A 2024. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

2024. október 25. – 2024. november 4.

1. Legyen $G = (S, T; E)$ teljes párosítással rendelkező véges páros gráf. Igazoljuk, hogy létezik olyan $w\colon E \to \mathbb{R}$ injektív élsúlyozás, mely teljesíti az alábbiakat:

(1) Ha e_s a legkisebb súlyú s-re illeszkedő él minden $s \in S$ pontra, akkor $\{e_s \mid s \in S\}$ teljes párosítás G-ben.

(2) Ha e_t a legnagyobb súlyú t-re illeszkedő él minden $t \in T$ pontra, akkor $\{e_t \mid t \in T\}$ teljes párosítás G-ben.

2. Van-e olyan $C \subset [0,1]$ sehol sem sűrű, nemüres kompakt halmaz, melynek minden $x \in C$ pontjára

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{\lambda\big(C \cap (x, x+h)\big)}{h} > 0 \qquad \text{vagy} \qquad \liminf_{h \to 0+} \frac{\lambda\big(C \cap (x-h, x)\big)}{h} > 0$$

teljesül, ahol $\lambda(A)$ az A Lebesgue-mértékét jelöli?

3. Léteznek-e $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehol sem differenciálható folytonos függvények, melyekre $f \circ g$ differenciálható?

4. Legyen π az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak egy adott permutációja. Határozzuk meg $\sum_{i=1}^{n} |\pi(i) - \sigma(i)|$ legkisebb lehetséges értékét, ha a σ permutáció az n hosszúságú ciklusok közül választható. A választ a π diszjunkt ciklusok szorzatára való felbontásában szereplő ciklusok (beleértve az egyeleműeket is) számának és hosszának függvényében adjuk meg!

5. Legyen X reguláris topologikus tér és S megszámlálhatóan kompakt sűrű altere X-nek. (A megszámlálhatóan kompakt tulajdonság azt jelenti, hogy S minden végtelen részhalmazának van torlódáspontja S-ben.) Mutassuk meg, hogy ekkor S G_δ-sűrű is X-ben, azaz minden nem-üres G_δ halmazt metsz.

6. Egy hőterjedési folyamat során egy $x \in \mathbb{R}^n$ pontban a hőmérséklet alakulását *meghökkentő*nek nevezzük, ha végtelen sokszor vált monotonitást. Lehetséges-e, hogy a hőmérséklet alakulása $\mathbb{R}^n$ minden pontjában meghökkentő? Azaz: létezik-e olyan nemnegatív $u \in C^2((0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$ megoldása a $\partial_t u - \Delta u = 0$ hővezetési egyenletnek, melyre $u(t, x) \to 0$ tetszőleges t mellett, ha $|x| \to \infty$, és bármely $x \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik pozitív számokból álló monoton (t_k) sorozat, hogy $(-1)^k \partial_t u(t_k, x) > 0$ minden k-ra?

7. Igaz-e, hogy ha $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ egy részcsoportja minden n pozitív egészre n-tranzitív, akkor minden csoportautomorfizmusa kiterjed $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ egy csoportautomorfizmusává?

8. Igazoljuk, hogy bármely véges, páros síkgráf csúcsaihoz hozzárendelhető egy-egy körvonal úgy, hogy ezek egy síkban legyenek, bármely két szomszédos csúcshoz rendelt körvonalak érintsék egymást, míg bármely két különböző, nem szomszédos csúcshoz rendelt körvonalak két pontban messék egymást.

9. Legyen $q > 1$ egy 2-hatvány. Legyen $f\colon \mathbb{F}_{q^2} \to \mathbb{F}_{q^2}$ affin leképezés $\mathbb{F}_2$ felett. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^{q+1}$ egyenletnek legfeljebb $2q - 1$ megoldása van.

10. Legyen $A > 0$ és $B = \big(3 + 2\sqrt{2}\big) A$. Mutassuk meg, hogy az $a_k = \big\lfloor k/\sqrt{2} \big\rfloor$ $(k \in (A, B) \cap \mathbb{Z})$ véges sorozatban a páros és a páratlan tagok száma legfeljebb 2-vel tér el.

11. Egy urnában kezdetben egy piros és egy kék golyó van. Minden lépésben választunk egy véletlen golyót az urnából az egyenletes eloszlás szerint. Ha piros, akkor egy újabb piros és egy újabb kék golyót teszünk az urnába. Amikor pedig a k-adik alkalommal választunk kék golyót, akkor egy kék és $2k + 1$ piros golyót helyezünk az urnába. (A választott golyókat nem vesszük ki, továbbra is az urnában maradnak.)

Jelölje G_n az urnában lévő golyók számát n lépés után. Igazoljuk, hogy alkalmas $0 < c, \alpha < \infty$ konstansok esetén 1 valószínűséggel teljesül, hogy $\frac{G_n}{n^\alpha} \to c$.

* * *

A Schweitzer Miklós Emlékversenyen részt vehetnek mindazok, akik a verseny megrendezésekor Magyarországon vagy magyar állampolgárként külföldön valamely egyetem, főiskola hallgatói, vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny megrendezésének évében szereztek egyetemi, főiskolai oklevelet. PhD-hallgatók csak akkor vehetnek részt, ha egyetemi, főiskolai diplomájukat a verseny megrendezésének évében szerezték. A versenyből ki vannak zárva azok, akik a verseny megrendezésének événél korábban MSc-szintű oklevelet szereztek matematikus, alkalmazott matematikus, informatikus, programtervező matematikus vagy matematika tanári szakon akár itthon, akár külföldön.

A feladatok megoldására a versenyzők idén 10 napot fordíthatnak. A megoldásokat kizárólag elektronikusan lehet benyújtani a schweitzer.miklos@gmail.com címre **2024. november 4-én (hétfőn) magyar idő szerint 12:00 óráig**, a versenyző nevének, egyetemének, évfolyamának, végzettségének, pontos lakcímének és e-mail címének feltüntetésével. Lehetőség szerint egy levélben, **feladatonként külön fájlban** várjuk a megoldásokat, **PDF formátumban** (szkennelt dokumentum esetén jól olvashatóan) és magyar nyelven írva. Kivételes esetekben, előzetes egyeztetést követően elfogadunk angolul írott megoldásokat is. Más módon illetve később beadott dolgozatokat a versenybizottság nem vesz figyelembe.

A versenyzők tetszés szerinti számú kitűzött feladat megoldását nyújthatják be. A verseny nyertesei között a Társulat Schweitzer Miklós díjakat oszt ki. Aki legalább három feladatot megold, az mindenképpen díjban vagy elismerő oklevélben részesül.

A feladatokat a versenyzőknek önállóan kell megoldaniuk. Több versenyző együttműködése nincs megengedve. Az internet használata csak passzív módon engedélyezett, azaz keresni szabad, de bármilyen fórumon bármilyen kérdést feltenni tilos. Ha a versenybizottság tudomására jut, hogy valamelyik versenyző ezt a követelményt megszegte, az illetőt a versenyből kizárja.

Arra kérünk mindenkit, hogy a versenyzőknek semmilyen segítséget ne nyújtson a matematikai feladatok megoldásához, s velük semmiféle eszmecserét se folytassanak a feladatok megoldásával kapcsolatban a beadási határidő lejártáig. Kérjük továbbá, hogy amennyiben ilyen természetű szabálytalanság elkövetése jut bárki tudomására, haladéktalanul jelezze ezt a versenybizottságnak a fenti címen.

Idén a megoldások közös megbeszélésére 2024. november 5-én (kedden) magyar idő szerint 16:00 órakor, az Eötvös Loránd Tudományegyetem lágymányosi campusán (1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C), a 3-517-es számú teremben kerül sor. Az eredményhirdetés idejéről és módjáról később fogunk tájékoztatást adni az alábbi linken:

https://www.bolyai.hu/versenyek-schweitzer-miklos-emlekverseny

Ugyanitt tesszük közzé a közös megbeszélés után a nem hivatalos, előzetes megoldásvázlatokat. Az eredményhirdetést követően minden versenyző a schweitzer.miklos@gmail.com címre küldött emailben kérheti, hogy megírjuk, a beadott megoldásai közül melyeket találtuk teljesnek, lényegében helyesnek, részben megoldottnak illetve hibásnak.

Jó feladatmegoldást kívánunk!

a Versenybizottság