

Valós számok és valós függvények (1. hét)

Matematika informatikusoknak 2

Nagy Gábor Péter

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

2025/2026-os tanév II. féléve

Tagolás

- 1 A valós számok és a valós számegyenes
- 2 Egyenesek, körök és parabolák
- 3 Függvények és grafikonok
- 4 Alapvető függvénytípusok
- 5 Trigonometrikus függvények
- 6 A trigonometrikus azonosságok
- 7 Műveletek függvényekkel és függvény tulajdonságok
- 8 Függvény transzformációk

Tagolás

- 1 A valós számok és a valós száme egyenes
- 2 Egyenesek, körök és parabolák
- 3 Függvények és grafikonok
- 4 Alapvető függvénytípusok
- 5 Trigonometrikus függvények
- 6 A trigonometrikus azonosságok
- 7 Műveletek függvényekkel és függvény tulajdonságok
- 8 Függvény transzformációk

Valós számok

- Az analízis nagyrészt a valós számrendszer tulajdonságain alapul
- A **valós számok** a *véges* vagy *végtelen* tizedes törtekkel kifejezhető számok:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} &= 0.75000000 \dots \\ \sqrt{2} &= 1.4142135623 \dots \\ \pi &= 3.1415926535 \dots\end{aligned}$$

- A három pont (...) mindhárom esetben arra utal, hogy a tizedestört-kifejtés valójában végtelen hosszú
- Minden tizedestört-kifejtés egyértelműen meghatároz egy valós számot, fordítva azonban ez nem áll:

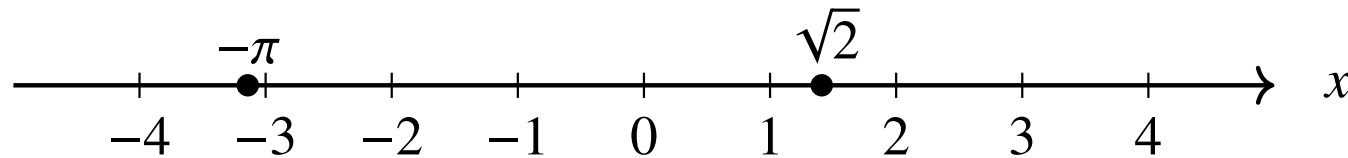
$$1.000 \dots = 0.999 \dots$$

Figyelem

Mivel a informatikában az angol egyeduralkodó, ezért mi is a **tizedes pontot** fogjuk használni a a magyar **tizedes vessző** helyett.

A valós számegyenes

- A valós számokat egy egyenesen ábrázolhatjuk; ezt az egyenest valós számegyenesnek nevezzük
- A számegyenes minden pontja egy valós számnak felel meg, és minden valós számnak van egy pontja a számegyenesen



- A számegyenes egyben a valós számok rendezési tulajdonságait is szemlélteti
- Ha egy szám jobbra van egy másiknál, akkor nagyobb, ha balra, akkor kisebb

Valós számok rendezése

- A valós számok között egy természetes **rendezési viszony** van:

$$a < b$$

- Ez a rendezés *teljes, tranzitív és antiszimmetrikus*
- A rendezés és az alpműveletek között az alábbi **összefüggések** állnak fenn:

$$a < b \quad \text{és} \quad c < d \quad \implies \quad a \pm c < b \pm d$$

$$a < b \quad \text{és} \quad c > 0 \quad \implies \quad ac < bc$$

$$a < b \quad \text{és} \quad c < 0 \quad \implies \quad ac > bc$$

$$0 < a < b \quad \implies \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$$

- A valós számok **teljességi tulajdonsága** lényegében azt mondja ki, hogy a valós számegegyenesen nincsenek „lyukak”

A valós számok részhalmazai

- A valós számoknak számos fontos részhalmaza van, amelyek különböző tulajdonságokkal rendelkeznek
- Természetes számok ($\mathbb{N}$): $1, 2, 3, \dots$
- Egész számok ($\mathbb{Z}$): $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- Racionális számok ($\mathbb{Q}$): két egész szám hányadosaként kifejezhető számok
- Irracionális számok: nem racionális valós számok, például $\sqrt{2}, \pi$

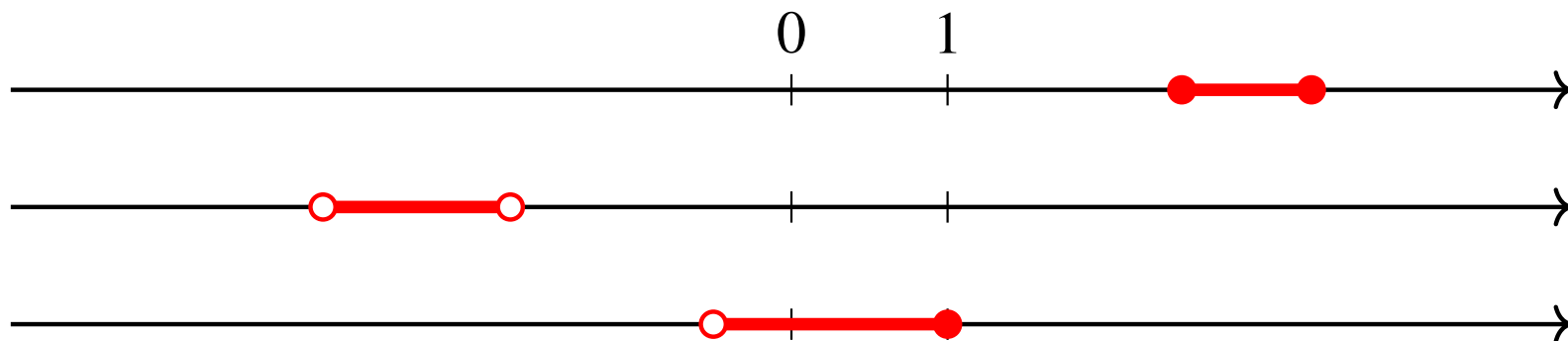
Tétel

A $\sqrt{2}$ irracionális szám.

Intervallumok

- Az **intervallum** a valós számok egy olyan részhalmaza, amely *két érték között az összes számot* tartalmazza

Típus	Jelölés	Definíció	Példa
Zárt	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	$\left[\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right]$
Nyílt	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	$(-3, -1.8)$
Balra zárt	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	$[0, 1)$
Jobbra zárt	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	$(-0.5, 1]$
Végtelen	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$	$(-\infty, 1)$



Egyenlőtlenségek megoldása

- Egy x -re felírt egyenlőtlenség megoldása: megadjuk azt a halmazt, amelynek elemeit x helyére írva az egyenlőtlenség teljesül
- Ezt **megoldáshalmaznak** nevezzük (általában intervallum vagy intervallumok uniója)

Feladat

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget!

$$\frac{6}{x-1} \geq 2$$

- $x \neq 0$, különben a tört nem lenne értelmezve
- $x > 1$, különben a tört negatív lenne
- Átrendezve: $6 \geq 2(x-1) \implies 8 \geq 2x \implies x \leq 4$
- Megoldáshalmaz az $(1, 4]$ félig zárt intervallum



Abszolútérték

- Az x szám abszolútértéke:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

- $|x - y|$ az x és y közötti távolsága a valós számegegyenesen
- Az abszolútérték mindig nem-negatív

Az abszolútérték tulajdonságai:

Az előjel megváltoztatása nem változtat az abszolútértéken	$ a = -a $
Szorzat abszolútértéke az abszolútértékek szorzata	$ ab = a b $
Hányados abszolútértéke az abszolútértékek hányadosa (feltéve, hogy $b \neq 0$)	$\left \frac{a}{b} \right = \frac{ a }{ b }$
A háromszög-egyenlőtlenség	$ a + b \leq a + b $

Abszolútértékes egyenlőtlenségek megoldása

Feladat

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget!

$$\left| 5 - \frac{2}{x} \right| < 1$$

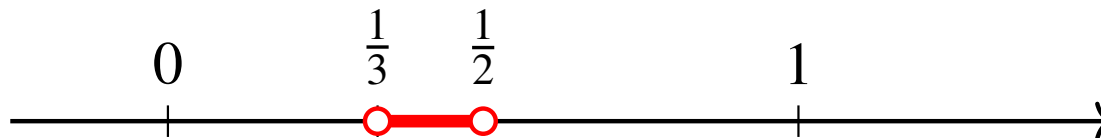
Megoldás:

$$\left| 5 - \frac{2}{x} \right| < 1 \iff -1 < 5 - \frac{2}{x} < 1$$

$$\iff -6 < -\frac{2}{x} < -4$$

$$\iff \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$$

A megoldáshalmaz az $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ nyílt intervallum.



Tagolás

- 1 A valós számok és a valós számegyenes
- 2 Egyenesek, körök és parabolák**
- 3 Függvények és grafikonok
- 4 Alapvető függvénytípusok
- 5 Trigonometrikus függvények
- 6 A trigonometrikus azonosságok
- 7 Műveletek függvényekkel és függvény tulajdonságok
- 8 Függvény transzformációk

Koordinátarendszerek a síkon

Definíció: Koordinátarendszer

A matematikában a **koordinátarendszer** egy olyan fogalom (*eljárás, leképezés*), ami **átfordítja** a **geometria** világát a **számolás** világába.

Példák koordinátarendszerekre: A számegyenes és a gömbfelület

Azáltal, hogy az e egyenesen **kijelölünk** két pontot, és ezekhez 0-t, illetve 1-et írunk, egy **bijekciót** hozunk létre e **ponthalmaza** és $\mathbb{R}$ között.

Másik fontos példa a **gömbfelület** földrajz órán tanult koordinátázása.

A síkon a különböző koordinátarendszerekben

- a pontoknak **számpárok**,
- a ponthalmazoknak **kétismeretlenes egyenletek** felelnek meg, pl.

$$y = 5x - 2 \text{ (egyenes), } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9 \text{ (kör).}$$

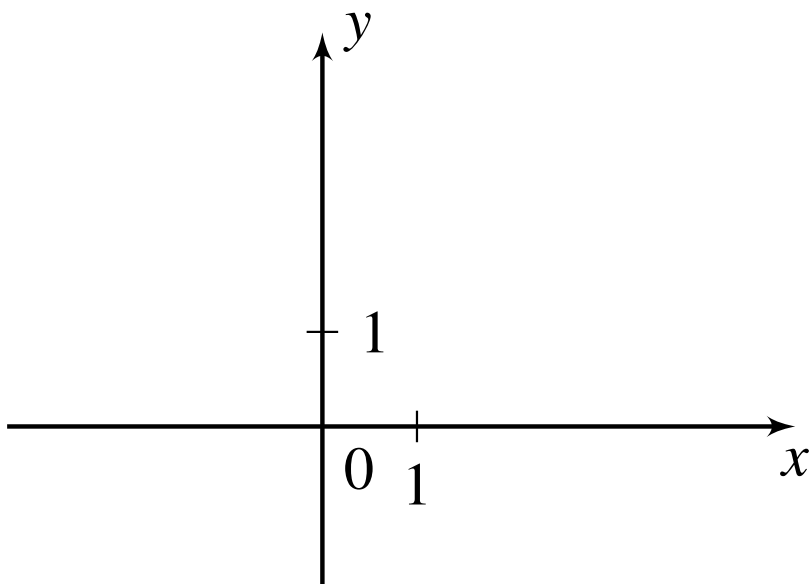
- Az **illeszkedést** (vagy **tartalmazást**) **behelyettesítéssel** adjuk meg.

VIGYÁZAT! Egyenletben mindig legyen egyenlőségjel!

A Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer

A Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer **alkotó elemeit** általános iskolában tanuljuk:

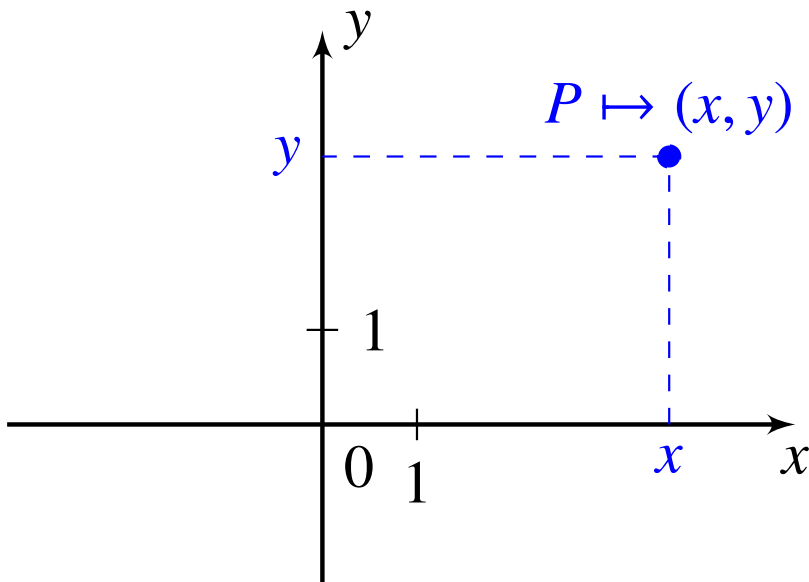
- 1 Két, egymásra merőleges irányított egyenes: az **x -** és **y -tengely**.
- 2 Az egyenesek metszéspontja az **origó**.
- 3 Az **egységek** rögzítésével a tengelyeket **számegyenesekké** tesszük.



A Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer

A Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer **alkotó elemeit** általános iskolában tanuljuk:

- 1 Két, egymásra merőleges irányított egyenes: az **x -** és **y -tengely**.
- 2 Az egyenesek metszéspontja az **origó**.
- 3 Az **egységek** rögzítésével a tengelyeket **számegyenesekké** tesszük.



Legyen **P** tetszőleges síkbeli pont és tekintsük P -nek a **P_x, P_y merőleges vetületeit** az x, y -tengelyekre. Mivel a tengelyek számegyenesek, ezek meghatároznak **$x, y \in \mathbb{R}$ valós számokat**.

Azt mondjuk, hogy **P koordinátái** ebben a koordinátarendszerben **(x, y)** .

A polárkoordináta-rendszer

- 1 A polárkoordináta-rendszer alkotóelemei az **origó**, valamint egy O kezdőpontú **félegyenes**.
- 2 A P pont polárkoordinátái az (r, φ) számpár, ahol $r = |OP|$ távolság és az $\overrightarrow{OP}$ vektornak a félegyenesünkkel bezárt φ szöge.
- 3 A koordinátarendszer váltást Descartes-féle az

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

összefüggés adja meg.

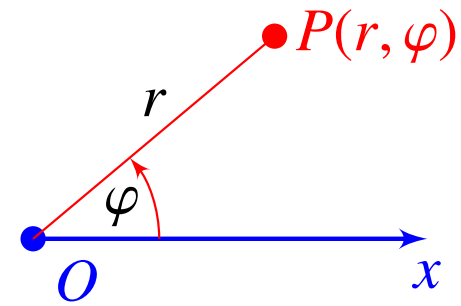


A polárkoordináta-rendszer

- 1 A polárkoordináta-rendszer alkotóelemei az **origó**, valamint egy O kezdőpontú **félegyenes**.
- 2 A P pont polárkoordinátái az (r, φ) számpár, ahol $r = |OP|$ távolság és az $\overrightarrow{OP}$ vektornak a félegyenesünkkel bezárt φ szöge.
- 3 A koordinátarendszer váltást Descartes-félére az

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

összefüggés adja meg.

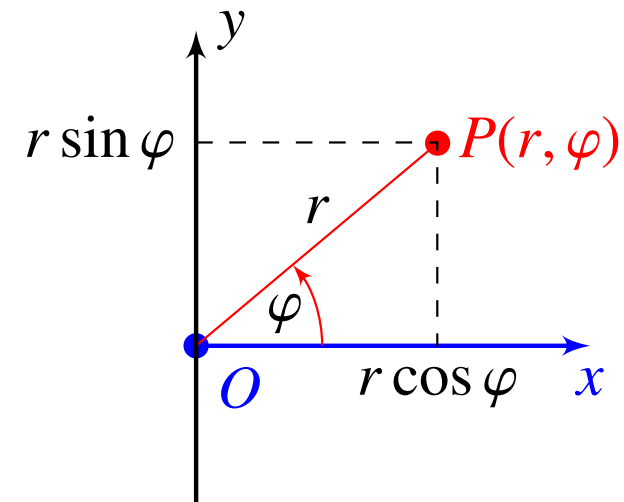


A polárkoordináta-rendszer

- 1 A polárkoordináta-rendszer alkotóelemei az **origó**, valamint egy O kezdőpontú **félegyenes**.
- 2 A P pont polárkoordinátái az (r, φ) számpár, ahol $r = |OP|$ távolság és az $\overrightarrow{OP}$ vektornak a félegyenesünkkel bezárt φ szöge.
- 3 A koordinátarendszer váltást Descartes-félére az

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

összefüggés adja meg.

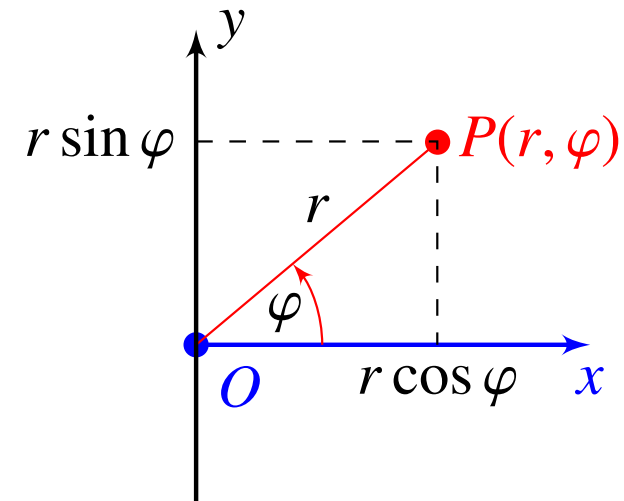


A polárkoordináta-rendszer

- 1 A polárkoordináta-rendszer alkotóelemei az **origó**, valamint egy O kezdőpontú **félegyenes**.
- 2 A P pont polárkoordinátái az (r, φ) számpár, ahol $r = |OP|$ távolság és az $\overrightarrow{OP}$ vektornak a félegyenesünkkel bezárt φ szöge.
- 3 A koordinátarendszer váltást Descartes-féle az

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

összefüggés adja meg.



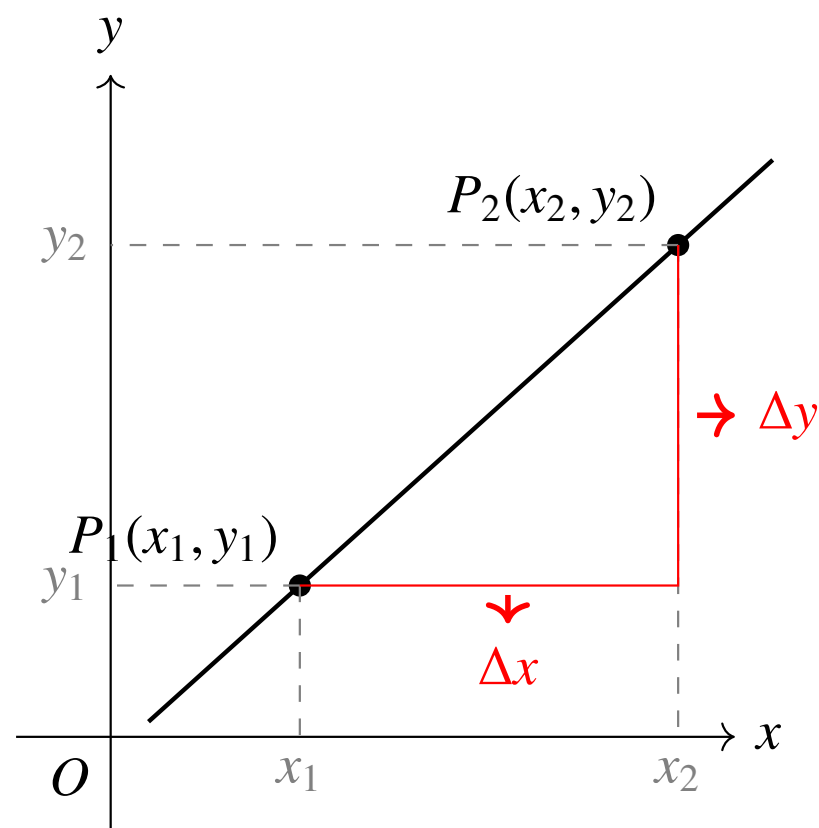
Változások és növekmények

- Ha egy a valós érték a_1 -ről a_2 -re változik, akkor a **változás**, vagy **növekmény**

$$\Delta a = a_2 - a_1$$

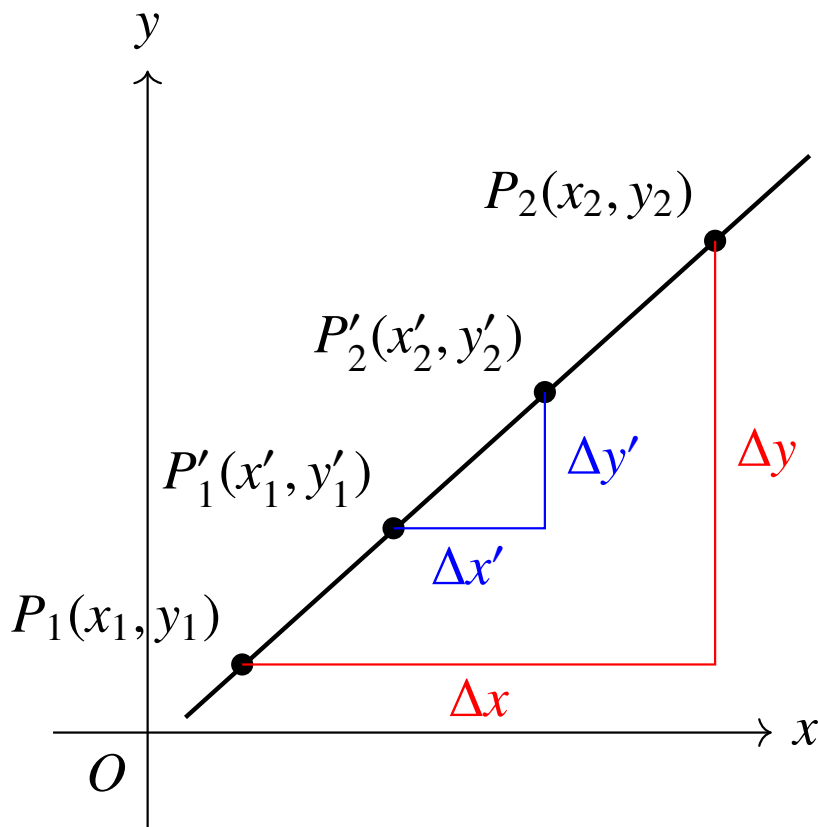
- Adott $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontok esetén a P_1P_2 szakasz **meredeksége**:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Egyenes egyenlete

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$



- Egy egyenes két pontja ugyanazt a meredekséget határozza meg
- Egy $P(x_0, y_0)$ ponton átmenő, m meredekségű egyenes egyenlete:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- Két ponton átmenő egyenes egyenlete:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- Egyenes egyenlete általános alakban meredekséggel és tengelymetszettel:

$$y = mx + b$$

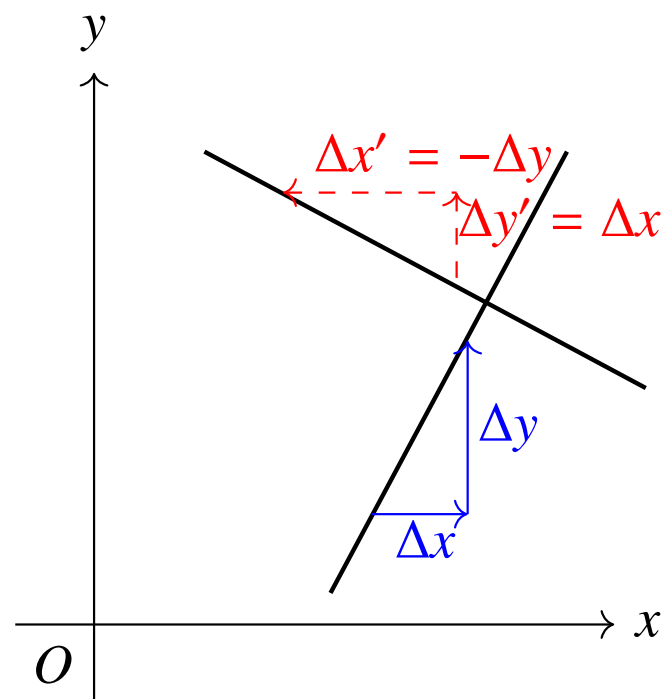
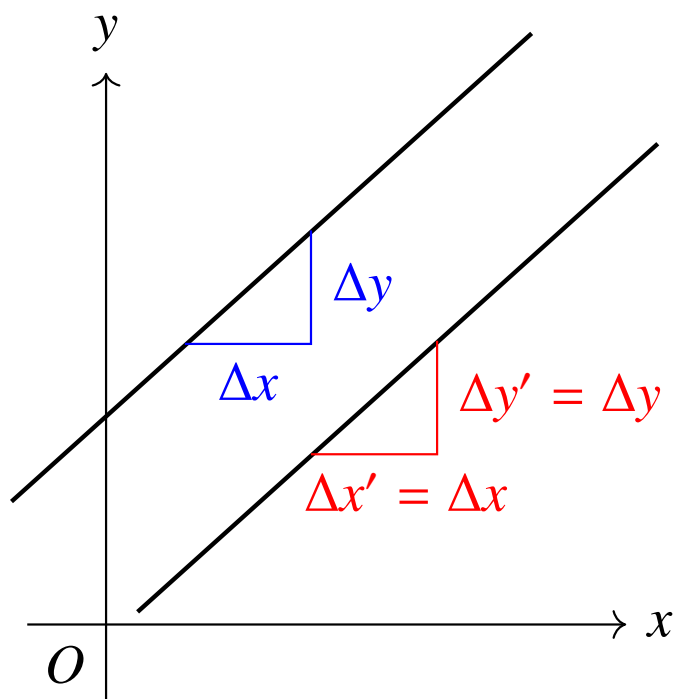
Párhuzamos és merőleges egyenesek

- Az m és m' meredekségű egyenesek **párhuzamosak**, ha $m = m'$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = m'$$

- Az m és m' meredekségű egyenesek **merőlegesek**, ha $m \cdot m' = -1$

$$m' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{\Delta x}{-\Delta y} = -\frac{1}{m}$$



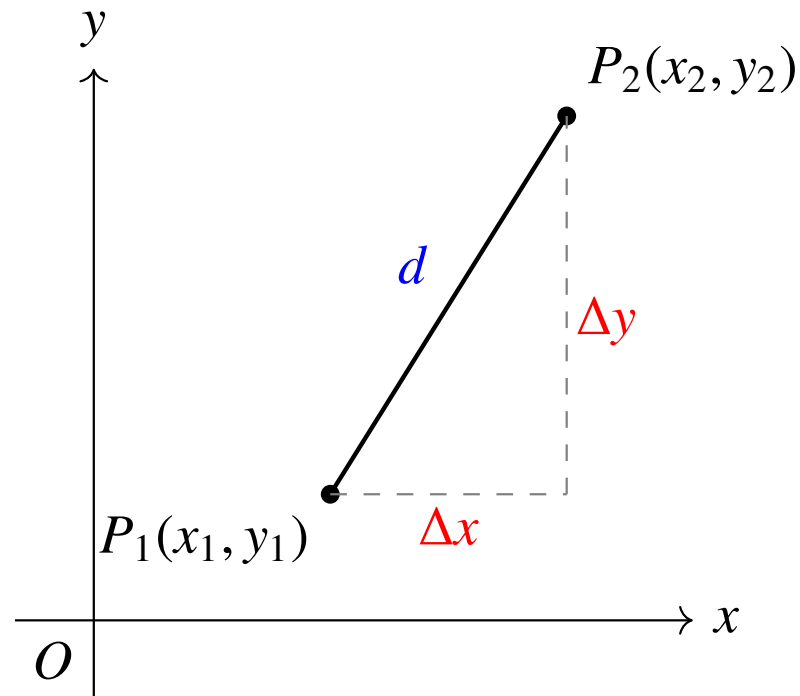
Két pont távolsága

- Adott $P(x, y)$ pont origótól való távolsága a Pitagorasz-tétel alapján:

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Adott $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontok távolsága

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



A kör egyenlete

- A kör azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek egy adott $C(h, k)$ ponttól (középpont) konstans r távolságra vannak

- A kör egyenlete:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

- Az origó középpontú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Feladat

Határozzuk meg a kör középpontját és sugarát!

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

$$\text{Csoportosítva:} \quad (x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 3$$

$$\text{Teljes négyzetté alakítva:} \quad (x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 = 3$$

$$\text{Rendezve:} \quad (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

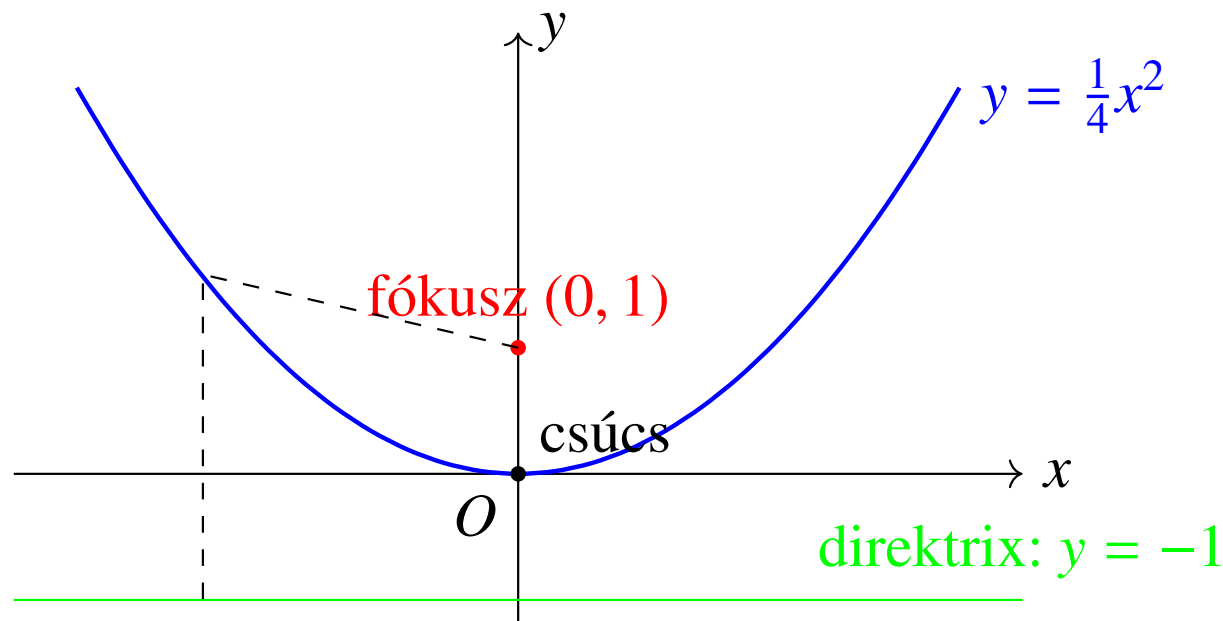
Ez alapján a középpont $C(2, -3)$ és a sugár $r = 4$.

A parabola egyenlete

- A parabola azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek egy adott F ponttól (fókusztól) és egy adott egyenestől (direktrix) egyenlő távolságra vannak
- A koordinátarendszer megfelelő megválasztásával a parabola egyenlete

$$2py = x^2$$

ahol p a fókusztól és a direktrix távolságának fele



A parabola egyenlete

Feladat

Határozzuk meg a parabola csúcspontját és alakját!

$$y = -2x^2 + 8x - 5$$

$$\text{Faktorizálva: } y = -2(x^2 - 4x) - 5$$

$$\text{Teljes négyzetté alakítva: } y = -2(x^2 - 4x + 4 - 4) - 5$$

$$\text{Rendezve: } y = -2(x - 2)^2 + 8 - 5$$

$$\text{Végeredmény: } y = -2(x - 2)^2 + 3$$

A csúcspont $(2, 3)$, és mivel $a = -2 < 0$, a parabola lefelé nyílik.

Tagolás

- 1 A valós számok és a valós számegyenes
- 2 Egyenesek, körök és parabolák
- 3 Függvények és grafikonok**
- 4 Alapvető függvénytípusok
- 5 Trigonometrikus függvények
- 6 A trigonometrikus azonosságok
- 7 Műveletek függvényekkel és függvény tulajdonságok
- 8 Függvény transzformációk

Függvények

- A függvény egy olyan **hozzárendelés**, amely minden x értékhez pontosan egy y értéket rendel hozzá

$$y = f(x)$$

- A függvény **értelmezési tartománya (domain)** az x értékek halmaza, amelyekre a függvény definiálva van
- A függvény **értékkészlete (range)** az y értékek halmaza, amelyeket a függvény felvehet

$$f : A \rightarrow B \quad \text{vagy} \quad f : D_f \rightarrow R_f$$

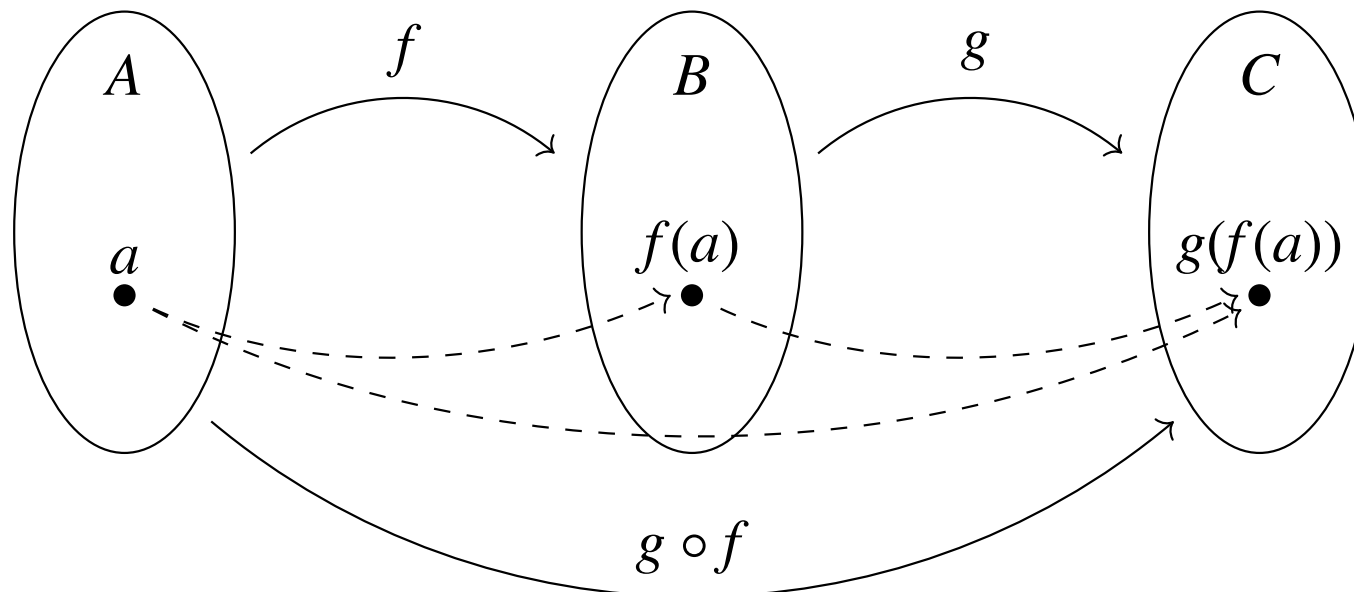
- A függvény értelmezési tartománya és értékkészlete bármilyen halmaz lehet, de a leggyakoribb esetben valós számokból állnak
- Egy függvényt tekinthetünk egy **automatának**, amely minden x inputra egy $y = f(x)$ outputot ad

Leképezések (függvények) szorzata

Definíció: Leképezések (függvények) szorzata

Az $f : A \rightarrow B$ és $g : B \rightarrow C$ leképezések **szorzata** alatt azt a $h : A \rightarrow C$ leképezést értjük, amelyre $a \in A$ esetén $h(a) = g(f(a))$ teljesül. Jelöléssel: $h = g \circ f$, azaz $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Megjegyzés. NAGYON KELLEMETLEN, hogy az $f \circ g$ leképezésnél először mindig a g -t kell alkalmazni!!



Példák leképezések szorzatára

Példák

- Az f leképezés minden hallgatóhoz hozzárendeli a mobilszámát 06 ... alakban. A g leképezés minden 10^{11} -nél kisebb számhoz hozzárendeli a számjegyeinek összegét. A $g \circ f$ leképezés minden hallgatóhoz egy 0 és 100 közé eső számot rendel.
- $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3, g(x) = -3x + 5$. Határozzuk meg a $g \circ f$ szorzat leképezést!
- Az f leképezés minden síkbeli P ponthoz hozzárendeli a koordinátáit (x, y) alakban egy rögzített Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben. A $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ekkor a $g \circ f$ leképezés P ponthoz az origótól vett távolságát rendel.

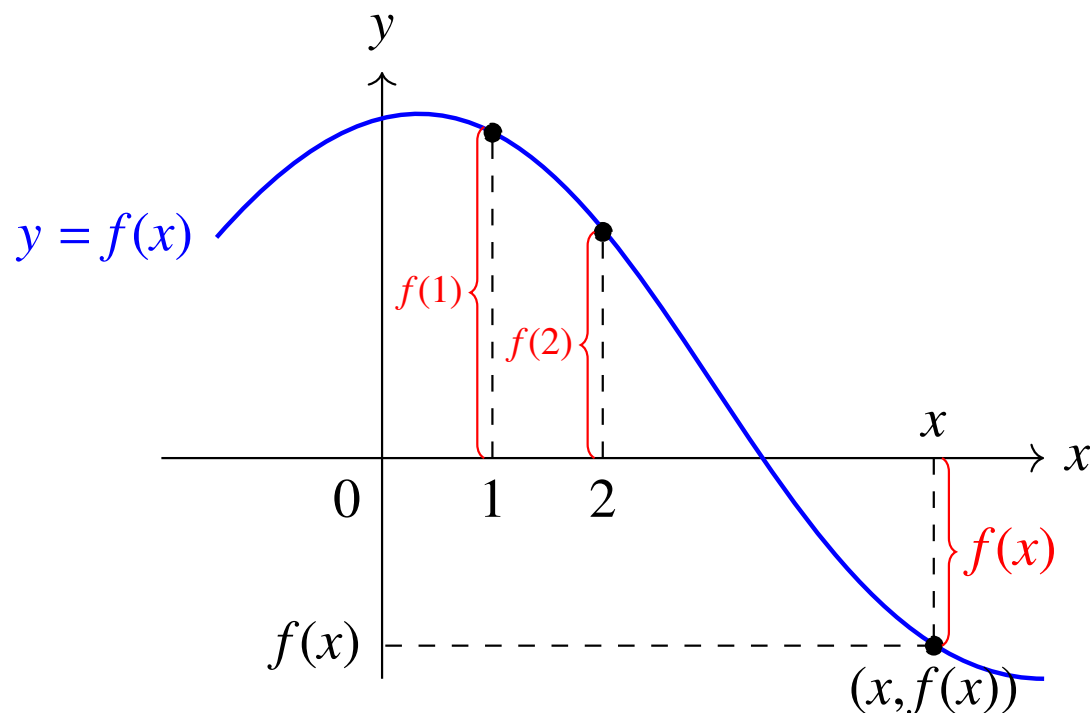
Valós függvények értelmezési tartománya és értékkészlete

- Azokat a függvényeket, amelyeknek értékkészlete a valós számok egy részhalmaza, valós értékű függvényeknek nevezzük
- Az ilyen függvények értelmezési tartománya és értékkészlete általában egy-egy intervallum vagy intervallumok uniója
- A szóban forgó intervallumok lehetnek nyíltak, zártak vagy félig nyíltak, végesek vagy végtelenek.

Függvény	Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$

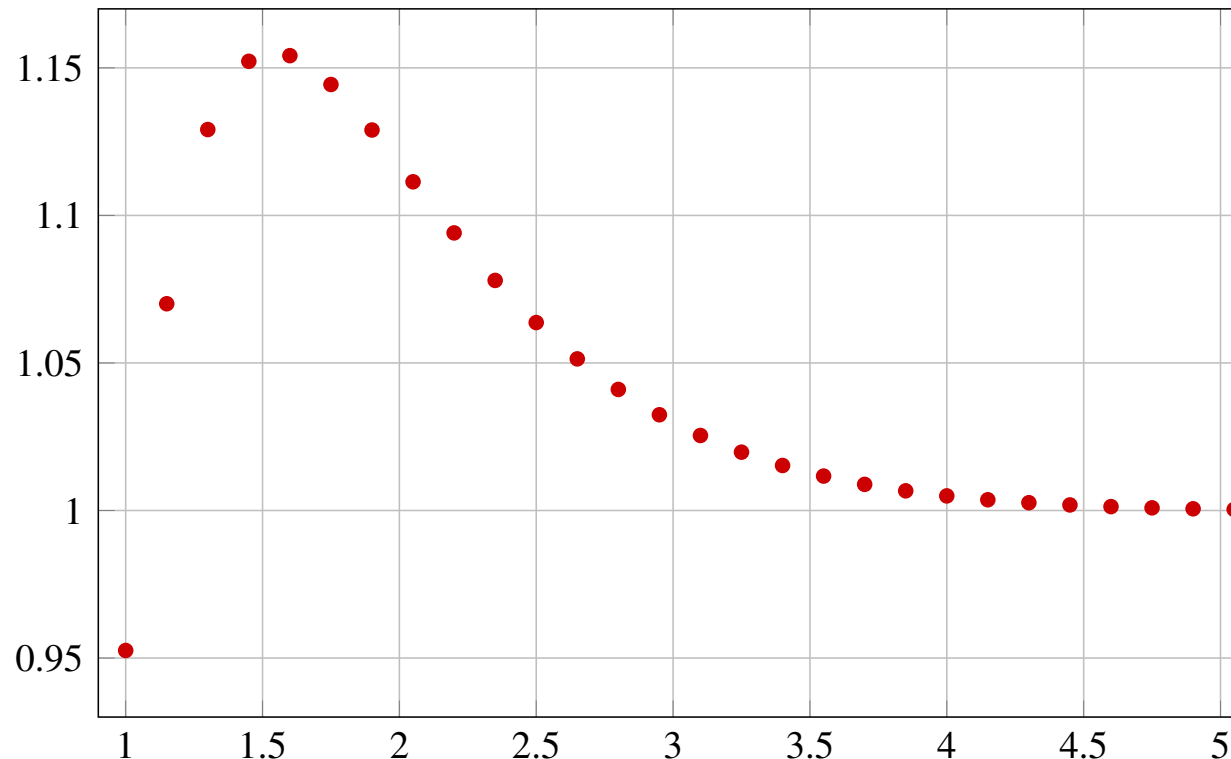
Függvény grafikonja

- A függvény grafikonja a síkon a $(x, f(x))$ pontok halmaza
- A grafikon segítségével vizuálisan értelmezhetjük a függvény viselkedését, például növekedését, csökkenését, szélsőértékeit és zérushelyeit
- A grafikon lehet egyenes, görbe vagy akár szaggatott vonal is, attól függően, hogy milyen típusú függvényről van szó



Függvények numerikus megadása

- A függvényeket nem csak képlettel vagy grafikonon, hanem numerikus értékekkel is megadhatjuk
- Ez különösen hasznos lehet, ha a függvény képlete bonyolult vagy nem ismert, de néhány értékét ismerjük
- A numerikus megadás lehet egy táblázat, ahol az x értékekhez tartozó $f(x)$ értékek vannak felsorolva

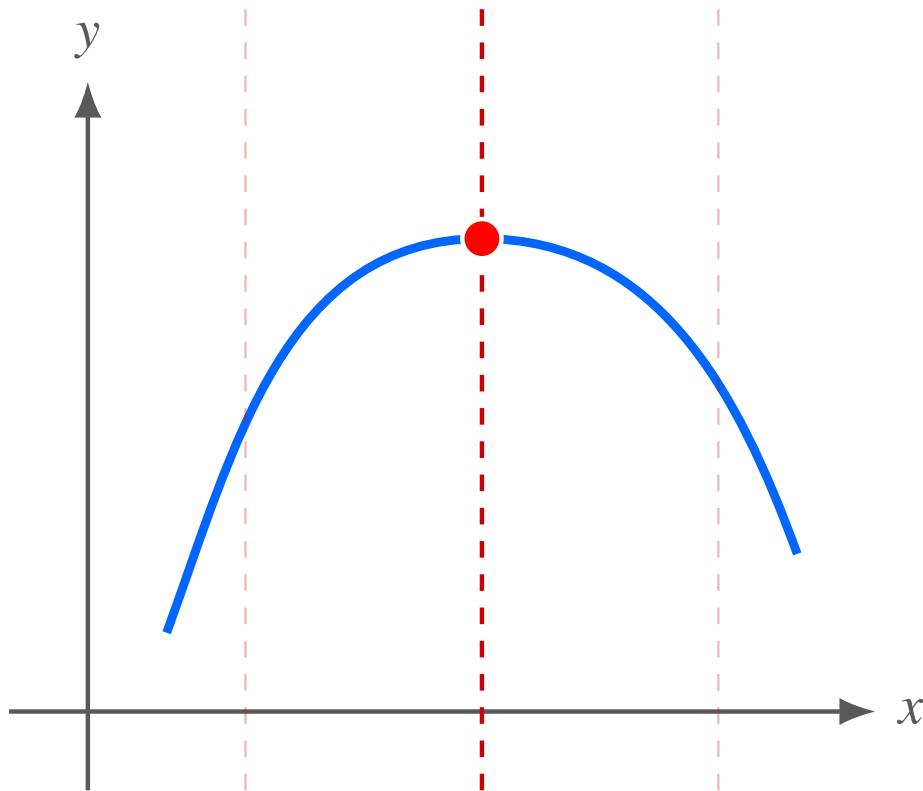


Függvények grafikonjának vizsgálata

- A függvény grafikonjának vizsgálata során megfigyelhetjük a függvény viselkedését, például növekedését, csökkenését, szélsőértékeit és zérushelyeit
- A grafikon segítségével könnyen azonosíthatjuk a függvény zérushelyeit, ahol a grafikon metszi az x tengelyt, valamint a szélsőértékeket, ahol a grafikon lokális maximumot vagy minimumot ér el
- A grafikon vizsgálata során alkalmazhatjuk a „vertikális teszt,” amely megmutatja, hogy egy adott x értékhez pontosan egy y érték tartozik-e, azaz hogy a görbe valóban egy függvény grafikonja-e

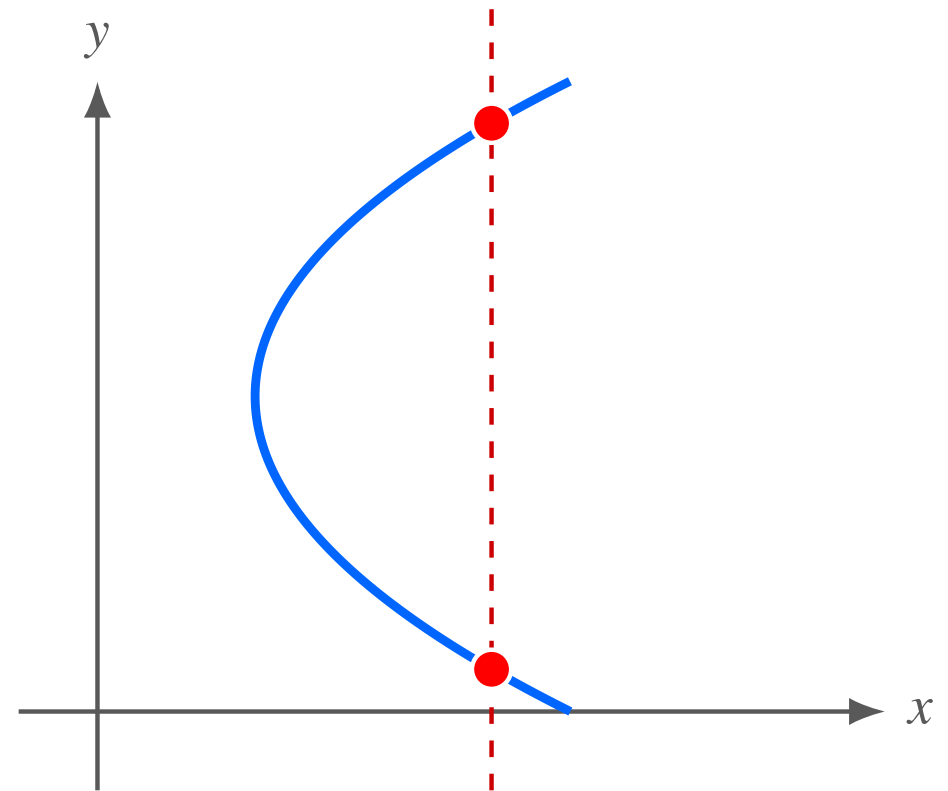
Függvények grafikonjának vizsgálata

RENDBEN (függvény grafikonja)



A függőleges egyenes pontosan **egyszer** metszi a görbét

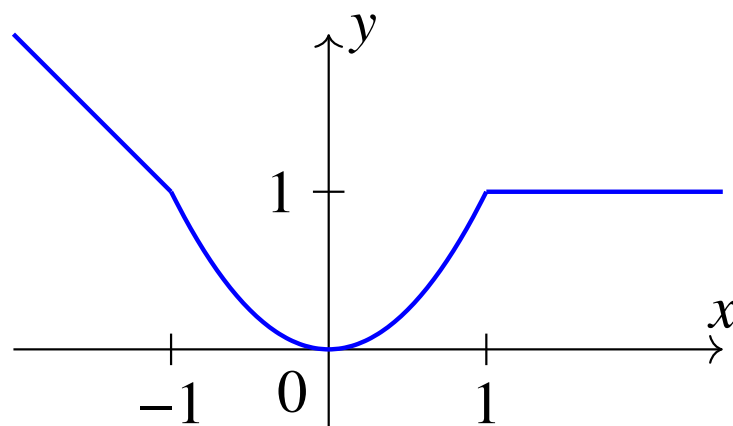
NINCS RENDBEN (nem függvény grafikonja)



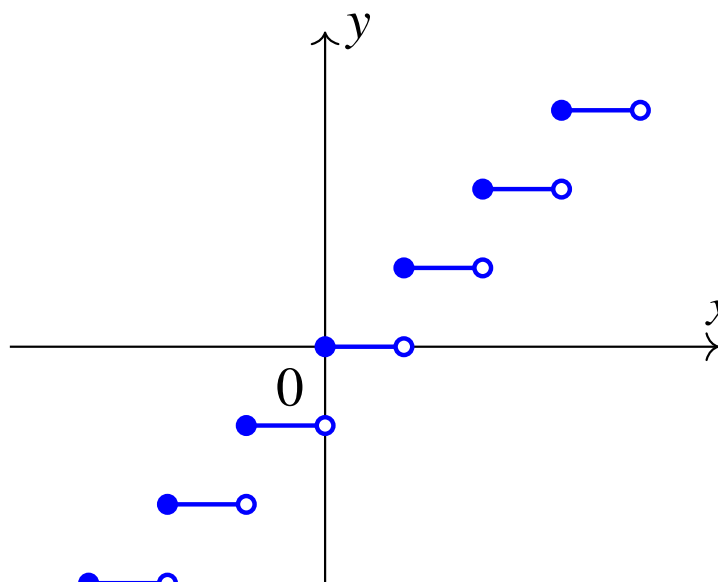
A függőleges egyenes **többször** metszi a görbét

Szakaszonként definiált függvények

- Szakaszonként definiált függvények olyan függvények, amelyek különböző képlettel vannak definiálva a különböző intervallumokon
- Ezek a függvények gyakran használatosak olyan helyzetek modellezésére, ahol a viselkedés változik egy adott ponton vagy intervallumon



$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



$$f(x) = [x] \text{ alsó egészrész}$$

Tagolás

- 1 A valós számok és a valós számegegyenes
- 2 Egyenesek, körök és parabolák
- 3 Függvények és grafikonok
- 4 Alapvető függvénytípusok**
- 5 Trigonometrikus függvények
- 6 A trigonometrikus azonosságok
- 7 Műveletek függvényekkel és függvény tulajdonságok
- 8 Függvény transzformációk

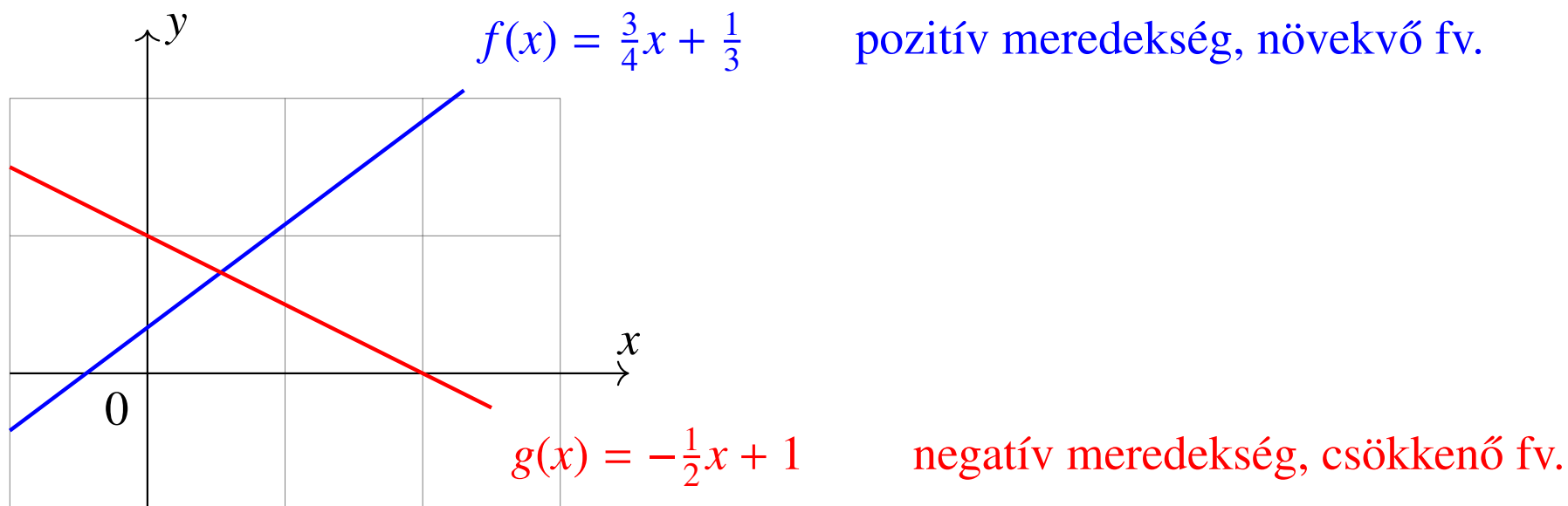
Lineáris (elsőfokú) függvények

- A **lineáris függvények** olyan függvények, ahol y az x -nek egy **elsőfokú kifejezése**, azaz nem tartalmaz x -nek magasabb hatványait vagy más műveleteket
- Általános alakjuk:

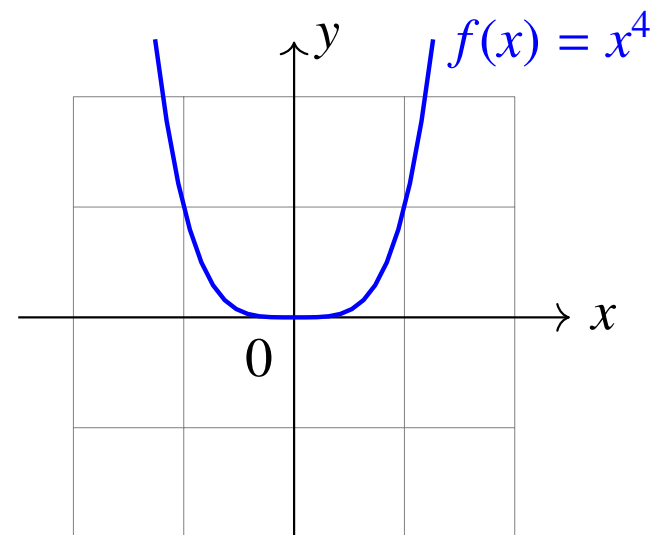
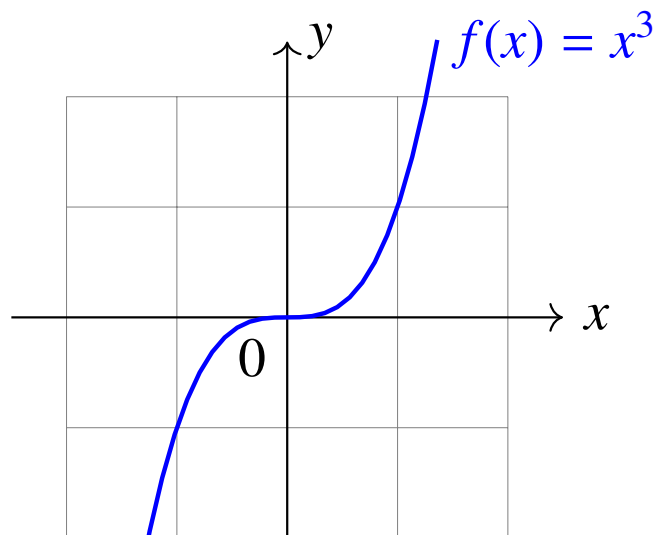
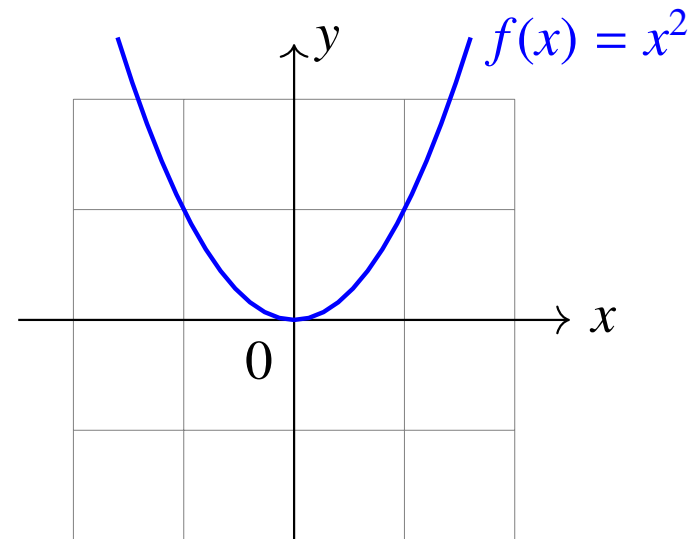
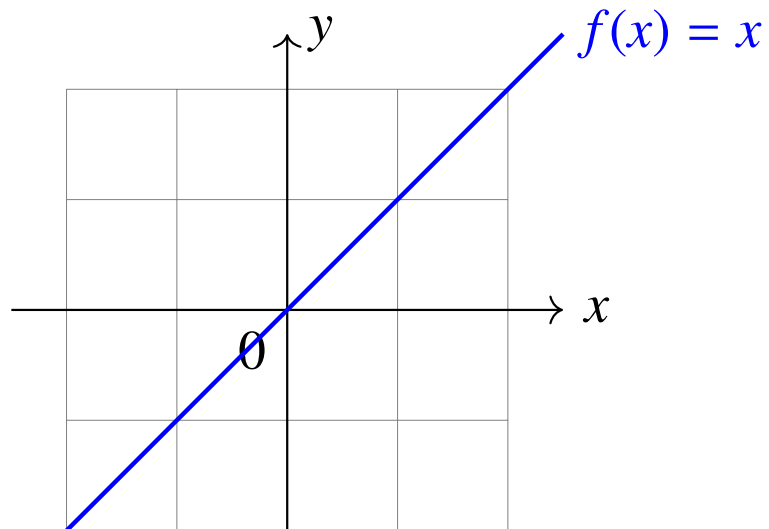
$$f(x) = mx + b,$$

ahol m a **meredekség** és b a **tengelymetszet**

- A lineáris függvények grafikonja egy **egyenes vonal** a síkon



Hatványfüggvények $f(x) = x^n$, pozitív egész kitevővel



Polinomfüggvények

Definíció: Polinomfüggvény

Azt mondjuk, hogy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **n -edfokú polinomfüggvény**, ha valamilyen rögzített $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ valós számokra $a_n \neq 0$ és

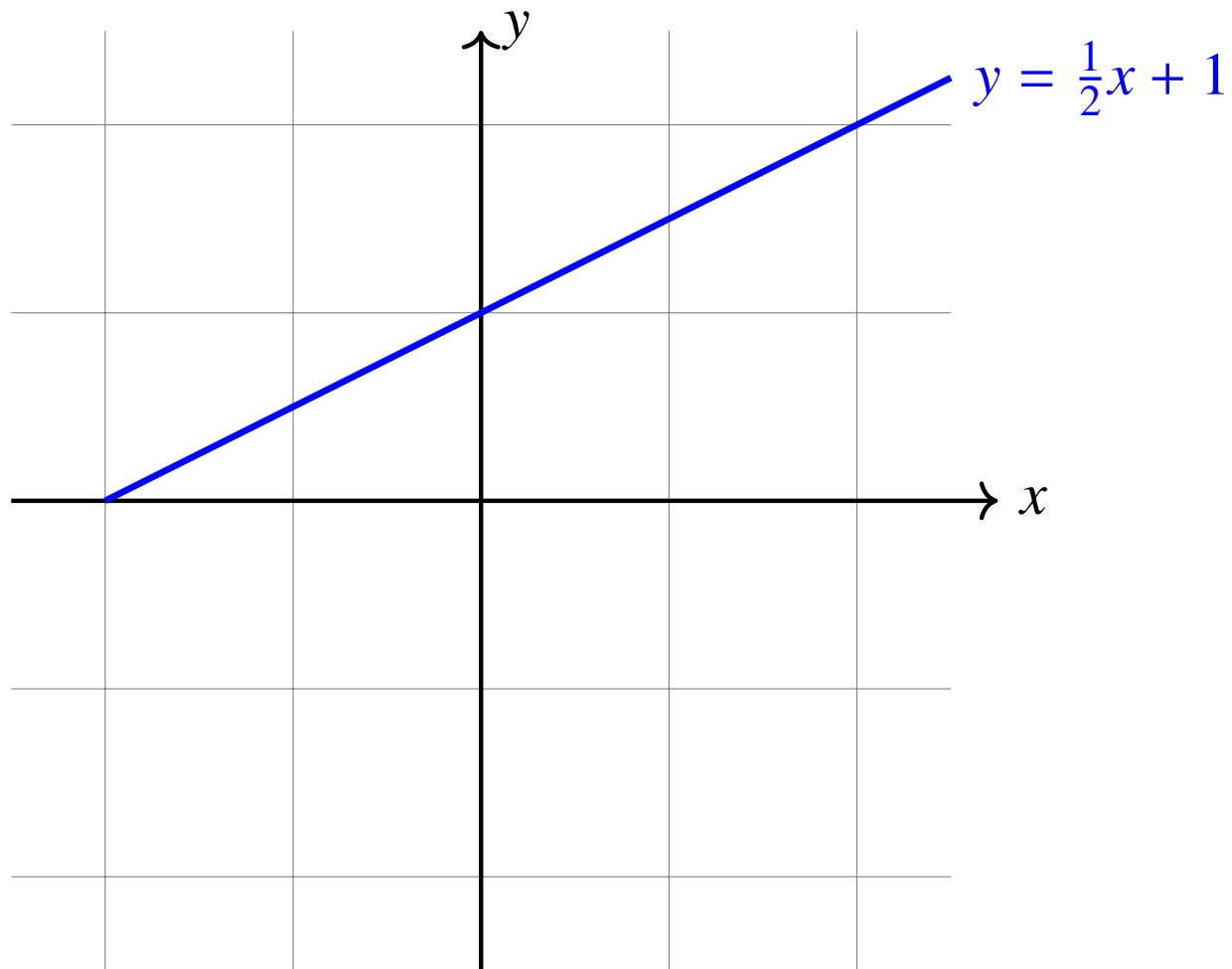
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

teljesül. Az $a_0, \dots, a_n$ számokat az f **együtthatóinak**, x -et pedig az f **változójának**, vagy **határozatlanjának** nevezzük.

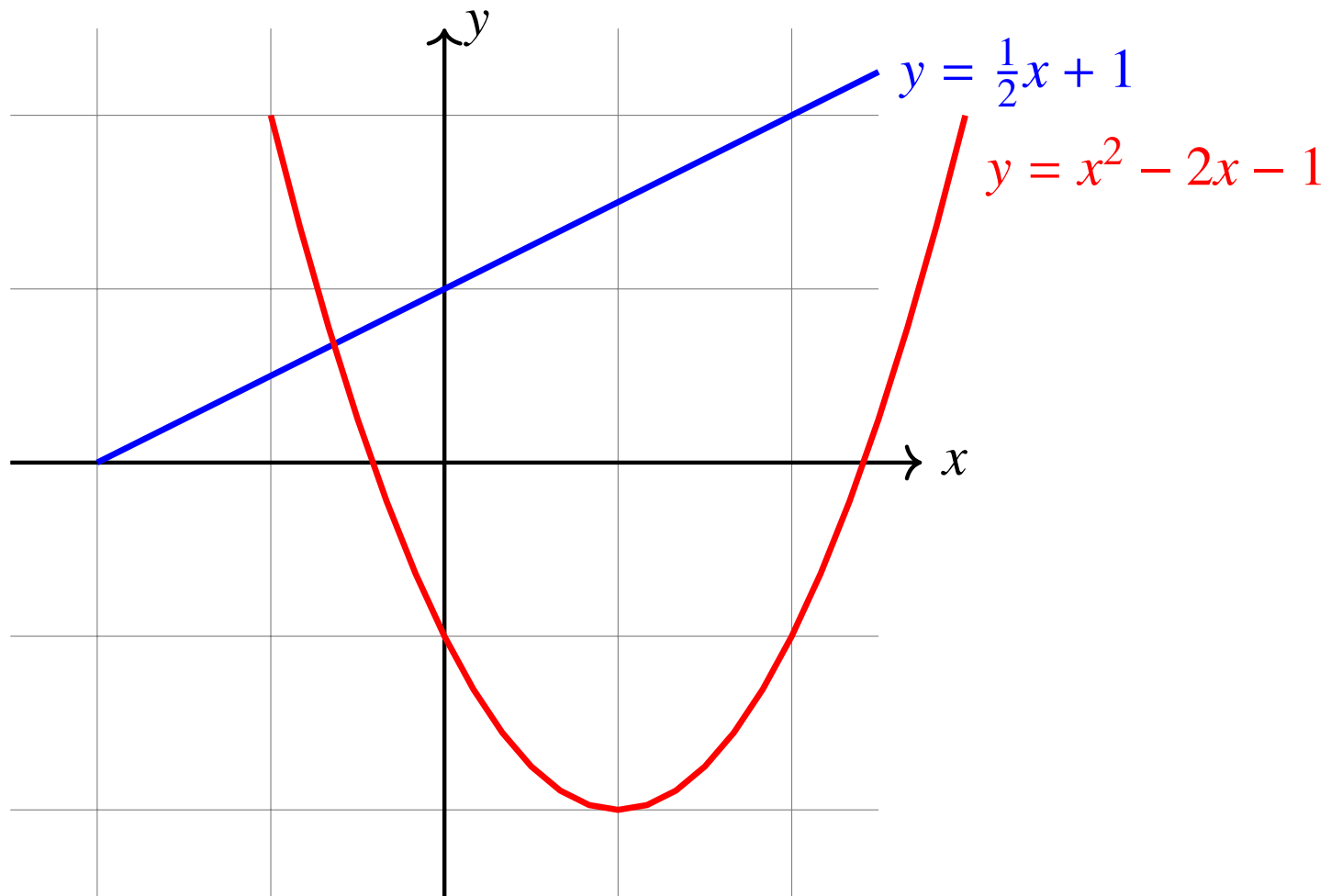
Példák:

- $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ elsőfokú, vagy **lineáris** polinomfüggvény.
- $f(x) = x^2 - 2x - 1$ másodfokú polinomfüggvény 1, -2 és -1 együtthatókkal.
- $f(x) = x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ harmadfokú pfv.
- $f(x) = x^4 - 2x^2 - \frac{1}{2}$ negyedfokú pfv. 1, 0, -2, 0, $-\frac{1}{2}$ együtthatókkal.

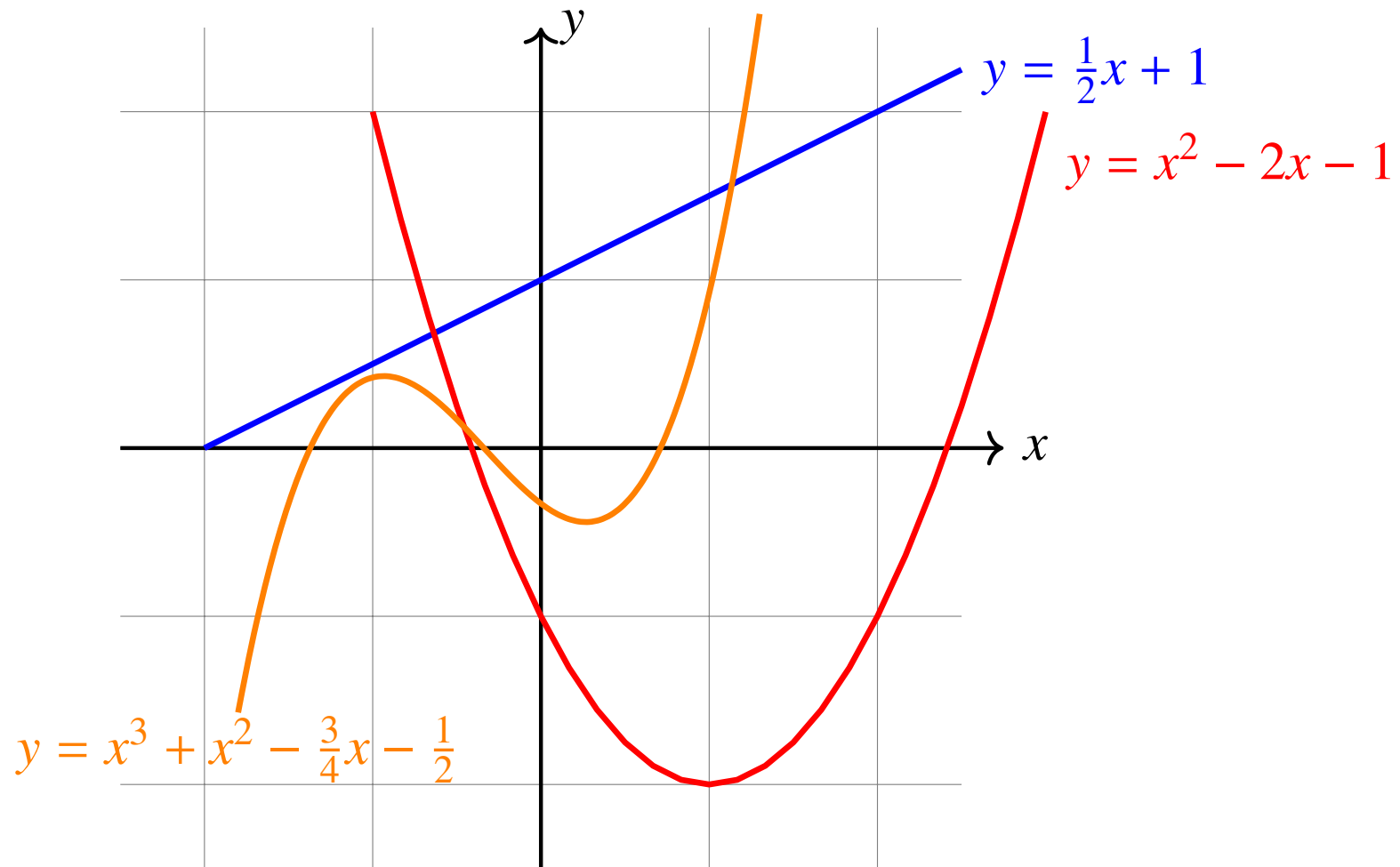
Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



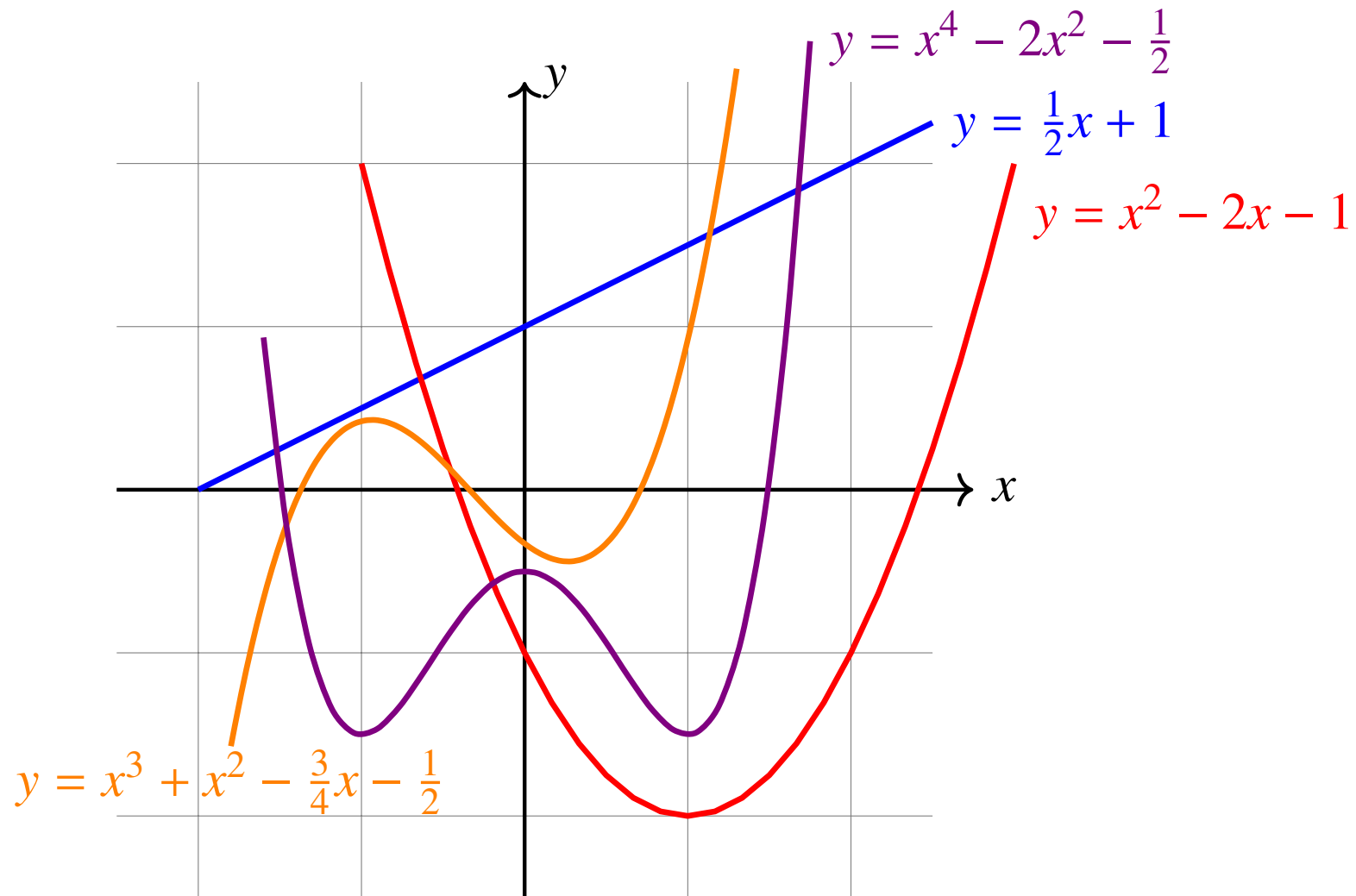
Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



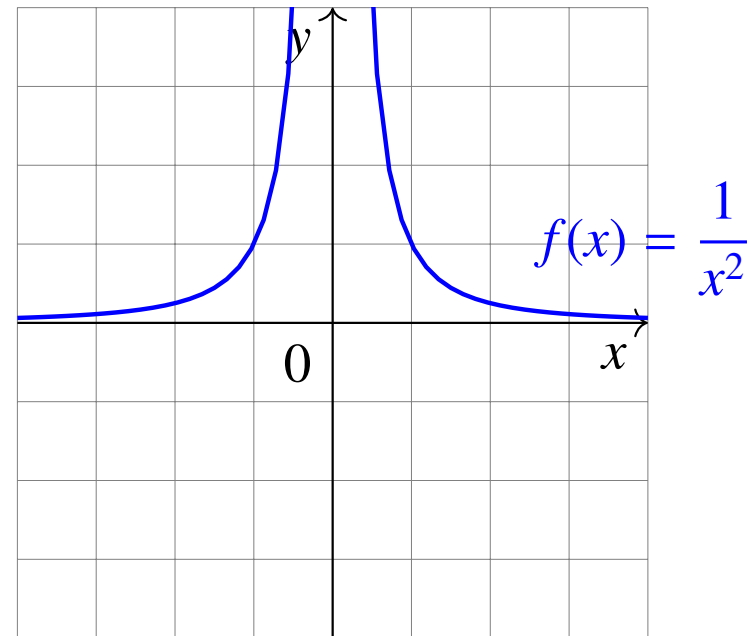
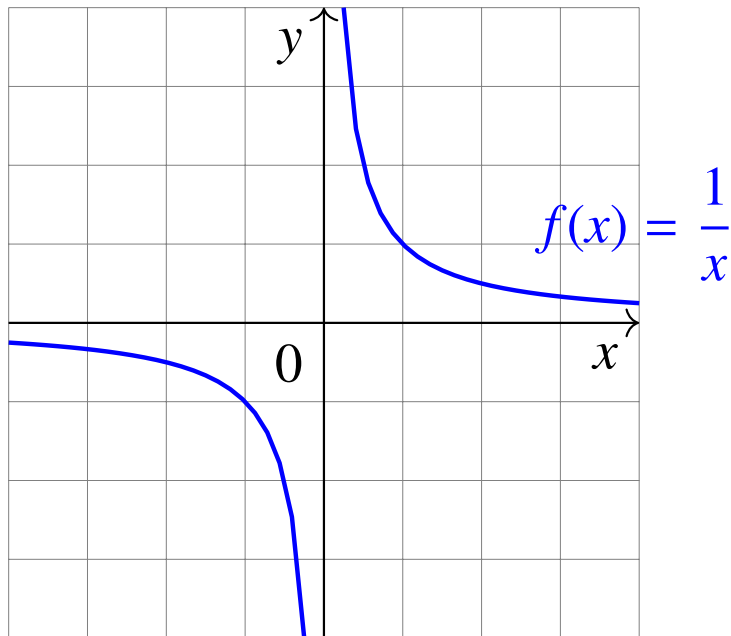
Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



Hatványfüggvények $f(x) = x^n$, negatív egész kitevővel

Definíció: Hatványfüggvény negatív egész kitevővel

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

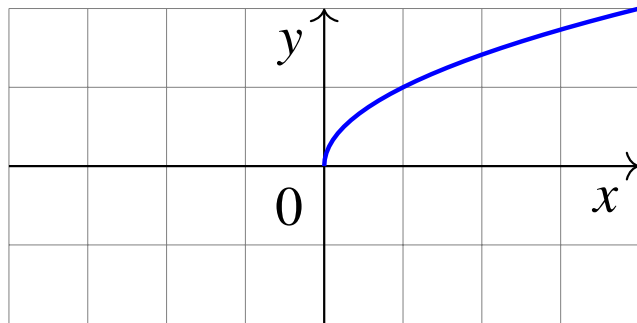


Hatványfüggvények $f(x) = x^q$, racionális tört kitevővel

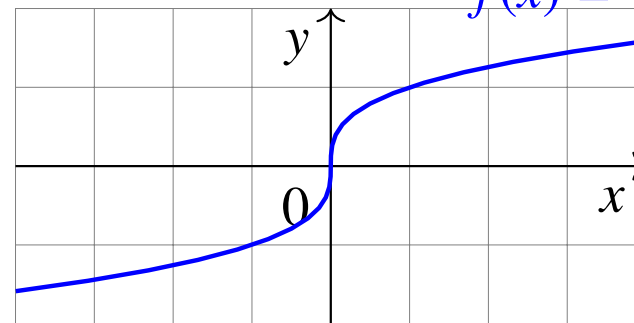
Definíció: Hatványfüggvény racionális tört kitevővel

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

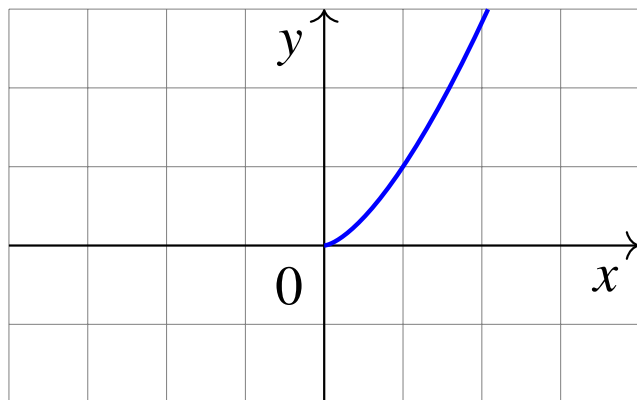
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$



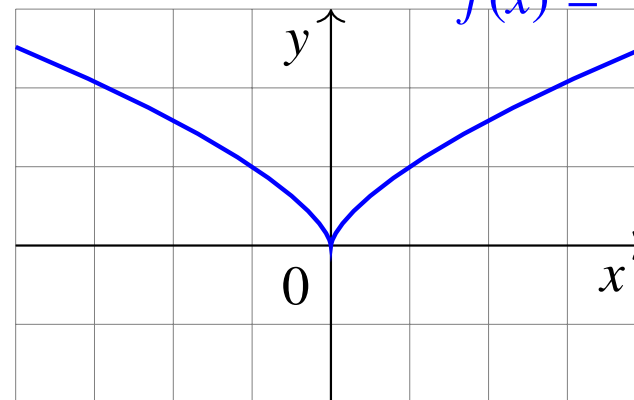
$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$



$$f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$$



$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$



Az exponenciális függvény $f(x) = a^x$

Definíció: Irracionális kitevőjű hatvány

Legyen $a > 0$ és $a \neq 1$ valós szám és x irracionális szám. Ekkor a^x értékét úgy definiáljuk, hogy

$$a^x \approx a^{\frac{m}{n}},$$

ahol m és n olyan egész számok, és $x \approx \frac{m}{n}$.

A hatványozás tulajdonságai:

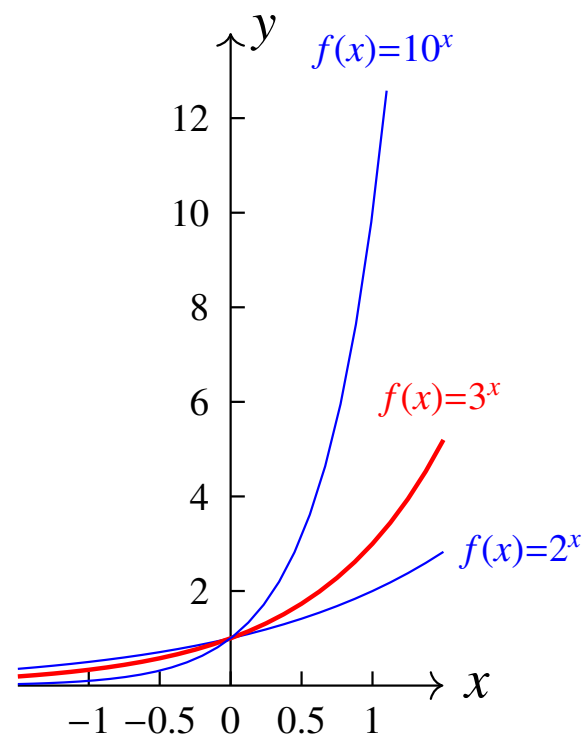
$$a^0 = 1 \quad (\text{ha } a \neq 0)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$



Az exponenciális függvény $f(x) = a^x$

Definíció: Irracionális kitevőjű hatvány

Legyen $a > 0$ és $a \neq 1$ valós szám és x irracionális szám. Ekkor a^x értékét úgy definiáljuk, hogy

$$a^x \approx a^{\frac{m}{n}},$$

ahol m és n olyan egész számok, és $x \approx \frac{m}{n}$.

A hatványozás tulajdonságai:

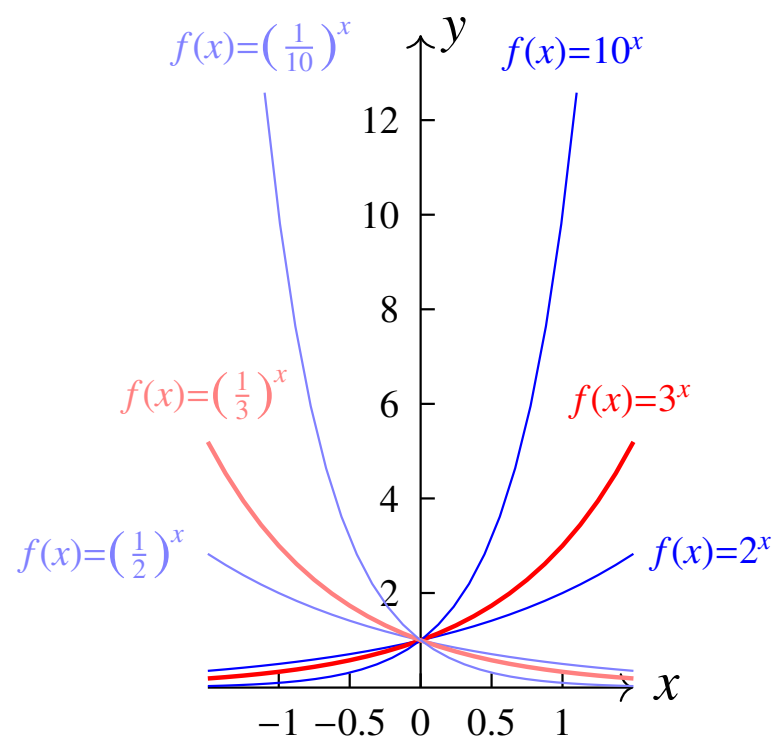
$$a^0 = 1 \quad (\text{ha } a \neq 0)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$



A logaritmus függvény

Definíció: A logaritmus

Legyen $a > 0$ és $a \neq 1$. Az x pozitív valós szám a **alapú logaritmusa** alatt azt a valós y számot értjük, amelyre teljesül

$$x = a^y.$$

Jelölése: $y = \log_a x$.

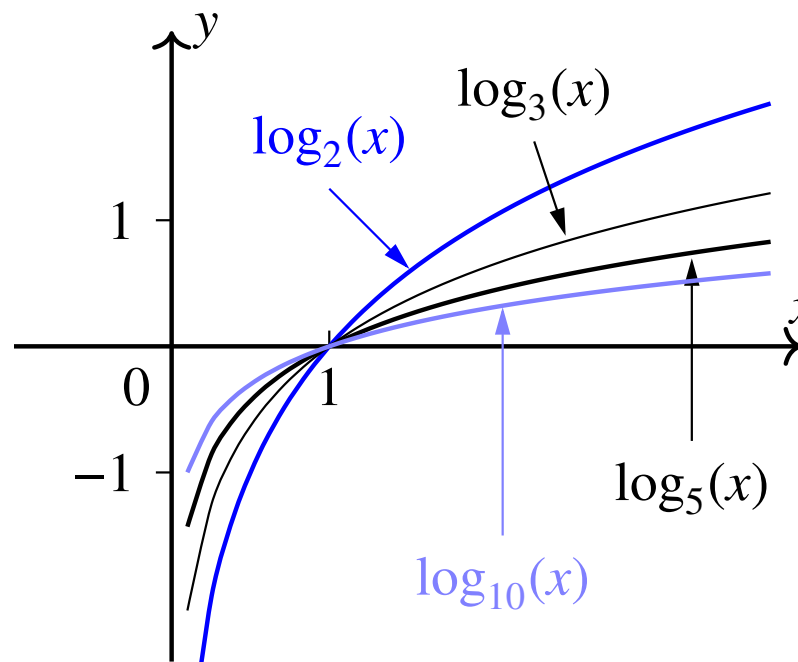
A logaritmus tulajdonságai:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^n) = n \log_a x$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$



Tagolás

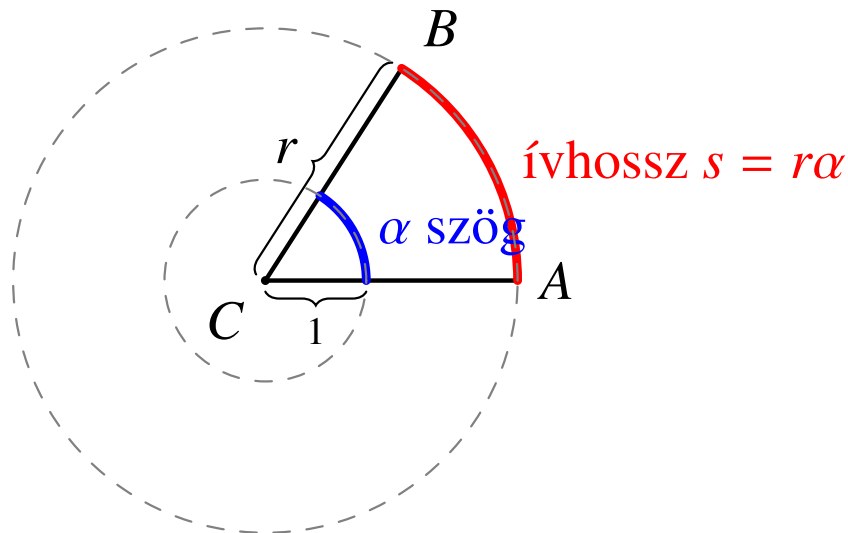
- 1 A valós számok és a valós számegyenes
- 2 Egyenesek, körök és parabolák
- 3 Függvények és grafikonok
- 4 Alapvető függvénytípusok
- 5 Trigonometrikus függvények**
- 6 A trigonometrikus azonosságok
- 7 Műveletek függvényekkel és függvény tulajdonságok
- 8 Függvény transzformációk

Az ívmérték

Definíció: Ívmérték

A C csúcspontú, ACB szög **ívmértéke** (vagy **radiánban** mért nagysága) a C középpontú, egység sugarú, α szögű körív hosszával egyenlő szám.

Jelölés: $\alpha = \angle ACB$.



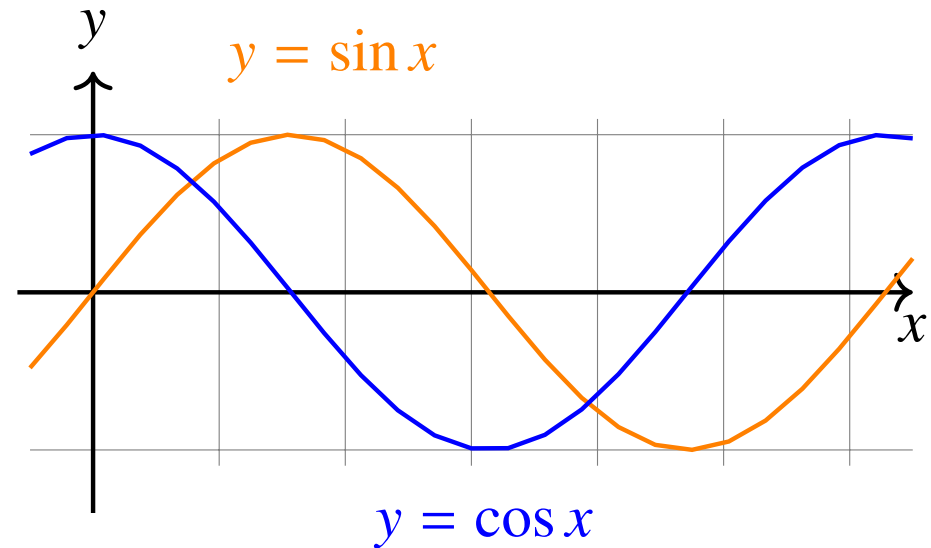
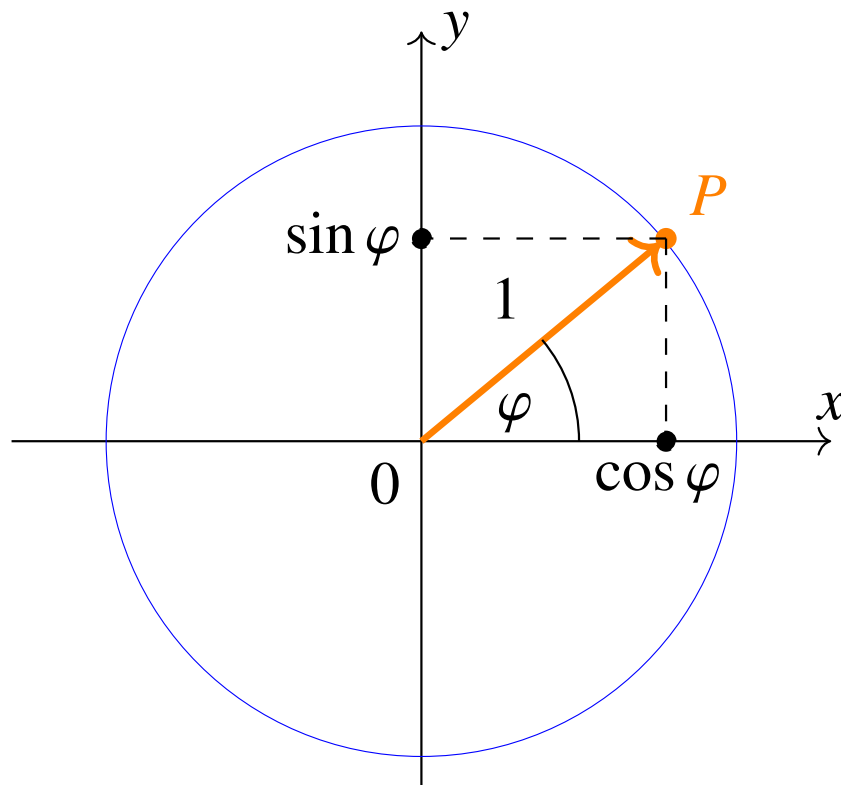
- Az egységkör kerülete 2π , ami a 360° -os teljes szögnek felel meg.
- A radián és a fok közötti átváltás:

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.2958^\circ.$$

Trigonometrikus függvények: szinusz, koszinusz

Definíció: Szinusz, koszinusz függvények

Legyen P az x -tengellyel φ szöget bezáró **egységvektor** végpontja. Ekkor P vetületei az x - illetve y -tengelyre **$\cos \varphi$** , illetve **$\sin \varphi$** .



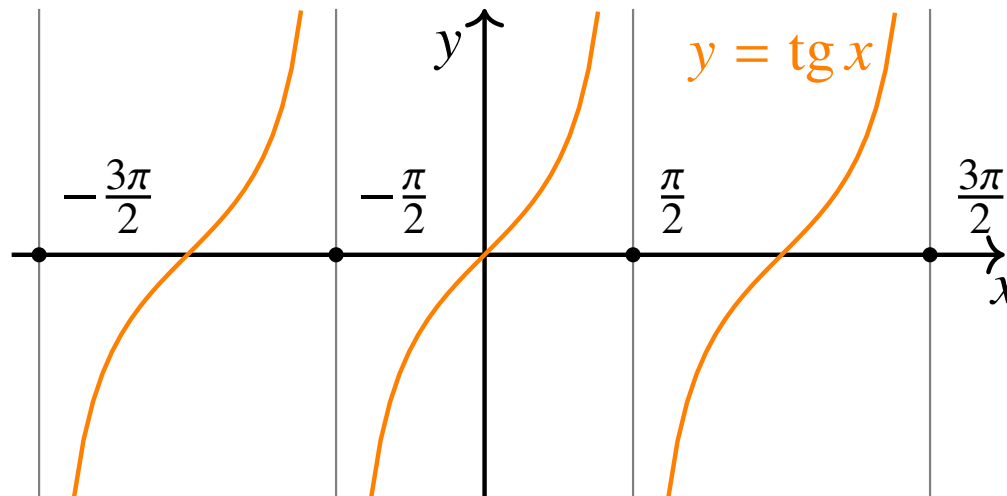
Trigonometrikus függvények: tangens, kotangens

Definíció: Tangens, kotangens

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x},$$

ahol a tangens függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, a kotangensé pedig $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Megj. Használatos még a $\tan x$, $\cot x$ jelölés is, különösen angol nyelvi környezetben.



A trigonometrikus függvények alaptulajdonságai

Tétel: A trigonometrikus függvények alaptulajdonságai

Minden $x \in \mathbb{R}$ számra teljesülnek az alábbiak:

- ① $\sin(x + 2\pi) = \sin x, \cos(x + 2\pi) = \cos x.$
- ② $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x.$
- ③ $\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x.$
- ④ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$
- ⑤ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$



Az (1), (2) és (3)-beli tulajdonságokat külön definiáljuk.

Definíció: Függvények periodicitása

Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény **periódikus** $d > 0$ **periódussal**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra teljesül $f(x + d) = f(x)$.

Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **páros** (illetve **páratlan**) ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra $f(-x) = f(x)$ (illetve $f(-x) = -f(x)$).

A trigonometrikus függvények inverzei

Vegyük észre, hogy az alábbi trigonometrikus függvények **bijekciót** határoznak meg itt megadott halmazok között.

① $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1].$

② $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1].$

③ $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}.$

④ $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}.$

A **megfelelő értelmezési tartományokon** definiálhatjuk a trigonometrikus függvények **inverzét**:

① $\sin^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$

② $\cos^{-1} = \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$

③ $\operatorname{tg}^{-1} = \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$

④ $\operatorname{ctg}^{-1} = \operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi).$

Ejtsd: arkusz szinusz, arkusz koszinusz, stb.

Tagolás

- 1 A valós számok és a valós számegyenes
- 2 Egyenesek, körök és parabolák
- 3 Függvények és grafikonok
- 4 Alapvető függvénytípusok
- 5 Trigonometrikus függvények
- 6 A trigonometrikus azonosságok**
- 7 Műveletek függvényekkel és függvény tulajdonságok
- 8 Függvény transzformációk

Trigonometrikus azonosságok

Pitagorasz-tétel

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Addíciós tételek

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

Félszög tételek

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

A koszinusz-tétel

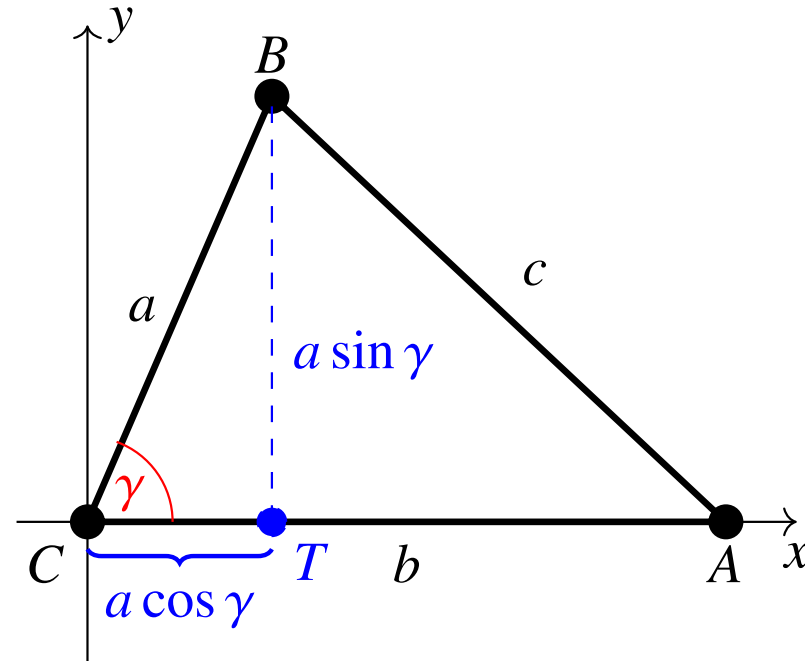
Koszinusz-tétel

Egy háromszög a, b, c oldalaira és a c -vel szemközti γ szögre teljesül, hogy

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

- 1 Helyezzük el a $\triangle$ -t az ábra szerint a koordinátarendszerben
- 2 A derékszögű $CTB\triangle$ befogói $a \sin \gamma$ és $a \cos \gamma$
- 3 A derékszögű $ATB\triangle$ oldalaira a Pitagorasz-tétel miatt:

$$\begin{aligned} c^2 &= (b - a \cos \gamma)^2 + (a \sin \gamma)^2 \\ &= b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2(\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$



Tagolás

- 1 A valós számok és a valós számegyenes
- 2 Egyenesek, körök és parabolák
- 3 Függvények és grafikonok
- 4 Alapvető függvénytípusok
- 5 Trigonometrikus függvények
- 6 A trigonometrikus azonosságok
- 7 Műveletek függvényekkel és függvény tulajdonságok**
- 8 Függvény transzformációk

Alapműveletek valós függvényekkel

Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvények.

Definíció: Valós függvények pontonkénti összege és szorzata

Az f és g függvények **pontonkénti összege**, illetve **szorzata** alatt azt az $f + g$ -vel, illetve fg -vel jelölt $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értjük, amelyre teljesül

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ illetve } (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Hasonlóan definiálhatjuk a **különbség** és a **hányados** műveleteket is.

Vigyázat! Két valós függvény pontonkénti szorzata nem keverendő össze a függvények, mint leképezések $f \circ g$ szorzatával.

Állítás: A pontonkénti függvénytűveletek alaptulajdonságai

A valós függvények pontonkénti összeadása és szorzása **asszociatív**, **kommutatív** és **disztributív**.

Növekvő és csökkenő függvények

Definíció: Növekvő és csökkenő függvények

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény. Azt mondjuk, hogy

- 1 f **monoton növekvő** az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $a \leq x < y \leq b$ esetén $f(x) \leq f(y)$
- 2 f **szigorúan monoton növekvő** az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $a \leq x < y \leq b$ esetén $f(x) < f(y)$
- 3 f **monoton csökkenő** az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $a \leq x < y \leq b$ esetén $f(x) \geq f(y)$
- 4 f **szigorúan monoton csökkenő** az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $a \leq x < y \leq b$ esetén $f(x) > f(y)$

Példa: Az $f(x) = x^2$ függvény

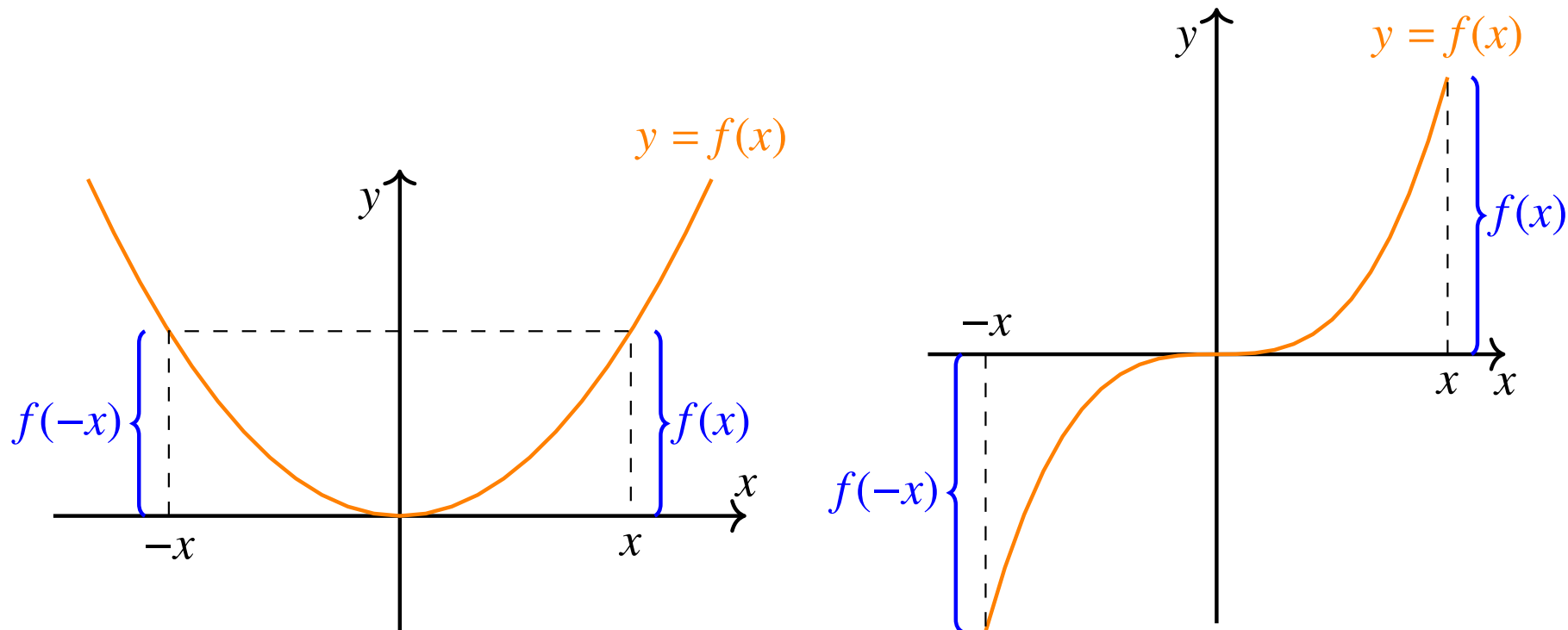
- szigorúan monoton csökkenő az $(-\infty, 0]$ intervallumon,
- és szigorúan monoton növekvő pedig a $[0, +\infty)$ intervallumon.

Szimmetrikus grafikonok: páros és páratlan függvények

Definíció: Páros és páratlan függvények

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény. Azt mondjuk, hogy

- 1 f **páros**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(-x) = f(x)$.
- 2 f **páratlan**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(-x) = -f(x)$.



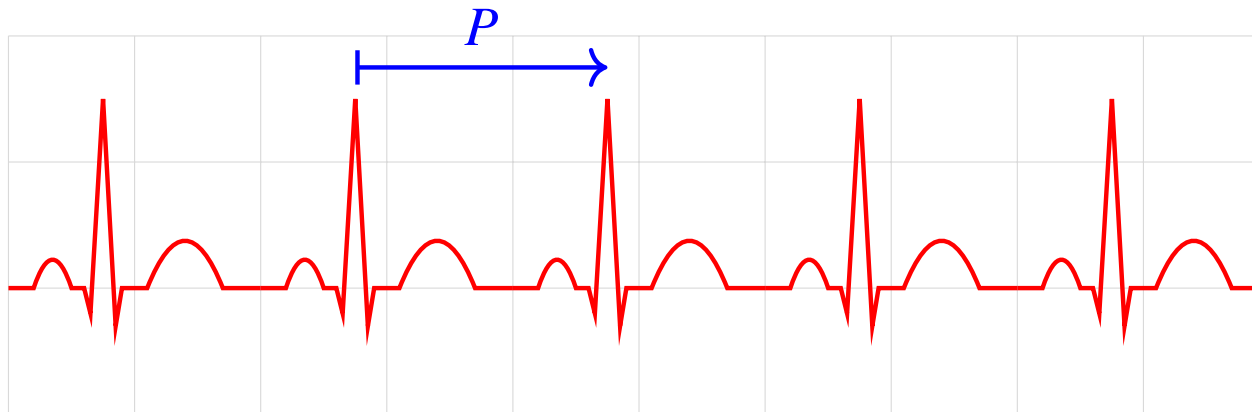
Periodikus függvények

Definíció: Periodikus függvény

Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **periodikus** $p > 0$ **periódussal**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra teljesül

$$f(x + p) = f(x).$$

- A legfontosabb példa a trigonometrikus függvények, melyeknek periódusa 2π .
- Az élettudományokban is fontosak a periodikus függvények:



Periodikus EKG görbe szimuláció

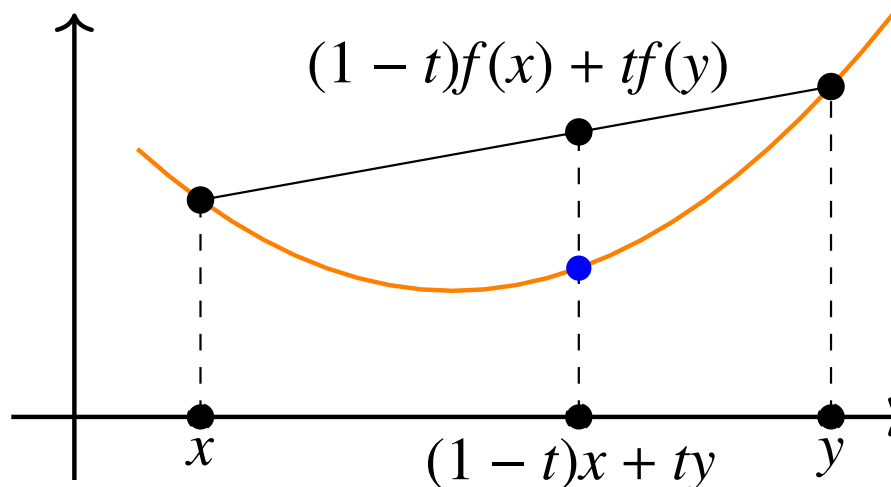
További függvénytulajdonságok

Definíció: Korlátosság, konvexség (konkávság)

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény. Azt mondjuk, hogy

- 1 f **korlátos**, ha $\exists K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, melyre $|f(x)| \leq K$ teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
- 2 f **felülről** (illetve **alulról**) **korlátos**, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, melyre $f(x) \leq K$ (illetve $f(x) \geq K$) teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
- 3 f **konvex**, ha minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $t \in [0, 1]$ esetén

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y).$$



Elemi függvények

Definíció: Elemi függvények

Elemi függvényeknek nevezzük azokat a valós függvényeket, melyek a következő függvényekből képezhetők:

- 1 $x \mapsto x$ (identikus leképezés),
- 2 $x \mapsto \sin x$ (szögfüggvények),
- 3 $x \mapsto e^x$ (exponenciális függvény).

Az elemi függvények képzéséhez megengedett műveletek: a felsorolt három függvény és konstansok

- 1 összeadása, kivonása, szorzása, osztása (**négy alpművelet**);
- 2 leképezések **szorzatai** és **inverze**.

Példák elemi függvényekre

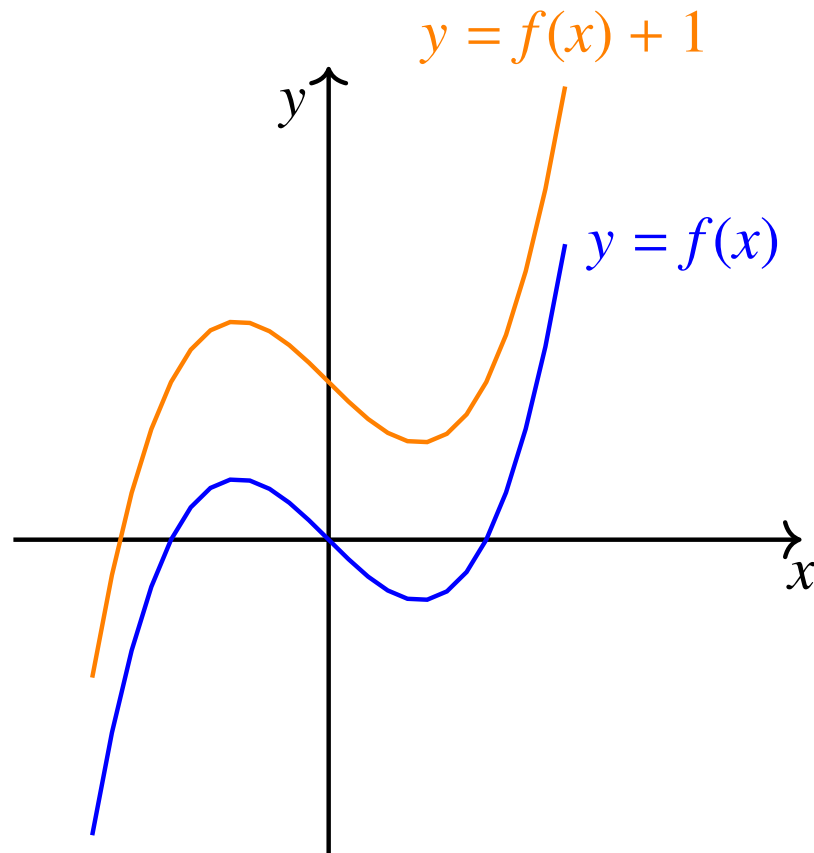
$3x + 4$, $2x \sin x$, $y = 3x^5$, $y = 2x + \sin x$, $\sqrt{x}$, $\ln x$, $\sin 2x$, $\cos \frac{x}{2}$, $\sin x^2$.

Tagolás

- 1 A valós számok és a valós számegyenes
- 2 Egyenesek, körök és parabolák
- 3 Függvények és grafikonok
- 4 Alapvető függvénytípusok
- 5 Trigonometrikus függvények
- 6 A trigonometrikus azonosságok
- 7 Műveletek függvényekkel és függvény tulajdonságok
- 8 Függvény transzformációk**

Lineáris függvénytranszformációk: Függőleges eltolások

Hasonlítsuk össze az $f(x) = x^3 - x$ és a $g(x) = x^3 - x + 1$ függvények grafikonjait:



Állítás:

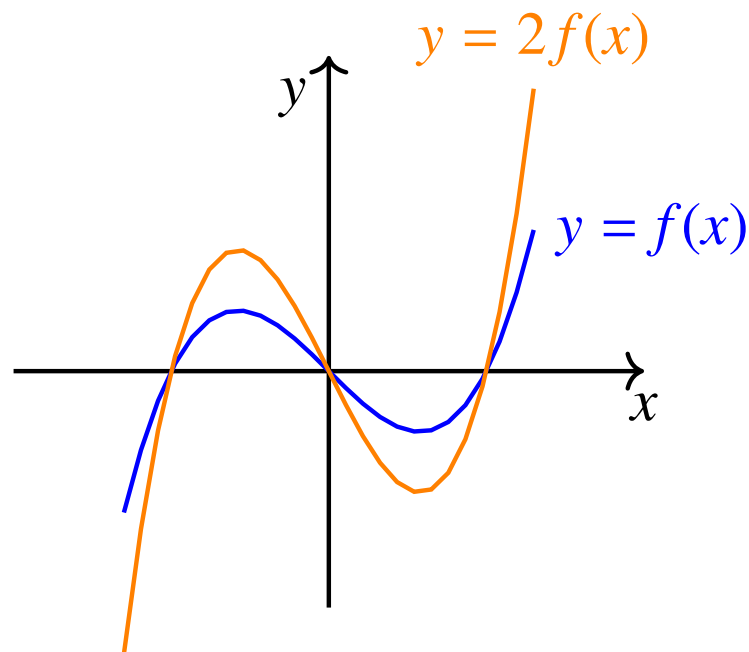
Függvényérték-transzformációk I.

Az $f(x) \mapsto f(x) + d$ típusú függvénytranszformációk az $f(x)$ grafikonjának d egységgel történő eltolásának felelnek meg az y -tengellyel párhuzamosan.



Lineáris függvénytranszformációk: Függőleges nyújtások

Hasonlítsuk össze az $f(x) = x^3 - x$ és a $g(x) = 2(x^3 - x)$ függvények grafikonjait:



Állítás:

Függvényérték-transzformációk II.

Az $f(x) \mapsto df(x)$ típusú függvénytranszformációk az $f(x)$ grafikonjának d arányú nyújtásának felelnek meg az y -tengellyel párhuzamosan.

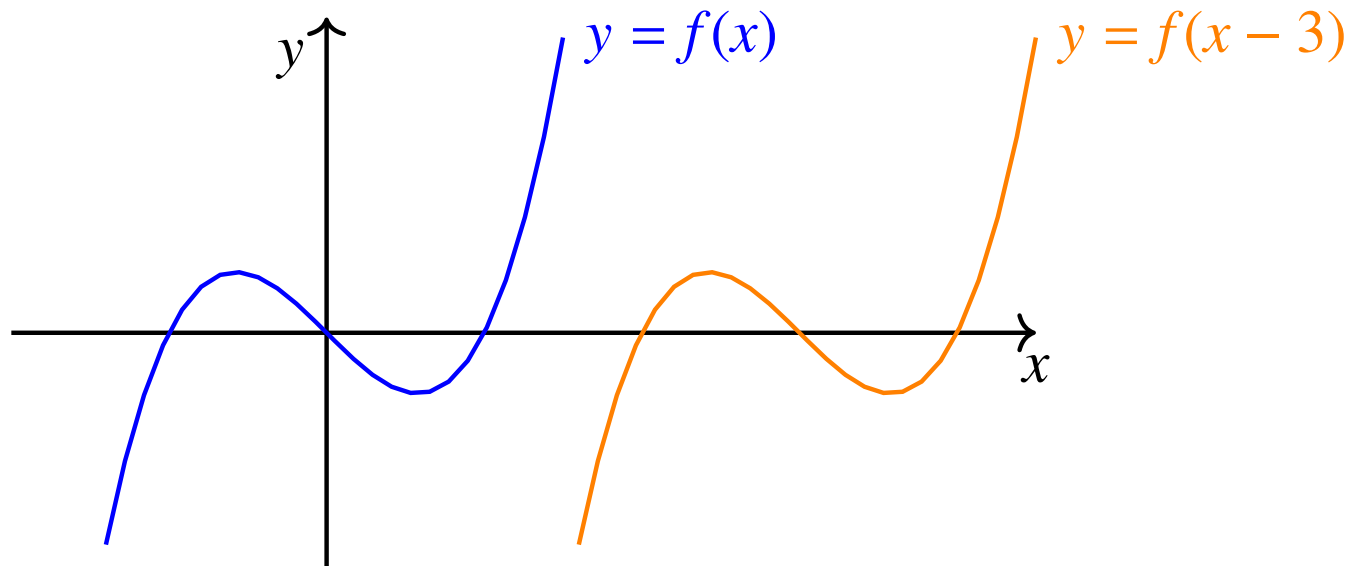


Lineáris függvénytranszformációk: Vízszintes eltolások

Hasonlítsuk össze az $f(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ és a $g(x) = f(x-3) = (x-3)^3 - (x-3) = (x-3)(x-4)(x-2)$ függvények gyökeit: $-1, 0, 1$, illetve $2, 3, 4$. Általában:

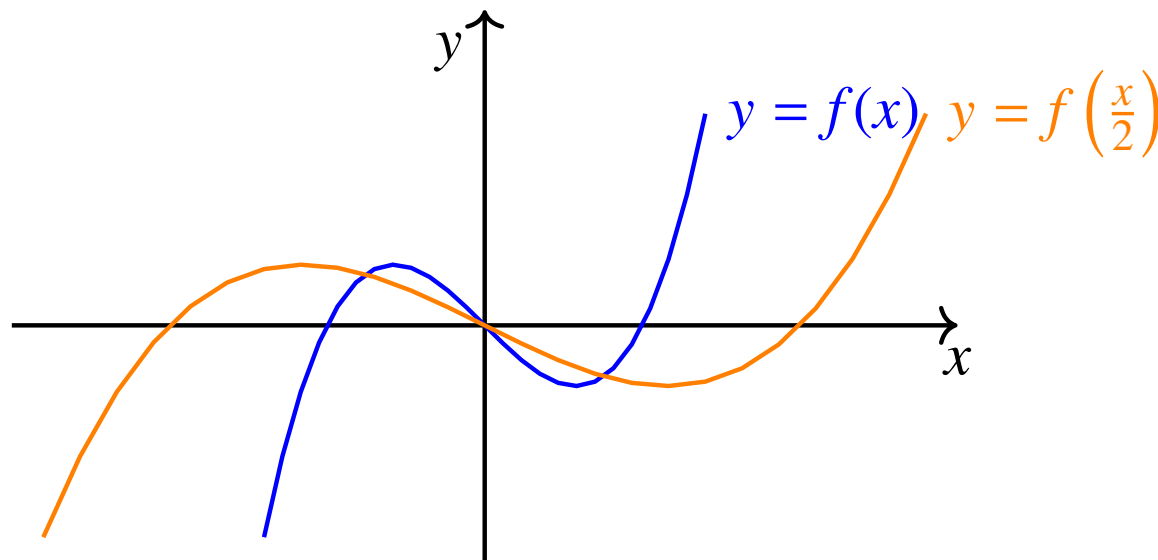
Állítás: A független változó transzformációi I.

Az $f(x) \mapsto f(x-c)$ típusú függvénytranszformációk az $f(x)$ grafikonjának c egységgel történő eltolásának felelnek meg az x -tengellyel párhuzamosan. $\square$



Lineáris függvénytranszformációk: Vízszintes nyújtások

Hasonlítsuk össze az $f(x) = x^3 - x$ és a $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^3}{8} - \frac{x}{2}$ függvények gyökeit, illetve grafikonjait:

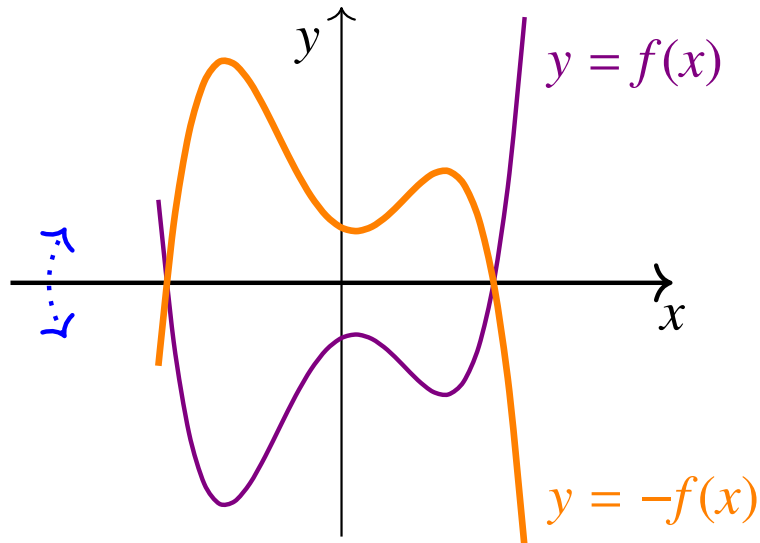


Állítás: A független változó transzformációi II.

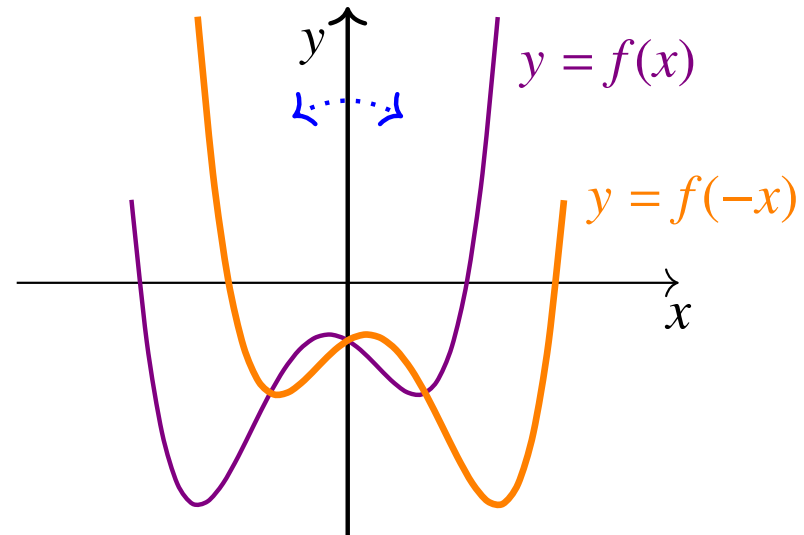
Az $f(x) \mapsto f\left(\frac{x}{c}\right)$ típusú függvénytranszformációk az $f(x)$ grafikonjának c arányú nyújtásának felelnek meg az x -tengellyel párhuzamosan.

□

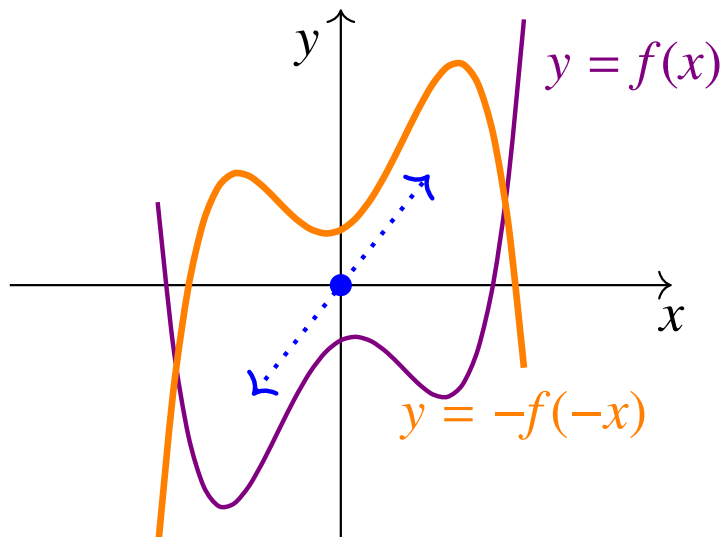
Lineáris függvénytranszformációk: Tükrözések



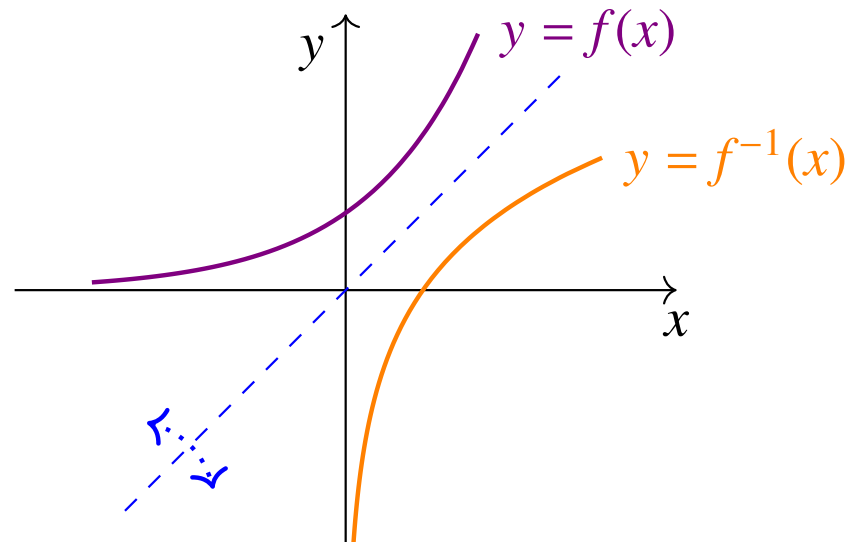
Tükrözés az x -tengelyre



Tükrözés az y -tengelyre



Tükrözés az origóra



Tükrözés a szögfelezőre