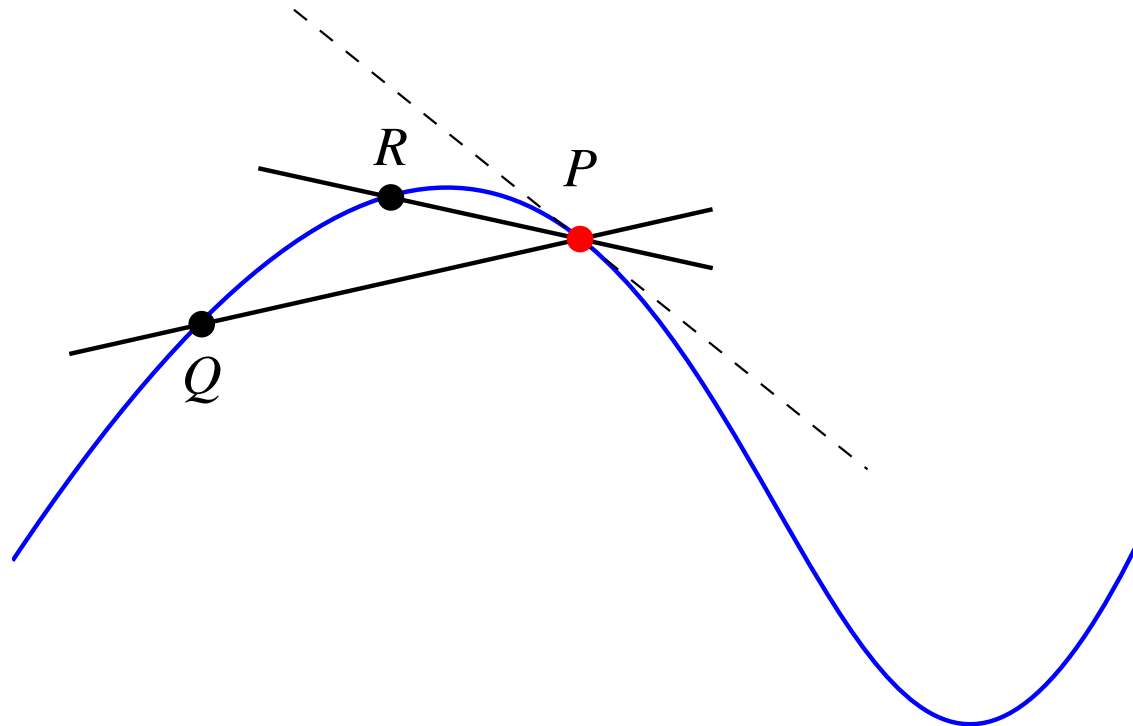
Az érintő a szelő határhelyzete

- Adott egy görbe és rajta egy P pont.
- Vegyünk egy Q pontot a görbén, és húzzunk egy szelőt P és Q között.
- Közelítsenek a $Q, R, \dots$ pontok a P ponthoz a görbén.
- Ekkor a szelő egyenesek közelítenek egy egyeneshez, amit a görbe P -beli érintőjének nevezünk.



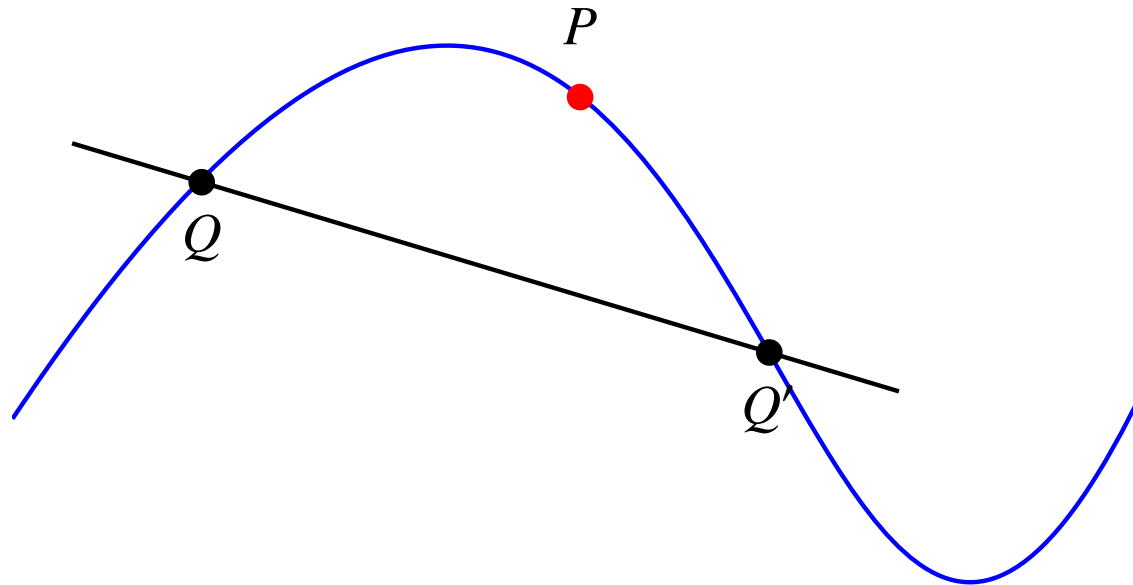
Az érintő a szelő határhelyzete

- Adott egy görbe és rajta egy P pont.
- Vegyünk egy Q pontot a görbén, és húzzunk egy szelőt P és Q között.
- Közelítsenek a $Q, R, \dots$ pontok a P ponthoz a görbén.
- Ekkor a szelő egyenesek közelítenek egy egyeneshez, amit a görbe **P -beli érintőjének** nevezünk.



Az érintő a szelő határhelyzete (foly.)

- *Szemléletünk szerint* akkor is az érintőt kapjuk, ha QQ' , RR' , stb. szelőket húzunk, ahol Q' , Q' , $R'R'$, ... pontok P -hez tartanak a görbén.

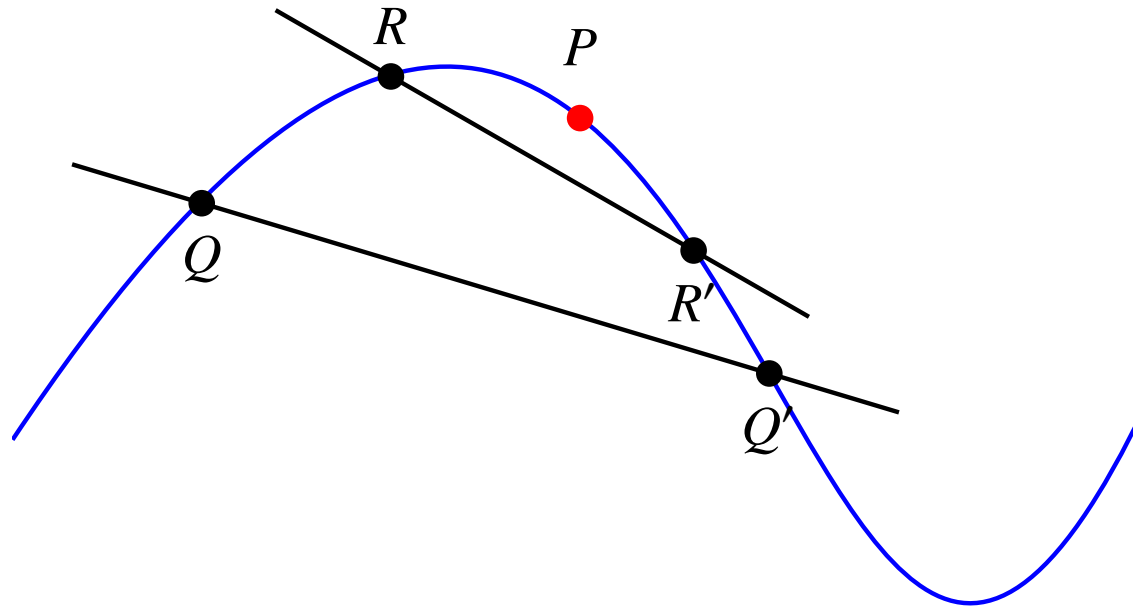


Definíció: Görbe sima pontja

Egy görbe **sima pontja** alatt olyan pontot értünk, amelyhez tartó szelők határhelyzete egy egyenes, azaz a görbének van érintője abban a pontban.

Az érintő a szelő határhelyzete (foly.)

- *Szemléletünk szerint* akkor is az érintőt kapjuk, ha QQ' , RR' , stb. szelőket húzunk, ahol Q' , Q' , $R'R'$, ... pontok P -hez tartanak a görbén.

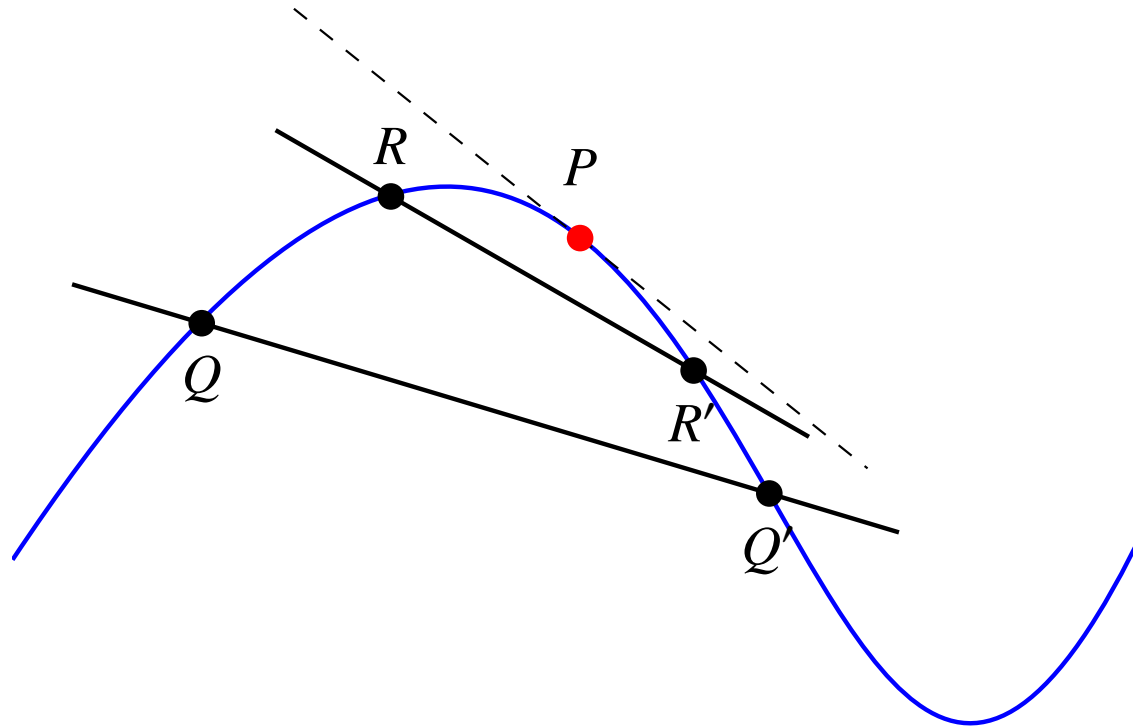


Definíció: Görbe sima pontja

Egy görbe **sima pontja** alatt olyan pontot értünk, amelyhez tartó szelők határhelyzete egy egyenes, azaz a görbének van érintője abban a pontban.

Az érintő a szelő határhelyzete (foly.)

- *Szemléletünk szerint* akkor is az érintőt kapjuk, ha QQ' , RR' , stb. szelőket húzunk, ahol Q' , Q' , $R'R'$, ... pontok P -hez tartanak a görbén.

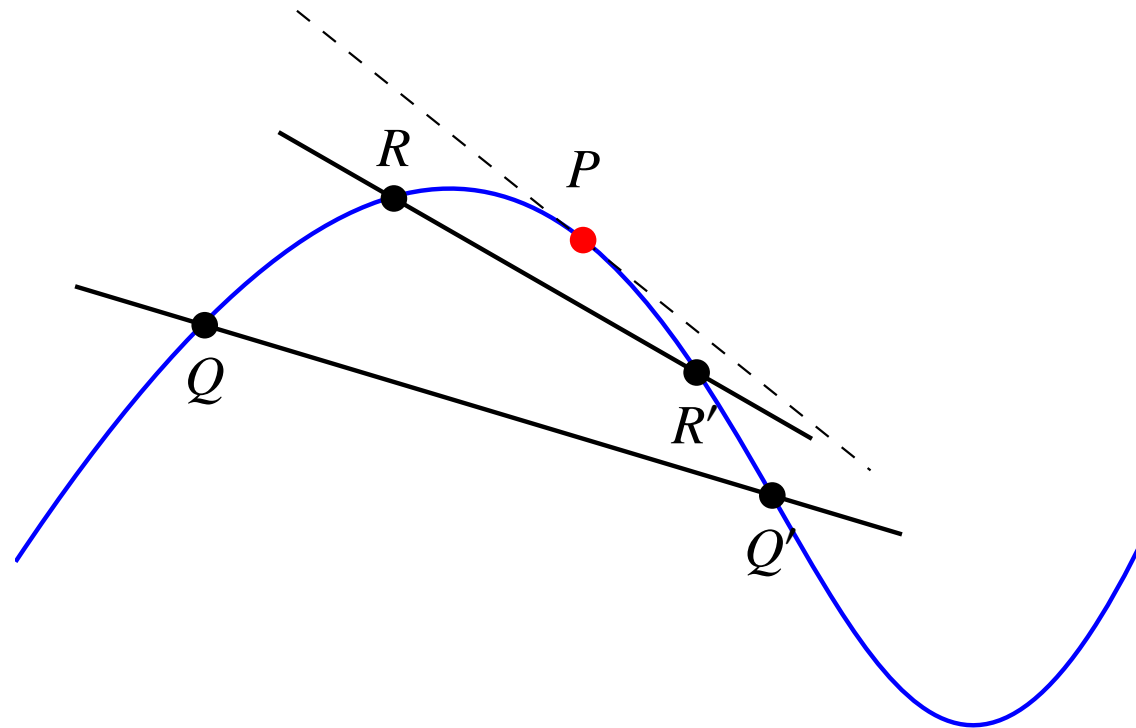


Definíció: Görbe sima pontja

Egy görbe **sima pontja** alatt olyan pontot értünk, amelyhez tartó szelők határhelyzete egy egyenes, azaz a görbének van érintője abban a pontban.

Az érintő a szelő határhelyzete (foly.)

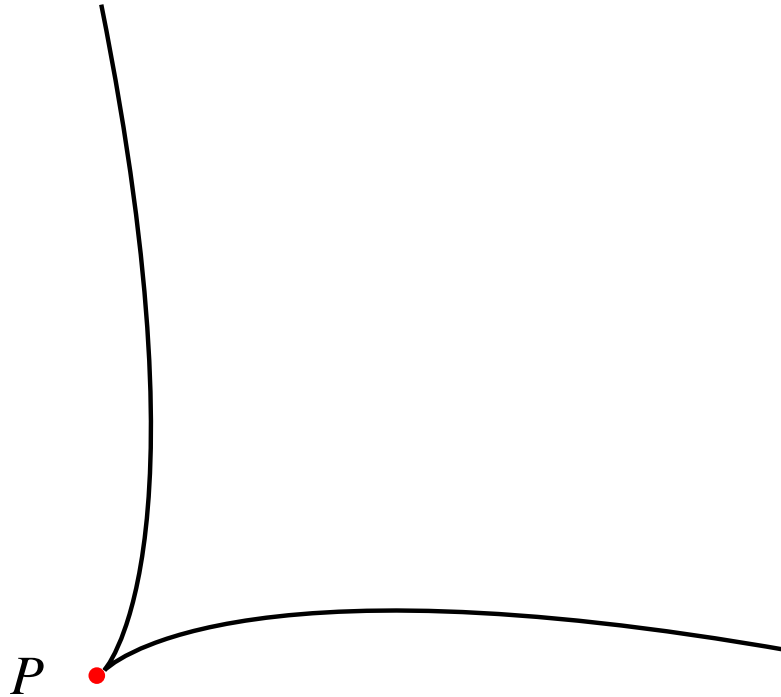
- *Szemléletünk szerint* akkor is az érintőt kapjuk, ha QQ' , RR' , stb. szelőket húzunk, ahol Q' , Q' , $R'R'$, ... pontok P -hez tartanak a görbén.



Definíció: Görbe sima pontja

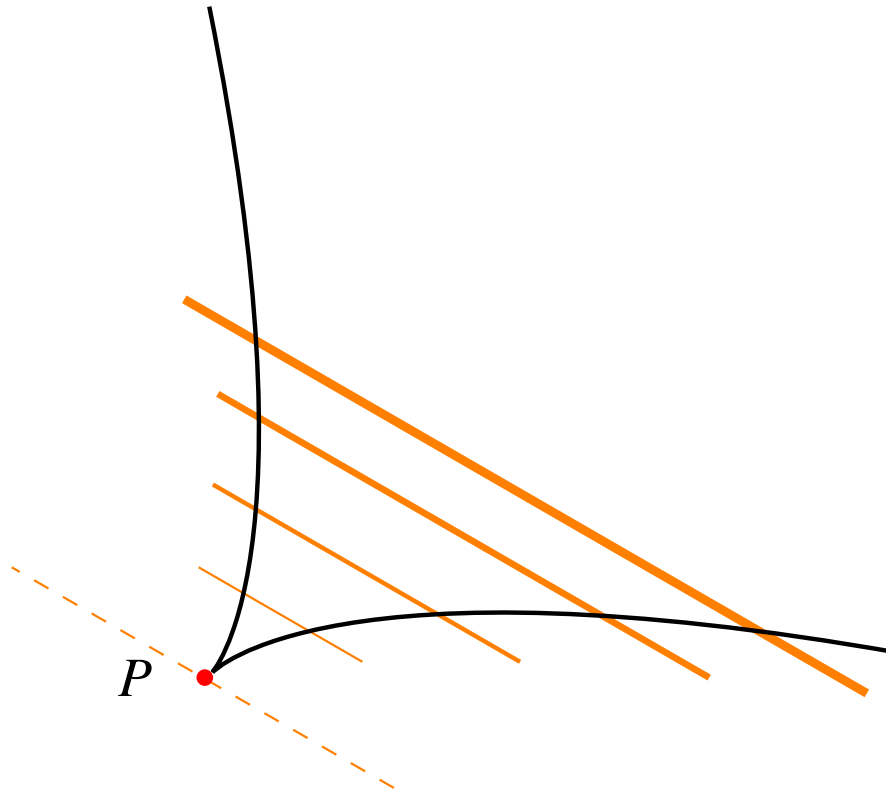
Egy görbe **sima pontja** alatt olyan pontot értünk, amelyhez tartó szelők határhelyzete egy egyenes, azaz a görbének van érintője abban a pontban.

Csőrszerű nemsima pont



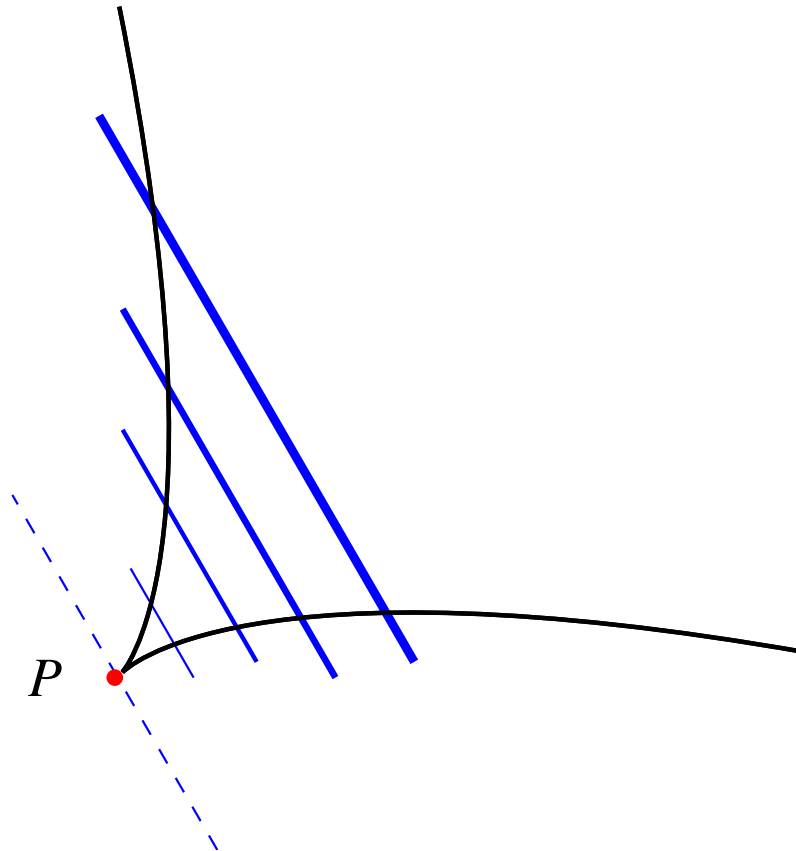
- A P pontban nem értelmezett az érintő.

Csőrszerű nemsima pont



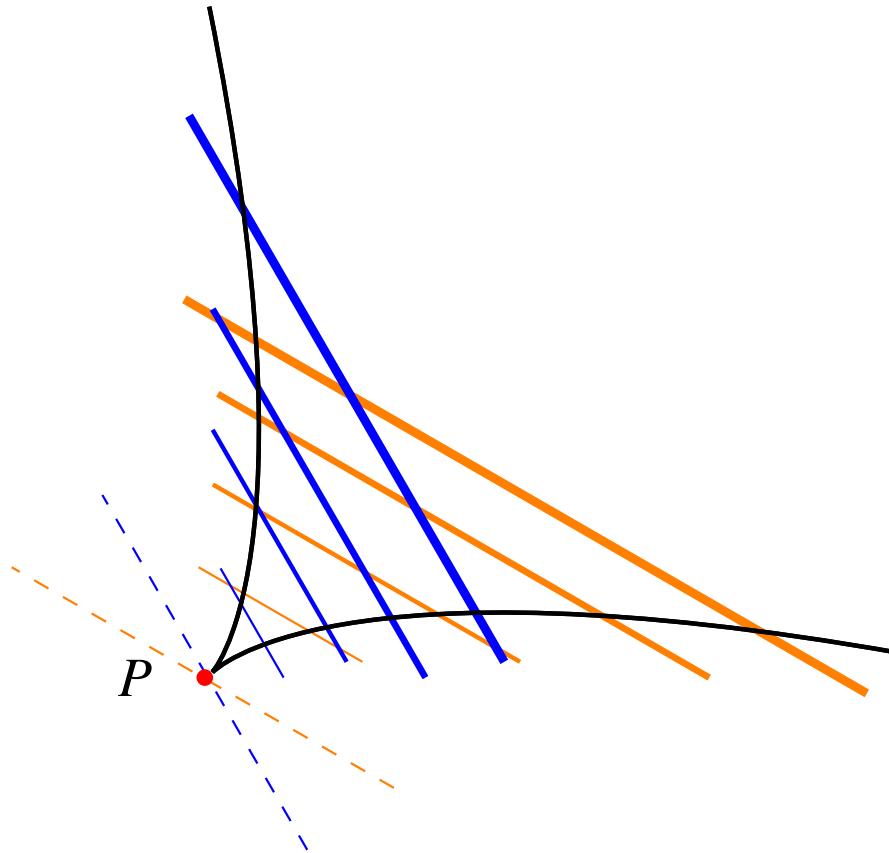
- A P pontban nem értelmezett az érintő.

Csőrszerű nemsima pont



- A P pontban nem értelmezett az érintő.

Csőrszerű nemsima pont



- A P pontban nem értelmezett az érintő.